

(論 文)

## 공기층 저항을 고려한 사각형 주형내에서의 2차원 상변화문제에 관한 연구

여문수\* · 손병진\*\* · 김우승\*\*

(1992년 2월 8일 접수)

### A Study on the Two-Dimensional Phase Change Problem in a Rectangular Mold with Air-Gap Resistance to Heat Flow

Moon-Soo Yeo, Byung-Jin Son and Woo-Seung Kim

**Key Words :** Stefan Problem(상변화 문제), Solidification Rate(응고속도), Air-Gap Formation(공기층 형성), Mold/Casting Interface(주형/주물 접촉면), Thermal Resistance(열저항)

#### Abstract

The solidification rate is of special importance in determining the casting structures and properties. The heat transfer characteristics at the interface between the mold and the casting is one of the major factors that control the solidification rate. The thermal resistance exists due to the air-gap formation at the mold/casting interface during the freezing process. In this study two-dimensional Stefan problem with air-gap resistance in the rectangular mold is considered and the heat transfer characteristics is numerically examined by using the enthalpy method. The effects of the major parameters, such as mold geometry, thermal conductivity, heat transfer coefficient, and initial temperature of casting, on the thermal characteristics are investigated.

#### 기 호 설 명

<p><math>B_{icp}</math> : 무차원수 [= <math>hc\Delta x_p/k_m</math>]</p> <p><math>B_{icc}</math> : 무차원수 [= <math>hc\Delta x_p/k_c</math>]</p> <p><math>c</math> : 비열</p> <p><math>H</math> : 엔탈피</p> <p><math>h</math> : 열전달계수</p> <p><math>k</math> : 열전도계수</p> <p><math>L</math> : 잠열</p> <p><math>r_x</math> : <math>x</math>축의 주형, 주물 격자간격비 [= <math>\Delta x_2/\Delta x_1</math>]</p> <p><math>r_y</math> : <math>y</math>축의 주형, 주물 격자간격비 [= <math>\Delta y_2/\Delta y_1</math>]</p> <p><math>r_{pq}</math> : 무차원 격자간격비 [= <math>\Delta x_p/\Delta y_q</math>]</p>	<p><math>R_{rdp}</math> : 영역구분상수 [= <math>k_r/\rho_r \cdot \delta t / (\Delta x_p)^2</math>]</p> <p><math>t</math> : 시간</p> <p><math>T</math> : 온도</p> <p><math>T_{int}</math> : 주물의 초기온도</p> <p><math>T_f</math> : 주물의 용융온도</p> <p><math>\alpha</math> : 열확산계수 [= <math>k/\rho c</math>]</p> <p><math>\rho</math> : 밀도</p> <p><b>하첨자</b></p> <p><math>m</math> : 주형</p> <p><math>s</math> : 주물의 고상</p> <p><math>i</math> : 주물의 액상</p> <p><math>c</math> : 주물</p> <p><math>\infty</math> : 주위 유체</p>
---	--

\*정회원, 한양대학교 대학원

\*\*정회원, 한양대학교 기계공학과

### 1. 서 론

열을 흡수 또는 방출하면서 어느 한 상(phase)에서 다른 상으로 변화하는 열적 특성을 가지고 있는 상변화문제의 해석시 미지의 속도로 이동하는 상변화면의 위치도 해의 일부로서 결정되어야 하나, 이 경계면에서의 열평형 방정식은 수학적으로 비선형 경계조건식이므로 다양한 근사해법<sup>(1-2)</sup>과 수치해법<sup>(3-5)</sup>이 시도되어 왔다. 그리고 많은 경우에 있어 상변화가 어느 특정온도가 아닌 일정온도 범위에 걸쳐서 일어나는 경우인 2상영역(mushy zone)이 존재하는 상변화문제에 직면하고 있다. 따라서 상변화면의 추적뿐만 아니라 2상영역이 존재하는 상변화 문제를 보다 용이하게 해석하기 위하여 엔탈피법(enthalpy method)이 제안되었다. Meyer<sup>(6)</sup>는 상변화가 특정한 온도에서 일어나는 경우에 대하여 엔탈피법을 이용하여 유한차분법으로 해석하였고, Shamsundar와 Sparrow<sup>(7)</sup>는 2차원 상변화문제가 대류 경계조건을 갖는 경우에 대한 수치해를 구하였으며, Goodrich<sup>(8)</sup>는 열용량법을 이용하여 1차원 상변화문제를 수치해석하였다. Voller와 Cross는 2상영역이 존재하는 경우 엔탈피법을 이용하여 상변화면이 어느 한 격자점에서 다음 격자점으로 이동하는데 소요되는 시간을 계산<sup>(9)</sup>하였으며, 또한 온도가 일정한 경계조건을 갖는 원통좌표계에서 총응고에 소요되는 시간을 추정할 수 있는 근사식<sup>(10)</sup>을 제안하였다. Cao와 Chang<sup>(11)</sup>은 자연대류를 고려한 상변화문제에 대하여 엔탈피를 이용하여 유한차분법으로 해석하였으며, 이를 이동열원을 갖는 3차원문제로 확장하였다.

지금까지의 연구결과는 대부분 상변화 물질 자체 또는 주형을 고려한 경우에도 주형/주물접촉면을 완전접촉으로 가정하여 열적특성을 해석하였으나, 미시적인 측면에서 이 접촉면에서는 미세한 공기층의 형성으로 인하여 접촉열저항이 존재<sup>(12,13)</sup>하며, 최근에 원통형 주형내에서 이러한 접촉열저항을 고려한 1차원 상변화문제의 열적특성을 해석<sup>(14)</sup>하였다.

본 연구에서는 1차원 상변화문제를 확장하여 사각형 주형내에서의 접촉열저항을 고려한 2차원 상변화문제를 해석하고자 한다. 즉 고상/액상 경계면인 상변화면을 추적하기 위하여 온도수식법(temperature formulation method)을 적용시 나타나는

복잡성을 극복하기 위하여 제시된 엔탈피법을 이용하여 순수물질의 경우 뿐만 아니라 2상영역이 존재하는 합금에서의 온도분포, 상변화면의 이동속도 및 총응고에 소요되는 시간등의 열적특성을 해석하며, 또한 이러한 열적특성에 영향을 미치는 매개변수를 도출하고자 주형의 형상, 주형 외벽에서의 열전달계수, 접촉 열전달계수, 주형의 열전도계수 및 주물의 초기온도등의 변화에 따른 효과를 고찰한다.

### 2. 이론해석

#### 2.1 수학적 모형

본 연구에서는 두께가 일정한 주형내에서 주물이 최초로 용융온도 보다 높은 일정한 온도로 유지되었을 때 주형 외부로의 열방출에 따른 상변화문제를 해석하고자 한다. Fig. 1은 수학적 모형 및 좌표계를 나타내고 있으며, 여기서  $x=x_E$  및  $y=y_E$ 에서는 주형의 대칭성에 의하여 단열된 것으로 고려하였다.

본 연구의 해석을 위하여 도입된 가정은 다음과 같다.

- (1) 각 상에서의 물성치는 균일하다.
- (2) 액상에서의 대류열전달은 무시한다.
- (3) 사각형 주형의 끝단부에 의한 영향은 무시한다.
- (4) 주형표면에서의 열방출은 대류에 의해서 일어난다.

이상과 같은 가정하에서 해석하고자 하는 2차원

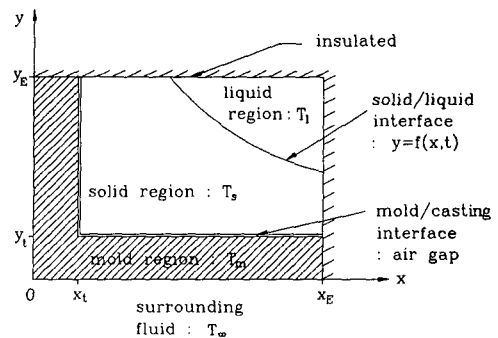


Fig. 1 Physical model

상변화문제의 지배방정식 및 경계/초기조건식은 다음과 같다.

● 지배방정식

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_i \frac{\partial T_i}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_i \frac{\partial T_i}{\partial y}\right) = \rho_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial t}, \quad t > 0$$

$$; i = m, s, l \quad (1)$$

● 주형/주물 접촉면 (mold/casting interface)

$$x = x_i \text{에서 } k_m \frac{\partial T_m}{\partial x} = k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} = h_c(t) [T_s - T_m]$$

$$y_i < y < y_E, \quad t > 0 \quad (2.a)$$

$$y = y_i \text{에서 } k_m \frac{\partial T_m}{\partial y} = k_s \frac{\partial T_s}{\partial y} = h_c(t) [T_s - T_m]$$

$$x_i < x < x_E, \quad t > 0 \quad (2.b)$$

● 주물의 고상/액상 경계면 (solid/liquid interface)<sup>(15)</sup>

$$y = f(x, t) \text{에서 } \rho_s L \frac{\partial f}{\partial t} = \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$\left(k_s \frac{\partial T_s}{\partial y} - k_l \frac{\partial T_l}{\partial y}\right) \quad (3.a)$$

$$T_s = T_l = T_f \quad (3.b)$$

● 경계조건식

$$x = 0 \text{에서 } k_m \frac{\partial T_m}{\partial x} = h_\infty (T_m - T_\infty), \quad t > 0 \quad (4.a)$$

$$y = 0 \text{에서 } k_m \frac{\partial T_m}{\partial y} = h_\infty (T_m - T_\infty), \quad t > 0 \quad (4.b)$$

$$x = x_E \text{에서 } \frac{\partial T_l}{\partial x} = 0, \quad t > 0 \quad (4.c)$$

$$y = y_E \text{에서 } \frac{\partial T_l}{\partial y} = 0, \quad t > 0 \quad (4.d)$$

● 초기조건식

$$t = 0 \text{에서 } T_m = T_\infty \quad (5.a)$$

$$T_l = T_{ini} \quad (5.b)$$

2.2 엔탈피법

2.1절에서 수식화한 상변화문제의 해석시 상변화면에서의 에너지 방정식이 비선형식이므로 이를 이용하여 상변화면을 추적하는 것은 매우 복잡한 계산절차를 요구한다. 따라서 많은 문헌들은 이러한 경계면을 보다 용이하게 추적할 수 있는 수치해법을 제시하여 왔으며, 이러한 어려움을 극복하는 한 가지 방법으로서 현열(sensible heat)과 잠열(latent heat)의 합으로 표현되는 엔탈피를 이용하여 수식화하는 엔탈피법을 활용하고 있으며 온도와 엔탈피의 관계식<sup>(9)</sup>은 다음과 같다.

$$H = \begin{cases} cT & , T < T_f \\ cT < H < cT + L & , T = T_f \\ cT + L & , T > T_f \end{cases} \quad (6)$$

순수물질의 경우에는 어느 특정온도에서 상변화가 일어나나, 합금의 경우는 일정 온도범위에서 상변화가 일어난다. 즉 응고는 액상온도(liquidus temp.)에서 시작되어 고상온도(solidus temp.)에서 완료되며, 이러한 온도 범위내에서는 고상과 액상의 2상영역(mushy zone)이 공존한다. 따라서 이러한 경우의 엔탈피를 온도의 함수로 표현<sup>(9)</sup>하면 다음과 같다.

$$H = \begin{cases} cT & , T \leq T_f - \varepsilon \\ cT + L(T - T_f + \varepsilon)/2\varepsilon & , T_f - \varepsilon < T \leq T_f + \varepsilon \\ cT + L & , T > T_f + \varepsilon \end{cases} \quad (7)$$

여기서  $T_f$ 는 고상온도와 액상온도의 중심으로 표현하였으며,  $2\varepsilon$ 은 2상영역에서의 온도범위이다. 따라서  $T_f + \varepsilon$ 은 액상온도를  $T_f - \varepsilon$ 은 고상온도를 의미한다. 에너지방정식(식1) 및 주물의 고상/액상 경계면에서의 조건식(식3)은 엔탈피를 이용하여 표현하면 다음과 같이 1개의 방정식으로 표현<sup>(9)</sup>될 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_i \frac{\partial T_i}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_i \frac{\partial T_i}{\partial y}\right) = \rho_i \frac{\partial H_i}{\partial t}, \quad t > 0$$

$$; i = m, c \quad (8)$$

2.3 수치해석

(1) 유한차분법

본 연구에서 적용된 문제를 해석하기 위하여 유한차분법을 이용하고자 주형은  $N-1$  등분, 주물의  $x$ 축은  $M-N-1$  등분, 그리고 주물의  $y$ 축은  $L-N-1$  등분하였으며, Fig. 2와 같이 각 격자점을 표시하였다.

여기서 격자점  $i=N$ 과  $i=N+1$ 은 해석의 편의를 위하여 구분하였으나 실제로는 주형/주물 접촉면에서 형성된 공기층은 매우 미세하므로  $x$ 좌표계에서 거의 동일한 위치에 있다고 가정하여도 무방하다. 따라서 주형에서의 온도인  $T_{N,j}$ 와  $T_{N+1,j}$  ( $j=1 \sim N$ )는 동일한 온도를 갖게 되나, 주형/주물접촉면에서의 온도인  $T_{N,j}$ 와  $T_{N+1,j}$  ( $j=N+1 \sim L$ )는 접촉열저항에 의하여 온도구배가 존재하며, 이는  $y$ 축에 대해서도 동일하게 적용된다. 그리고 수식의 편의를 위하여 Fig. 3과 같이 4개의 영역으로 구분

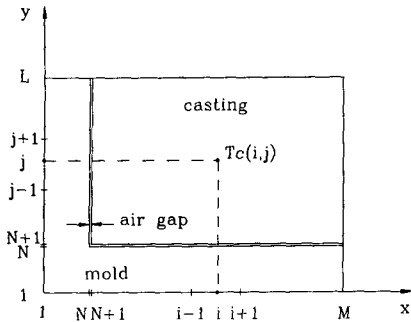


Fig. 2 Notation for discretization

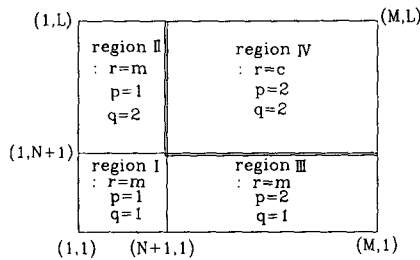


Fig. 3 Notation of subscripts p,q and r for each region

하였으며, 이를 하첨자 p,q 및 r로 표시하였다.

이상과 같이 표현된 부호를 활용하여 시간의 증대에 따른 엔탈피의 변화를 유한차분화한 식은 다음과 같다. 이때 주형 외벽 및 중심에서의 경계조건식은 일반적인 유한차분법을 적용하였고, 주형/주물 접촉면에서의 유한차분식은 x축 및 y축 방향에 대하여 각각 동일한 방법이 적용가능하므로 y=y<sub>i</sub>에서의 유한차분식만을 표기하였다.

● 지배방정식

$$\Delta H_{i,j} = R\tau\lambda\rho [T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + r_{pq}^2 (T_{i,j-1} + T_{i,j+1}) - 2(1+r_{pq}^2) T_{i,j}] \quad (9)$$

여기서 주형과 주물의 불완전접촉에 따라 생성된 주형에서의 격자점 N과 N+1은 실제로 거의 동일한 위치의 격자점이므로 동일한 온도로 고려할 수 있다. 따라서 이를 적용하여 유한차분화한 식은 다음과 같다.

$$\Delta H_{N+1,j} = Rm\lambda_l \left[ \frac{2}{1+r_x} T_{N-1,j} + r_{11}^2 T_{N+1,j-1} + \frac{2}{r_x(1+r_x)} T_{N+2,j} + r_{11}^2 T_{N+1,j+1} - 2 \left( r_{11}^2 + \frac{1}{1+r_x} + \frac{1}{r_x(1+r_x)} \right) T_{N+1,j} \right] \quad (10.a)$$

$$T_{N,j} = T_{N+1,j} \quad (10.b) \\ ; 2 \leq j \leq N-1$$

● 주형/주물 접촉면 (주형측)

$$\Delta H_{i,N} = Rm\lambda_2 [2r_{21}^2 T_{i,N-1} + T_{i-1,N} + T_{i+1,N} + 2r_{21} B_{ic2} T_{i,N+1} - 2(r_{21}^2 + 1 + r_{21} B_{ic2}) T_{i,N}] ; N+2 \leq i \leq M \quad (11.a)$$

격자점 i=M에서의 유한차분식은 대칭성에 의하여 T<sub>M+1,N</sub>에 T<sub>M-1,N</sub>을 대입하여 구할 수 있다. 또한 공기층으로 인하여 생성된 격자점 N 및 N+1에서의 유한차분식은 주형의 지배방정식과 같은 방법으로 구할 수 있으며 이는 다음과 같다.

$$\Delta H_{N,N} = Rm\lambda_1 \frac{2}{1+r_x+r_y} [(1+r_x) r_{11}^2 T_{N,N-1} + (1+r_y) T_{N-1,N} + \frac{r_{11}^2}{r_y} T_{N,N+2} + \frac{1}{r_x} T_{N+2,N} + B_{ic1} (r_{21} + r_y) T_{N+1,N+1} - \{(1+r_x) r_{11}^2 + (1+r_y) + \frac{r_{11}^2}{r_y} + \frac{1}{r_x} + B_{ic1} (r_{21} + r_y)\} T_{N,N}] \quad (11.b)$$

$$T_{N+1,N} = T_{N,N} \quad (11.c)$$

(주물측)

$$\Delta H_{i,N+1} = R_c\lambda_2 [T_{i-1,N+1} + 2r_{22} B_{ic2} T_{i,N} + 2r_{22}^2 T_{i,N+2} + T_{i+1,N+1} - 2(r_{22}^2 + 1 + r_{22} B_{ic2}) T_{i,N+1}] ; N+2 \leq i \leq M \quad (12.a)$$

격자점 i=M에서는 주형측과 동일한 방법으로 유한차분식을 구하며, 격자점 i=N+1에서는 다음과 같다.

$$\Delta H_{N+1,N+1} = R_c\lambda_2 [B_{ic2} (1+r_{22}) (T_{N,N+1} + T_{N+1,N}) + 2T_{N+2,N+1} + 2r_{22}^2 T_{N+1,N+2} - 2\{B_{ic2} (1+r_{22}) + 1 + r_{22}^2\} T_{N+1,N+1}] \quad (12.b)$$

(2) 엔탈피 방정식의 수치해석

온도는 식(6) 또는 (7)을 이용하여 다음과 같이 엔탈피의 함수로 표현할 수 있다.

$$T = F^*(H) \quad (13)$$

주형/주물 각영역에서의 유한차분식을 수학적으로 간단하게 표기하기 위하여 식 (14)와 같이 행렬 형태로 나타내었으며, implicit scheme을 이용하여 수치해석<sup>(9)</sup> 하였다.

$$H^{k+1} = H^k + (1-\theta) \delta t F(H^k) + \theta \delta t F(H^{k+1})$$

$$, 0 \leq \theta \leq 1 \quad (14)$$

여기서  $H$ 는 각 격자점에서의 엔탈피인  $H_{i,j}$ 를 요소로 갖는 벡터이며,  $F$ 는 비선형 함수로서 이의 요소를 표현하면 다음과 같다.

$$F_{i,j}(H) = R_r [W_{i,j} F^*(H_{i,j}) + E_{i,j} F^*(H_{i+1,j})$$

$$+ S_{i,j} F^*(H_{i,j-1}) + N_{i,j} F^*(H_{i,j+1})$$

$$- C_{i,j} F^*(H_{i,j}) + EN_{i,j} + B_{i,j}] \quad (15)$$

유한차분식을 행렬 형태로 나타낸 식(14)는 비선형 방정식이므로 해를 구하기 위하여 반복법을 적용하였다.  $(k+1)$ 번째 시간증분의 엔탈피는 이전 시간 단계에서의 값을 최초 예측치로 하였으며, 이를 이용하여  $m$ 번 반복하여 계산된 엔탈피는 다음과 같다.

$$H_m^{k+1} = H_0^{k+1} + \sum_{i=0}^{m-1} C_i \quad (16)$$

여기서  $C_i$ 는 엔탈피의 수정값으로서 식(17)과 같으며,  $C_i$ 가 주어진 수렴조건을 만족할 때까지 반복, 합산하여 시간증분에 따른 엔탈피를 구할 수 있다.

$$C_e = \frac{w [H^k + (1-\theta) \delta t F(H^k) - H_1^{k+1} + \theta \delta t F(H_1^{k+1})]}{1 - J_{11}} \quad (17)$$

여기서  $w$ 는 이완계수(relaxation factor)이며  $J_{11}$ 은 Jacobian 행렬로서 이의 성분은 다음과 같다.

$$J_{11} = \theta \delta t \frac{\partial F_1}{\partial H_1} \Big|_H = H_1^{k+1} \quad (18)$$

이상과 같이 계산된 엔탈피는 식(13)에 의하여 각 격자점에서의 온도를 구할 수 있으며, 또한 이를 이용하여 주형 외벽에서 대류에 의해 방출되는 열유속  $Q_b$  및 주형/주물 접촉면에서의 열유속  $Q_c$ 를 구하면 다음과 같다.

$$Q_b = h_\infty \left[ \sum_{i=1}^M (T_{i,1} - T_\infty) N_a \Delta x_p + \sum_{j=1}^L (T_{1,j} - T_\infty) N_a \Delta y_q \right] \quad (19.a)$$

$$Q_c = h_c(t) \left[ \sum_{i=N+1}^M (T_{i,N+1} - T_{i,N}) N_a \Delta x_p \right.$$

$$\left. + \sum_{j=N+1}^L (T_{N+1,j} - T_{N,j}) N_a \Delta y_q \right] \quad (19.b)$$

여기서  $N_a$ 는  $\Sigma$ 의 양끝 격자점에서는 0.5이고 그

밖의 격자점에서는 1.0이다.

본 연구에서 적용한 수치해석 방법은 주형 및 주물의 각 영역에서 일정한 격자 간격을 갖도록 하는 고정격자법(fixed grid method)이며, 주물의 중심 축인  $x=x_E$ 를 기준으로 하여  $y$ 축 방향으로 응고가 진전되는 데 소요되는 시간, 즉 고상/액상 경계면이 어느 한 격자점에서 다음 격자점으로 이동되는 데 소요되는 시간을 계산하는 것이다.

일반적으로 격자점  $j$ 요소내에서의 엔탈피는 고상 및 액상의 합으로서 식(20)과 같다. 따라서 응고가 진전되어 고상/액상 경계면이 새로운 격자점에 도달하는 것은 이 요소내에서의 고상열인  $f_s$ 가 0.5임을 의미하며, 이를 대입하면  $cT_j + L/2$ 이다. 또한 이 조건은 2상영역이 존재하는 경우에서도 같은 방법으로 적용할 수 있으며, 이는 식(7)에  $T=T_j$ 를 대입함으로써 확인할 수 있다.

$$H_j = H_s + H_l$$

$$= f_s (cT_j) + (1-f_s) (cT_j + L) \quad (20)$$

따라서 격자점  $j$ 에서의 엔탈피가 시간단계  $k$ 에서는  $cT_j + L/2$ 보다 크고, 시간단계  $k+1$ 에서는  $cT_j + L/2$ 보다 작을 경우에 고상/액상 경계면은 시간증분  $\delta t$ 동안 격자점  $j$ 를 통과한다. 이때 엔탈피가 미소 시간증분  $\delta t$ 동안 시간에 따라 선형적으로 변한다고 가정하고  $j$  격자점에서의 엔탈피가  $cT_j + L/2$ 이 되도록 하기 위하여  $m+1$ 번째로 반복 계산된 시간증분은 다음과 같다.

$$\delta t^{(m+1)} = \delta t^{(m)} + w^* [\delta C^{(m)} - \delta t^{(m)}] \quad (21)$$

여기서  $w^*$ 는 이완계수이고, 새로운 시간증분  $\delta C^{(m)}$ 은 다음과 같다.

$$\delta C^{(m)} = \frac{H^{k\delta t} + \delta t^{(m)} - H^{k\delta t}}{(cT_j + L/2) - H^{k\delta t}} \quad (22)$$

### 3. 계산결과 및 고찰

#### 3.1 해의 타당성 고찰

주형/주물 접촉면에서의 접촉열저항을 고려한 2차원 상변화 문제의 해석결과 해의 타당성을 시험하기 위하여 기발표된 문헌과 비교하고자 한다. 즉 주형/주물 접촉면에서의 열전달계수인  $h_c(t)$  값을 매우 크게 입력( $10^5 \text{ W/m}^2\text{C}$ )시켜 완전 접촉조건으로 고려하였으며, 주형의 열전도계수인  $k_m$  값도 매우 크게 입력( $10^5 \text{ W/mC}$ )시켜 초전도물질로 가상

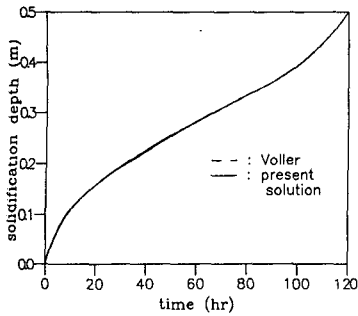


Fig. 4 Comparison result of time required for solidification along the symmetric axis

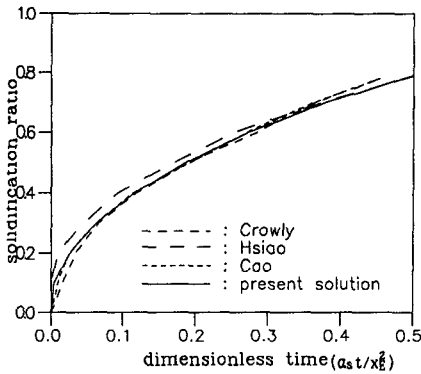


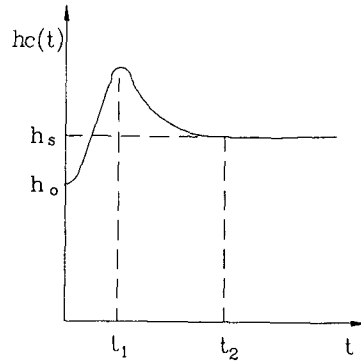
Fig. 5 Comparison result of time required for solidification along the diagonal

하였다. 또한 비교문헌의 경계조건이 등온 경계조건이므로 주형 표면에서의 열전달계수  $h_{\infty}$ 를 매우 크게 입력 ( $10^7 \text{ W/m}^2\text{C}$ )시켜 등온경계조건을 갖는 경우로 고려하였다. 이를 이용하여 계산한 결과 주물/주형 접촉면에서 주물의 온도는 등온경계온도를 유지하였으므로 이는 주형을 무시한 등온경계조건의 상변화 문제와 동일한 문제로 고려할 수 있다.

Fig. 4는 고상/액상 경계면이 주물의 대칭축을 따라 중심으로 이동하여 응고가 완료되는데 소요되는 시간을 Voller등<sup>(9)</sup>의 연구결과와 비교한 것이며, Fig. 5는 고상/액상 경계면이 주물의 대각선을 따라 중심으로 이동하여 응고가 완료되는데 소요되는 시간을 Cao<sup>(11)</sup>등의 연구결과와 비교한 것이다. 여기서 알 수 있듯이 본 연구에서 적용한 수치해석 방법을 시험한 결과 기존의 연구결과와 잘 일치함을 알 수 있다.

3.2 수치계산

주형/주물접촉면에서는 미시적으로 불완전접촉에



$$hc(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3, \quad t \leq t_2$$

$$= h_s, \quad t > t_2$$

Fig. 6 Variation of heat transfer coefficient  $h_c(t)$  with time

따라 접촉열저항이 존재하며, 이의 정도를 나타내기 위한 접촉 열전달계수  $h_c$ 는 최초 주물이 주형에 밀착함으로써 점차 증가하여 최대치에 달하며, 응고가 계속 진행됨에 따라 고상의 수축으로 인하여 주형/주물접촉면에서의 공기층이 확장됨으로써 점차 감소되어 어느시간 후 일정한 값으로 유지되므로 Kim등<sup>(13)</sup>의 연구결과를 활용하여 Fig. 6과 같이 시간에 대한 3차 다항식으로 표현하였다. 이때 계수  $A, B, C, D$ 는 접촉 열전달계수를 결정하는 매개변수인  $h_0, h_s, t_1$  및  $t_2$ 를 이용하여 구할 수 있다. 이를 활용하여 주물의 응고특성을 수치해석한 결과는 다음과 같다.

(1) 순 물질(pure material)의 상변화 문제

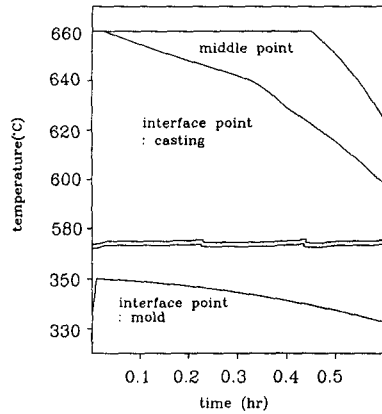
상변화 물질이 순수하게 단일물질로 구성되어 있는 경우, 용융 및 응고현상은 어느 특정한 온도에서 일어나기 때문에 고상 및 액상은 명확하게 구분된 경계면을 갖게된다. 본 연구에서 적용한 엔탈피법을 이용하여 수치계산하기 위한 입력자료는 Table 1과 같이 등으로 된 주형에 알루미늄을 주조하는 경우를 고려하였으며, 여기서  $h_0, h_s, t_1$  및  $t_2$ 는 접촉열전달계수를 결정하는 매개변수이다.

Fig. 7은 시간의 변화에 따른 고상/액상 경계면의 위치를 나타낸 것이다. 최초에는 고상/액상 경계면이  $x$ 축 및  $y$ 축에 평행하게 진전되나, 응고가 진전될수록 초기에 나타났던 주형형상의 영향이 감소되어 점차 원형형상을 갖게됨을 알 수 있다.

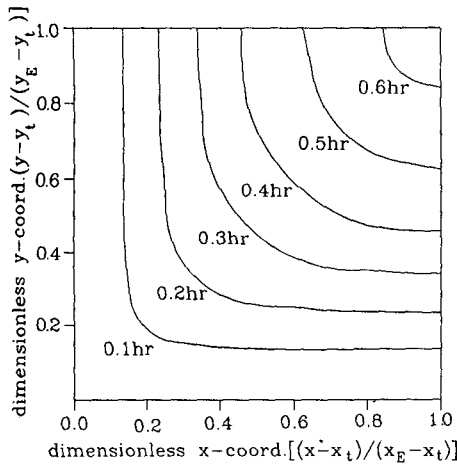
Fig. 8은 주형/주물 접촉면에서 주형측 및 주물

**Table 1** Physical quantities and parameters characterizing  $h_c(t)$

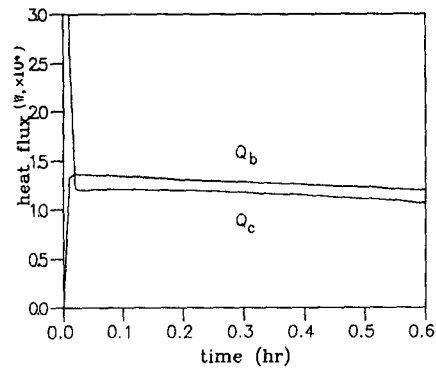
$k_m$	388 W/m°C	$y_t$	0.005 m
$k_l, k_s$	213 W/m°C	$x_E$	0.205 m
$C_m$	403 J/kg°C	$y_E$	0.205 m
$C_l, C_s$	1210 J/kg°C	$h^\infty$	200 W/m <sup>2</sup> °C
$\rho_m$	8940 kg/m <sup>3</sup>	$T^\infty$	20°C
$\rho_l, \rho_s$	2700 kg/m <sup>3</sup>	$h_0$	50 W/m <sup>2</sup> °C
$L$	$4.02 \times 10^5$ J/kg	$h_s$	200 W/m <sup>2</sup> °C
$T_f$	660°C	$t_1$	20 sec
$x_t$	0.005 m	$t_2$	55 sec



**Fig. 8** Temperature history at the given node



**Fig. 7** Movement of solid/liquid interface with time



**Fig. 9** Comparison of heat flux with time

측과 주물 중간위치에서의 온도 변화를 계산한 결과이다. 응고초기에는 주형이 고온의 주물과 접촉함으로써 온도가 급속히 증대되어 최대치에 이른 후 0.03시간 이후부터 서서히 감소한다. 이와 같이 응고초기에 주형의 현열이 증대되는 것은 주물의 응고속도를 증진시키는 요인으로 작용한다. 주형/주물접촉면에서 주물측의 온도는 최초 0.02시간까지 잠열의 방출로 인하여 용융온도를 유지한뒤 서서히 감소하며, 주물의 중간점에서의 온도는 초기 온도를 계속 유지한뒤 약 0.45시간 이후 상변화면이 이 위치에 도달한 이후부터 온도가 점진적으로 감소함을 알 수 있다.

Fig. 9는 주형외벽에서 방출되는 열유속  $Q_b$ 와 주형/주물접촉면에서 전달되는 열유속  $Q_c$ 를 계산한 결과이다. 초기에는 주형/주물접촉면에서 전달된

열유속은 주형 외벽을 통하여 열이 방출될 뿐만 아니라 주형의 현열을 증대시킨다. 따라서 주형/주물접촉면에서의 열유속은 초기에는 주형외벽에서의 열유속에 비하여 크나, Fig. 8과 같이 어느 시간 후 주형의 온도는 서서히 저하되고 이에 따라 감소된 현열과 주물에서 전달된 열유속은 주형외벽에서 주위유체로 방출되므로 주형/주물접촉면에서의 열유속은 주형 외벽에서의 열유속보다 작게 된다.

지금까지의 계산결과를 기준으로 하여 주형/주물접촉면에서의 접촉열저항을 고려한 상변화 문제의 열적 특성에 영향을 미치는 주요 매개변수의 효과를 살펴보면 다음과 같다.

동일한 양의 상변화 물질을 응고시키는 경우, 주형의 한쪽면을 10%, 20%, 30% 증대시키고 다른 면은 이에 대응토록 감소시켰을 때 Fig. 10은 주물

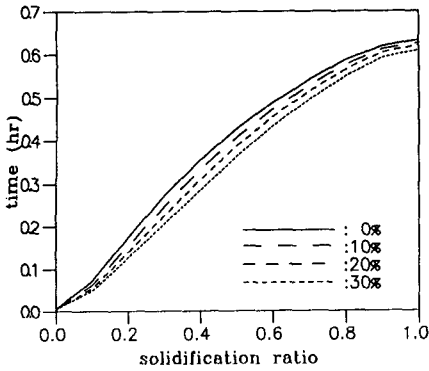


Fig. 10 Comparison of time required for solidification with the variation of mold configuration

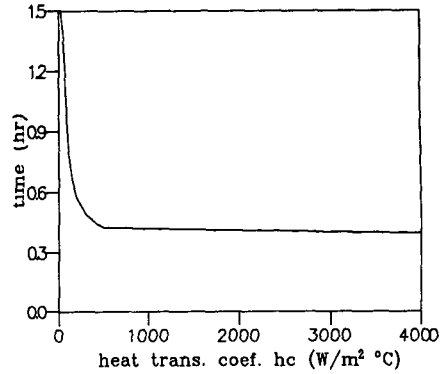


Fig. 11 Time required for total freezing with the variation of  $h_c$

Table 2 Effect of the variation of mold configuration to heat transfer area and total freezing time

Variation ratio	heat transfer area		total freezing time	
	Area	% Change	Time	% Change
0%	0.410 m <sup>2</sup>	—	0.632 hr	—
10%	0.412 m <sup>2</sup>	+0.5%	0.625 hr	-1.1%
20%	0.417 m <sup>2</sup>	+1.7%	0.620 hr	-1.9%
30%	0.424 m <sup>2</sup>	+3.4%	0.609 hr	-3.6%

의 응고특성을 계산한 결과이고 Table 2는 주형외벽에서의 전열면적과 총응고에 소요된 시간을 계산한 결과이다.

여기서 알 수 있듯이 주형의 형상에 관계없이 초기에는 응고가 빠르게 진행된 후 서서히 유사한 응고특성을 갖게되며, 주형의 중심부에 도달하게 되면 상변화면의 감소에 따라 방출되는 잠열이 작아지기 때문에 응고속도가 다시 증대하게 되는 일반적인 특성을 갖고있다. 그러나 주형 한쪽면의 증대에 따라 Table 2와 같이 주형 외벽에서의 전열면적이 증대되므로 총응고에 소요되는 시간은 다소 감소하나, 전반적으로 거의 유사한 응고특성을 갖고 있으며 이의 차이는 4% 이내이다.

Fig. 11은 주형/주물 접촉면에서의 접촉 열전달 계수인  $h_c$ 의 변화에 따라 총응고에 소요되는 시간을 계산한 결과이다. 총응고에 소요되는 시간은 접촉 열전달계수의 증대에 따라 초기에는 급속히 감소하나, 약 500 W/m<sup>2</sup>°C 이후에는 거의 유사한 응고특성을 나타낸다. 따라서 주형/주물접촉면에서의

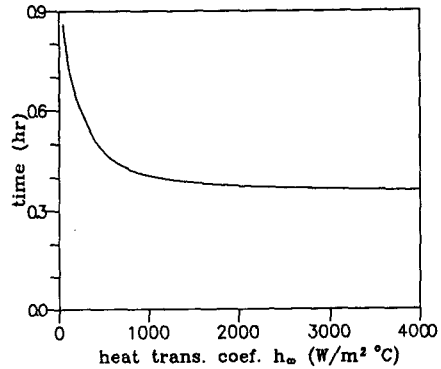


Fig. 12 time required for total freezing with the variation of  $h_{\infty}$

열전달계수인  $h_c$ 가 증대됨에 따라 완전접촉조건에 수렴하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 12는 주형 외벽에서 대류 열전달에 의해 냉각되는 경우, 대류 열전달계수의 변화에 따라 총응고에 소요되는 시간을 계산한 결과이다. 총응고에 소요되는 시간은 대류 열전달 계수의 증대에 따라 초기에는 급속히 감소하나 약 1,000 W/m<sup>2</sup>°C 이상의 경우에는 거의 유사한 응고특성을 나타내고 있다. 따라서 주형 외벽에서의 대류열전달계수가 증대됨에 따라 등온 경계조건에 수렴하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 13은 주형의 초기온도와 주위유체간 및 주물의 초기온도와 용융온도간의 온도차에 따라 총응고에 소요되는 시간을 계산한 결과이다. 일반적으로 주형 및 주물의 초기온도가 증가하면 이에 비례해서 현열이 증대되므로 총응고에 소요되는 시간은 증대되나, 주형의 두께는 매우 얇으므로 주형/주물



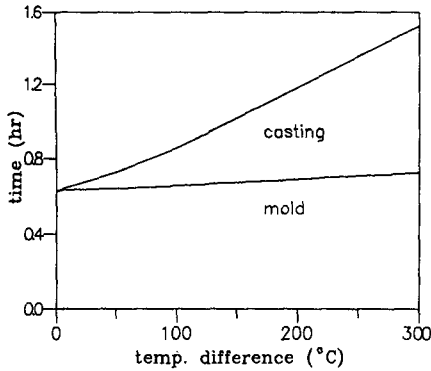


Fig. 13 Comparison of time required for total freezing with the variation of initial temperature difference

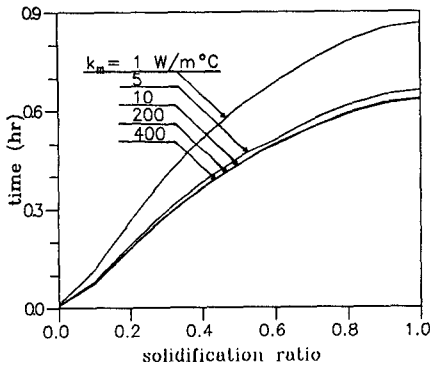


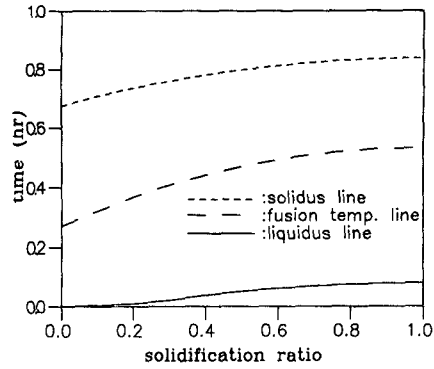
Fig. 14 Comparison of time required for solidification with the variation of thermal conductivity of mold

전체의 열용량에 비해 현열의 변화가 작으므로 주물의 응고특성에 미치는 영향은 작다. 그러나 주물의 경우는 초기온도 변화에 따라 전체의 열용량 대비 현열의 변화가 크므로 이에 따른 주물의 응고특성에 미치는 영향은 무시할 수 없으며, 이의 증대율은 약 8~9 sec/°C이다.

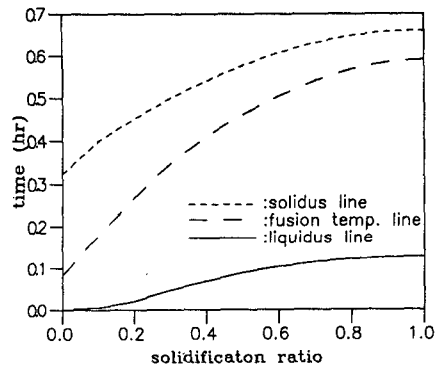
Fig. 14는 주형 열전도계수인  $k_m$ 의 변화에 따른 주물의 응고특성을 계산한 결과이다. 여기서 알 수 있듯이 열전도계수의 증가에 따라 총응고에 소요되는 시간은 다소 감소하나 주형의 열전도계수가 약 10W/m°C 이상이면 거의 유사한 응고특성을 나타내고 있으며 이의 차이는 5% 이내이다.

(2) 2상영역 (mushy zone)이 존재하는 경우의 상변화 문제

일반적으로 순수금속의 상변화는 어느 특정온도



(a)



(b)

Fig. 15 (a) Time required for movement of mushy zone in the case of AL 5083 (liquidus temp. ; 633.9°C, solidus temp. ; 557.8°C)  
(b) Time required for movement of mushy zone in the case of AL1100 (liquidus temp. ; 658.3°C, solidus temp. ; 633.9°C)

에서 일어나나 합금의 경우는 일정 온도범위내에서 일어난다. 즉 응고는 액상온도에서 시작되어 고상온도에서 완료되며, 이러한 온도범위내에서는 고상과 액상이 공존한다. 이와 같이 2상영역이 존재하는 경우 상변화 문제를 해석하고자 순수물질의 상변화 문제 해석시 적용한 Table 1의 입력자료를 이용, 최초 액상온도보다 10°C 높은 일정한 온도로 유지되어 있는 알루미늄 합금을 주조하는 경우를 고려하였다.

Fig. 15(a)는 A15083, Fig. 15(b)는 A11100에 대하여 액상면(liquidus line), 용융 온도면(fusion temp. line) 및 고상면(solidus line)을 수치계산한 결과이며, 이때 용융온도면은 고상과 액상온도의 중간값을 취한 것으로서 전반적인 응고특성을 고찰할 수 있는 자료로 활용 가능하리라 판단된다. 여

기서 알 수 있듯이 응고가 시작된 이후 액상면은 이동하기 시작하나, 용융온도면 및 고상면은 어느 시간 경과후 주형중심으로 이동한다. 이는 액상면은 가지고 있는 현열이 방출되어 액상온도에 다다르면 이동하게 되나, 용융온도면 및 고상면은 가지고 있는 현열과 잠열이 모두 방출되어야 하므로 주형중심으로 이동하기 위해 초기에 많은 시간을 요하며 경계면의 이동속도도 느리다. 또한 A15083이 A11100에 비해 2상 영역의 온도범위가 넓으므로 고상면과 액상면의 이동속도 차가 크게 나타나고 있음을 알 수 있다.

또한 2상영역이 존재하는 경우, 이의 응고특성에 영향을 미치는 주요 매개변수는 순수물질의 경우와 같이 접촉열전달계수 및 주형 외벽에서의 열전달계수이고, 이들의 변화에 따른 응고특성을 도출한 결과 순수물질의 경우와 유사한 특성을 나타내었다.

#### 4. 결론

본 연구에서 적용한 알고리즘은 엔탈피법을 이용하여 주형/주물 접촉면에서의 접촉열저항을 고려한 2차원 상변화 문제의 열적특성을 온도수식법에 비해 보다 용이하게 해석할 수 있었으며, 또한 순수물질 뿐만 아니라 2상영역이 존재하는 상변화문제에 대해서도 적용 가능하였다. 그리고 매개변수의 변화에 따른 주물의 응고특성을 고찰한 결과, 주요 매개변수는 주형/주물 접촉면에서의 접촉 열전달계수 및 주형 외벽에서의 대류열전달계수이며, 이의 증대에 따라 총응고에 소요되는 시간은 초기에는 급속히 감소하나 서서히 일정한 값으로 접근되어 완전 접촉조건 및 등온경계조건의 경우로 수렴한다.

#### 후 기

이 논문은 1991년 문교부 지원 한국학술진흥재단의 자유공보과제 학술연구 조성비에 의하여 이루어졌으며, 동 재단의 관계 제위께 감사의 뜻을 표한다.

#### 참고문헌

(1) Goodman, T.R., 1958, "The Heat-Balance Integral and Its Application to Problem Involving a

Change of Phase, Trans. of ASME, Vol.80, pp. 335~342.

(2) Poots, G., 1962, "On the Application of Integral Methods to the Solution of Problems Involving the Solidification of Liquids Initially at Fusion Temperature," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 5, pp. 525~531.

(3) Murray, W.D. and Landis, F., 1959, "Numerical and Machine Solutions of Transient Heat-Conduction Problems Involving Melting or Freezing. Part I: Method of Analysis and Sample Solutions," J. of Heat Transfer, Vol. 81, pp. 106~112.

(4) Douglas, J. and Gallie, T.M., 1955, "On the Numerical Integration of a Parabolic Differential Equation Subject to a Moving Boundary Condition," Duke Math. J., Vol. 22, pp. 557~570.

(5) Gupta, R.S. and Kumar, D., 1981, "Variable Time Step Method for One-Dimensional Stefan Problem with Mixed Boundary Condition," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.24, pp. 251~259.

(6) Meyer, G.H., 1973, "Multidimensional Stefan Problems," SIAM J. Num. Anal., Vol. 10, pp. 522~538.

(7) Shamsundar, N. and Sparrow, E.M., 1975, "Analysis of Multidimensional Conduction Phase Change Via the Enthalpy Model," J. of Heat Transfer, Vol.97, pp. 333~340.

(8) Goodrich, L.E., 1978, "Efficient Numerical Technique for One-Dimensional Thermal Problems with Phase Change," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.21, pp. 615~621.

(9) Voller, V.R. and Cross, M., 1981, "Accurate Solutions of Moving Boundary Problems Using the Enthalpy Method," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 24, pp. 545~556.

(10) Voller, V.R. and Cross, M., 1981, "Estimating the Solidification/Melting Times of Cylindrically Symmetric Regions," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.24, pp. 1457~1462.

(11) Cao, Y., Faghri, A. and Chang, W.S., 1988, "A Numerical Analysis of Stefan Problems for Generalized Multidimensional Phase Change Structures Using the Enthalpy Transforming

- Model," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol.32, pp. 1289~1298.
- (12) Sully, L.J.D, 1973, "The Thermal Interface Between Casting and Chill Molds," *AFS Trans.*, pp. 737~744.
- (13) Kim, W.S. and Özisik, M.N., 1990, "Inverse Problem of Solidification for Determining Air-Gap Resistance to Heat Flow During Metal Casting," 22nd ICHMT Int. Symposium on Manufacturing and Materials Processing, Dubrovnik, Yugoslavia.
- (14) 여문수, 손병진, 이관수, 1992, "주형/주물접촉면에서의 접촉열저항을 고려한 상변화문제에 관한 연구," *대한기계학회논문집* 16권 제2호 pp. 348~355.
- (15) Rathjen, K.A. and Jiji, L.M., 1971, "Heat Conduction with Melting or Freezing in a Corner," *J. of Heat Transfer*, Vol.93, pp. 101~109.