

〈技術論文〉

일반 형상의 커스프형 강체균열에 대한 열응력세기계수 결정

이강용* · 장용훈**

(1991년 10월 18일 접수)

Determination of Thermal Stress Intensity Factors for General Cusp-Crack Shaped Rigid Inclusion

Kang Yong Lee and Yong Hoon Jang

Key Words : Thermal Stress Intensity Factor(열응력세기계수), Cusp Crack(커스프 균열), Rigid Inclusion(강체 함유물), Airfoil Crack(익형 균열), Lip Crack(입술형 균열), Complex Variable(복소 변수)

Abstract

In case that a general cusp-crack shaped inclusion expressed in a polynominal form of conformal mapping function exists in a two dimensional elastic body under uniform heat flow, the complex potential and thermal stress intensity factors are derived. Two thermal boundary conditions are considered, one an insulated rigid inclusion and the other a rigid inclusion with fixed boundary temperature. The previous solutions of the thermal stress intensity factors for symmetrical airfoil and lip type rigid inclusions are obtained from the general solution of the thermal stress intensity factors.

1. 서 론

정상 온도 분포하에 있는 2차원 탄성체 내의 열 응력을 구하기 위한 연구들이 Bogdanoff⁽¹⁾, Florence와 Goodier⁽²⁾에 의해 행해졌다. 특히 Deresiewicz⁽³⁾는 균일 열유동하에 있고, 급수형태의 등각 사상함수로 표현되는 단열된 일반형태의 구멍에 대해 열전위개념과 Muskhelishvili⁽⁴⁾의 복소포텐셜함수관계식을 이용하여 복소포텐셜함수를 구한 바 있다. 이후 Sih⁽⁵⁾에 의해 Griffith균열 선단에서의 열응력세기계수(thermal stress intensity factor : TSIF)를 구하였다. 최근 Griffith균열에 대한 TSIF

결정에 관한 연구는 여러사람들⁽⁶⁻⁸⁾에 의해 보고된 바 있다. 또한 Lee등^(9,10)은 균일 열유동하에 있는 특수 형상의 커스프 균열 표면에 트랙션이 없거나 변위가 영으로 고정된 기계적 하중조건과 단열 또는 온도가 영으로 고정된 열경계조건을 가했을 때 열응력세기계수를 복소함수법에 의해 구하였다. 또한 그들은 경계요소법을 사용하여 유한체내 특수 형상의 커스프 균열표면이 단열되거나 온도가 영으로 고정되는 열경계조건과 트랙션이 없는 기계적 하중조건하에 있을때 열응력세기계수에 대한 수치해를 얻었다.⁽¹¹⁾

본 연구에서는 Lee등⁽¹⁰⁾의 연구를 일반화하기 위하여 급수 형태의 등각사상함수로 표현되는 일반형태의 커스프형 강체함유물이 존재하는 경우에 대하여 복소 포텐셜 함수와 TSIF에 대한 일반해를 구

*정회원, 연세대학교 기계공학과

**정회원, 연세대학교 기계공학과 대학원

하기로 한다.

2. 이론

Fig. 1에서 보는 바와 같이 ζ 복소평면상의 단위 원 Γ 와 그 외부영역 S^+ 는 다음의 Schwartz-Christoffel 변환⁽¹²⁾의 급수형태 등각사상함수 $z=W(\zeta)$ 에 의해서 z 복소평면상의 폐곡선 Γ' 와 그 외부영역 $S^{+'}$ 로 변환된다.

$$z=W(\zeta)=R\left(\zeta+\sum_{m=1}^n C_m \zeta^{-m}\right) \quad (1)$$

여기서 R 은 폐곡선 Γ' 의 위치를 결정하는 복소 상수이며, C_m 은 복소상수이고 $C_m \neq 0$ 이다.

2차원 정상온도상태에서의 x 와 y 방향의 변위 u 와 v 는 다음식으로 부터 구해진다.⁽¹⁾

$$2\mu(u+iv)=\kappa\Phi(\zeta)-\frac{W(\zeta)}{W'(\zeta)}\overline{\Phi'(\zeta)-\Psi(\zeta)}+2\mu g(\zeta) \quad (2)$$

여기서

$$g(\zeta)=\beta \int^{\zeta} \chi(\zeta) W'(\zeta) d\zeta \quad (3)$$

$$\beta=\begin{cases} (1+\nu)\alpha & \kappa=\begin{cases} 3-4\nu & (\text{평면 변형률 상태}) \\ 3-\nu & (\text{평면 응력 상태}) \end{cases} \end{cases} \quad (4)$$

α 는 열팽창계수, ν 는 프와송 비, μ 는 전단계수이고 $\Phi(\zeta)$ 와 $\Psi(\zeta)$ 는 Kolosov의 복소 포텐셜함수이며 $\kappa(\zeta)$ 는 복소 온도 포텐셜이다.

경계가 단열이거나 상대온도가 영으로 고정된 커프스 균열형 강제함유물을 내포한 무한체에 일정한 도구배 τ 를 갖는 균일 열유동이 x 축에 대해 각도 φ_0 로 무한대에서 오는 경우 ζ 평면에서 복소 온도 포텐셜 $\kappa(\zeta)$ 는 image method⁽¹³⁾에 의해서 다음식으로 쓸 수 있다.

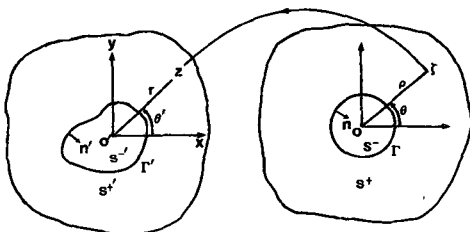


Fig. 1 Conformal mapping

$$\kappa(\zeta)=Q\left(\lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} W'(\zeta)\right)\zeta+\gamma\overline{Q}\left(\lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} \overline{W'(\zeta)}\right)\frac{1}{\zeta} \quad (5)$$

$$=R\left(Q\zeta+\frac{\gamma\overline{Q}}{\zeta}\right) \quad (6)$$

여기서 $Q=\tau \exp(-i\varphi)$ 이고 γ 는 열경계조건을 결정하는 변수로서 강제함유물 경계가 단열된 경우에는 $\gamma=1$ 이고 상대온도가 영인 경우에는 $\gamma=-1$ 이다.

강체함유물의 경계에서 단일해를 가져야하므로 복소포텐셜 $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ 는 $\zeta \rightarrow \infty$ 에서 다음식으로 표현된다.

$$\Phi(\zeta)=A \ln \zeta+\Phi^*(\zeta) \quad (7)$$

$$\Psi(\zeta)=B \ln \zeta+\Psi^*(\zeta) \quad (8)$$

여기서 A 와 B 는 결정하여야 할 복소상수들이고 $\Phi^*(\zeta)$ 와 $\Psi^*(\zeta)$ 는 S^+ 에서 정칙이어야 하므로 다음과 같이 Laurant 급수로 표현된다.

$$\Phi^*(\zeta)=\sum_{i=1}^{\infty} a_i \zeta^{-i} \quad (9)$$

$$\Psi^*(\zeta)=\sum_{i=1}^{\infty} b_i \zeta^{-i} \quad (10)$$

여기서 a_i 와 b_i 는 결정하여야 할 복소상수들이다.

Lee 등^(9,10)은 열전위를 이용하여 식(7), (8)의 상수 A 와 B 의 관계를 다음과 같이 규명하였다.

$$A=\overline{B}=-\frac{2\pi\beta R^2(\gamma\overline{Q}-C_1Q)}{\kappa+1} \quad (11)$$

강체 함유물의 경계 Γ 에서의 변위성분은 영이 되어야 하므로 식(2)로부터 다음식이 성립된다.

$$2\mu(u+iv)_r=\kappa\Phi(\sigma)-\frac{W(\sigma)}{W'(\sigma)}\overline{\Phi'(\sigma)}-\overline{\Psi(\sigma)}+2\mu g(\sigma)=0 \quad (\sigma=e^{i\theta}) \quad (12)$$

식(12)에 식(7), (8)을 대입하면 다음식을 얻는다.

$$\begin{aligned} &\kappa\Phi^*(\sigma)-\frac{W(\sigma)}{W'(\sigma)}\overline{\Phi^{*'}(\sigma)}-\overline{\Psi^*(\sigma)} \\ &-\frac{A\overline{\sigma}W(\sigma)}{W'(\sigma)}+2\mu\beta R^2\left[\frac{\sigma^2 Q}{2}\right. \\ &+Q\sum_{m=2}^n \frac{mC_m}{(m-1)\sigma^{m-1}} \\ &\left.+ \gamma\overline{Q}\sum_{m=1}^n \frac{mC_m}{(m+1)\sigma^{m+1}}\right]=0 \end{aligned} \quad (13)$$

식(13)의 양변에 $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$ 를 곱한후 Γ 상에서 반시계 방향으로 Cauchy 적분을 행하면 각 항들로부터 다음 식들을 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_r \frac{\kappa \Phi^*(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = -\kappa \Phi^*(\zeta) \quad (14)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_r \frac{W(\sigma)}{W'(\sigma)} \frac{\overline{\Phi^{*'}(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = \sum_{k=1}^{n-2} D_k \zeta^{-k} \quad (15)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_r \frac{\overline{\Psi^*(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = 0 \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \oint_r \frac{W(\sigma)}{W'(\sigma)} \frac{\overline{A\sigma}}{\sigma - \zeta} d\sigma \\ &= -\overline{A} \sum_{k=0}^{n-2} e_k \zeta^{-n+k+1} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \oint_r 2\mu\beta R^2 \left[\frac{\sigma^2 Q}{2} + Q \sum_{m=2}^n \frac{mC_m}{(m-1)\sigma^{m-1}} \right. \\ & \left. + \gamma \overline{Q} \sum_{m=1}^n \frac{mC_m}{(m+1)\sigma^{m+1}} \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) = & A \ln \zeta + \frac{1}{\kappa} \left[\overline{A} \sum_{k=0}^{n-2} e_k \zeta^{-n+k+1} - \sum_{k=1}^{n-2} D_k \zeta^{-k} \right] \\ & - \frac{2\mu\beta R^2}{\kappa} \left[Q \sum_{m=2}^n \frac{mC_m}{(m-1)\zeta^{m-1}} + \gamma \overline{Q} \sum_{m=1}^n \frac{mC_m}{(m+1)\zeta^{m+1}} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

식(21)과 식(7)를 계수비교하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$a_t = \begin{cases} \frac{\overline{A}e_{n-2} - D_1 - 4\mu\beta R^2 C_2 Q}{\kappa} & (t=1) \\ \frac{\overline{A}e_{n-t+1} - D_t - \frac{2\mu\beta R^2}{\kappa} \left[(t+1) \frac{QC_{t+1} - \gamma(t-1)\overline{Q}C_{t-1}}{t} \right]}{\kappa} & (t=2, \dots, (n-2)) \\ \frac{\overline{A}e_0 - \frac{2\mu\beta R^2}{\kappa} \left[(tQ C_t - \gamma(t-2)\overline{Q}C_{t-2}) \right]}{\kappa} & (t=n-1) \\ -\frac{2\mu\beta \gamma t R^2 \overline{Q} C_t}{\kappa t} & (t=n, n+1) \\ 0 & (t > n+1) \end{cases} \quad (22)$$

식(13)로부터 $\Psi(\zeta)$ 를 결정하기 위해 앞의 과정과 유사한 방법을 적용하면 다음식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \Psi(\zeta) = & \overline{A} \ln \zeta - A \left[\frac{\overline{W}(1/\zeta)}{\zeta W'(\zeta)} - \sum_{k=0}^{n-1} \overline{e}_k \zeta^{n-k-1} \right] \\ & - \frac{\overline{W}(1/\zeta) \Phi^{*'}(\zeta)}{W'(\zeta)} - \sum_{k=0}^{n-2} \overline{D}_k \zeta^k + \frac{\mu\beta R^2 \overline{Q}}{\zeta^2} \end{aligned} \quad (23)$$

만일 강체 함유물이 균열의 형상을 갖는 커스프모양이라면 위에서 구한 포텐셜을 이용하여 열응력세기계수를 구할 수 있다. 커스프 균열선단에서의 TSIF 결정식은 다음과 같다.

$$K = K_I - iK_{II} = 2\sqrt{\frac{\pi}{W''(\zeta_c)}} \Phi'(\zeta_c) e^{-i\lambda_c/2} \quad (24)$$

여기서 K_I 과 K_{II} 는 열림형과 전단형의 TSIF이며, ζ_c 는 균열 선단의 좌표이고 λ_c 는 x 축과 균열 선단이 이루는 각이다. 식(21)을 식(24)에 대입하면 다

$$\begin{aligned} &= -2\mu\beta R^2 \left[Q \sum_{m=2}^n \frac{mC_m}{(m-1)\zeta^{m-1}} \right. \\ & \left. + \gamma \overline{Q} \sum_{m=1}^n \frac{mC_m}{(m+1)\zeta^{m+1}} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

여기서

$$D_k = \sum_{m=1}^{n-k-1} (n-m-k) e_{m-1} \overline{a}_{n-m-k} \quad (19)$$

$$e_k = C_{n-k} + \sum_{p=1}^{k-2} p \overline{C}_p e_{n-p-1} \quad (20)$$

식(14)~(18)을 식(13)의 Cauchy 적분형태에 대입하면 다음식을 얻는다.

음과 같다.

$$\begin{aligned} K = & K_I - iK_{II} \\ = & 2\sqrt{\pi} e^{-i\lambda_c/2} \left[R \sum_{m=1}^n m(m+1) C_m \zeta_c^{-m-2} \right]^{-1/2} \\ & \left[-\frac{2\mu\beta R^2 (\gamma \overline{Q} - C_1 Q)}{(\kappa+1)\zeta_c} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\kappa} \left[-\frac{2\mu\beta R^2 (\gamma \overline{Q} - C_1 \overline{Q})}{\kappa+1} \sum_{k=0}^{n-2} \right. \right. \\ & \left. \left. (-n+k+1) e_k \zeta_c^{-n+k} + \sum_{k=1}^{n-2} k D_k \zeta_c^{-n+k} \right] \right. \\ & \left. + \frac{2\mu\beta R^2}{\kappa} \left[Q \sum_{m=2}^n m C_m \zeta_c^{-m} \right. \right. \\ & \left. \left. + \gamma \overline{Q} \sum_{m=1}^n m C_m \zeta_c^{-m-2} \right] \right] \end{aligned} \quad (25)$$

3. 검토

Fig. 2와 3의 대칭 입술형, 대칭 익형 강체함유

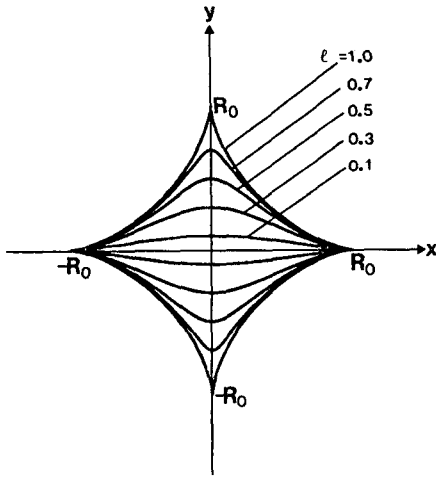


Fig. 2 Variation of configuration of symmetric lip cusp crack with configuration parameter l

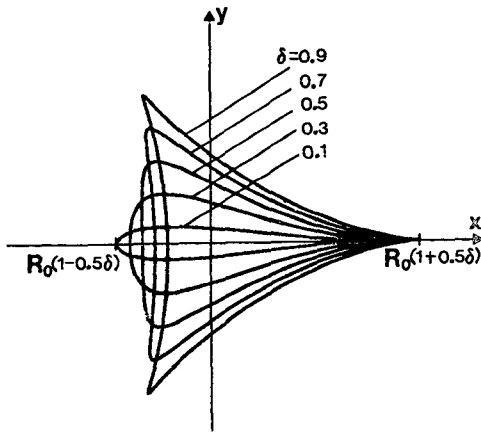


Fig. 3 Variation of configuration of symmetric airfoil type crack configuration parameter δ

물에 대한 등각사상함수⁽¹⁴⁾는 식(1)에서 복소상수 R 과 C_m 이 다음과 같은 경우이다.

$$R = \frac{R_0(l+2)}{4}, \quad C_1 = \frac{2(1-l)}{l+2},$$

$$C_2 = 0, \quad C_3 = \frac{l}{l+2}, \quad C_m = 0 \quad (m \geq 4)$$

$$(0 \leq l \leq 1) \quad (\text{입술형}) \quad (26)$$

$$R = \frac{R_0(1+\delta)}{2}, \quad C_1 = \frac{1-\delta}{1+\delta}, \quad C_2 = \frac{\delta}{1+\delta},$$

$$C_m = 0 \quad (m \geq 3) \quad (\text{익형}) \quad (27)$$

$$(0 \leq \delta < 1)$$

여기서 $2R_0$ 는 상당 균열 길이이며 l 과 δ 는 형상 계수이다.

식(26)과 (27)을 식(21)에 대입하면 대칭 입술형, 대칭 익형 강제합유물에 대한 다음의 복소포텐셜함수식을 구할 수 있다.

$$\Phi(\zeta) = A \ln \zeta + \frac{1}{\kappa \zeta^2} \left[\bar{A} C_3 - \mu \beta R^2 \right. \\ \left. (3 C_3 Q + \gamma C_1 \bar{Q}) - \frac{3 \mu \beta \gamma R^2 C_3 \bar{Q}}{2 \zeta^2} \right] \quad (\text{입술형}) \quad (28)$$

$$\Phi(\zeta) = A \ln \zeta + \frac{1}{\kappa \zeta} \left[C_2 (\bar{A} - 4 \mu \beta R^2 Q) \right. \\ \left. - \frac{\mu \beta \gamma R^2 C_1 \bar{Q}}{\zeta} - \frac{4 \mu \beta \gamma R^2 C_2 \bar{Q}}{3 \zeta^2} \right] \quad (\text{익형}) \quad (29)$$

식(26)과 (27)을 식(25)에 대입하여 ζ_c 과 λ_c 를 각각 1과 0으로 하면 다음과 같은 열응력세기계수식이 유도된다.

$$K_I = -4 \mu \beta \tau R^2 \sqrt{\frac{\pi}{2R(C_1 + 6C_3)}} \\ \left[\frac{(\kappa - 2C_3)(\gamma - C_1)}{\kappa(\kappa + 1)} + \frac{3(1 + \gamma)C_3 + \gamma C_1}{\kappa} \right] \\ \cos \varphi \quad (\text{입술형}) \quad (30)$$

$$K_{II} = 4 \mu \beta \tau R^2 \sqrt{\frac{\pi}{2R(C_1 + 6C_3)}} \\ \left[\frac{(\kappa + 2C_3)(\gamma - C_1)}{\kappa(\kappa + 1)} + \frac{3(1 - \gamma)C_3 - \gamma C_1}{\kappa} \right] \\ \sin \varphi \quad (\text{입술형}) \quad (31)$$

$$K_I = -4 \mu \beta \tau R^2 \sqrt{\frac{\pi}{2R(C_1 + 3C_2)}} \\ \left[\frac{(\kappa - C_1)(\gamma - C_1)}{\kappa(\kappa + 1)} + \frac{2(1 + \gamma)C_2 + \gamma C_1}{\kappa} \right] \\ \cos \varphi \quad (\text{익형}) \quad (32)$$

$$K_{II} = 4 \mu \beta \tau R^2 \sqrt{\frac{\pi}{2R(C_1 + 3C_2)}} \\ \left[\frac{(\kappa + C_1)(\gamma - C_1)}{\kappa(\kappa + 1)} + \frac{2(1 - \gamma)C_2 - \gamma C_1}{\kappa} \right] \\ \sin \varphi \quad (\text{익형}) \quad (33)$$

식(28) ~ (33)은 Lee등⁽¹⁰⁾의 결과와 일치한다.

4. 결론

균일 열 유동하에 있는 2차원 탄성체 내에 급수 형태의 등각사상함수로 표현되는 일반형상의 커스프 강제합유물이 존재하고 그 표면이 단열되었거나

상대온도가 영으로 고정된 경우에 열응력세기계수의 일반해를 구하였다. 커스프형 강체 균열에 대한 열응력세기계수의 일반해로부터 대칭익형과 대칭입술형 강체함유물의 열응력세기계수를 구하여 기존해와 일치함을 보였다.

참고문헌

- (1) Bogdanoff, J. L., 1984, "Note on Thermal Stresses," J. App. Mech., Vol.21, p. 88.
- (2) Florence, A.L. and Goodier, J.N., 1960, "Thermal Stress due to Disturbance of Uniform Heat Flow by an Insulated Ovaloid Hole," J. Appl. Mech., Vol.27, pp. 635~639
- (3) Deresiewicz, H., 1961, "Thermal Stress in a Plate due to Disturbance of Uniform Heat Flow by a Hole of General Shape," J. Appl. Mech., Vol.28, pp. 147~149.
- (4) Muskhelishvili, N. I., 1953, Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, 3rd ed., P. Noordhoff Ltd., Groningen, Holland.
- (5) Sih, G. C., 1962, "On the Singular character of Thermal Stresses near a Crack Tip," J. App. Mech., Vol.29, pp. 587~589.
- (6) Sekine, H., 1977, "Influence of an Insulated Circular Hole on Thermal Stress Singularities at Tips of a Crack," Int. J. Fracture, Vol. 13, pp. 133~149.
- (7) Sumi, N., 1980, "Thermal Stress Singularities at Tips of a Griffith Crack in a Finite Rectangular Plate," Nucl. Engng Design, Vol.60, pp. 389~394.
- (8) Lee, K.Y. and Advani, S.H., 1983, "Critical Loading Conditions and Stress Intensity Factors for Partial or Entire Closure of Griffith Crack under Thermo-Mechanical Loading," Int. J. Fracture., Vol.22, pp. 83~90.
- (9) Lee, K.Y. and Choi, H.S., 1988, "Determination of Thermal Stress Intensity Factors for Traction Free Cusp Cracks under Uniform Heat Flow," Engng Fracture Mech., Vol.31, pp. 661~672.
- (10) Lee, K.Y. and Choi, H.S., 1989, "Determination of Thermal Stress Intensity Factor for Rigid Cusp Cracks under Uniform Heat Flow," Engng Fracture Mech., Vol.32, pp. 183~193.
- (11) Lee, K.Y. and Cho, Y.H., 1990, "Determination of Thermal Stress Intensity Factors for Cusp Cracks by Boundary Element Method," Engng Fracture Mech., Vol.37, pp. 787~798.
- (12) Savin, G.N., 1961, Stress Concentration around Holes, Pergamon Press, London.
- (13) Carrier, G.F. and Krook, M. and Pearson, C. E., 1966, Functions of a Complex Variable, McGraw-Hill Book Company, New York.
- (14) Wu, C.H., 1982, "Unconventional Internal Cracks Part 2 : Method of Generating Simple Cracks," J. App. Mech., Vol. 49, pp. 383~388.