

〈論 文〉

수치해의 정확성과 안정성이 보장되는 대류항 미분법 개선에 관한 연구

신종근* · 최영돈**

(1991년 12월 20일 접수)

Study on the Improvement of the Convective Differencing Scheme for the High-Accuracy and Stable Resolution of the Numerical Solution

J.K. Shin and Y.D. Choi

Key Words : Convective Differencing Scheme(대류항 미분법), SHARPER Scheme(SHARPER 해법), SMARTER Scheme(SMARTER 해법), QUICKER Scheme(QUICKER 해법), QUICKUP Scheme(QUICKUP 해법), Normalized Variable Diagram(NVD, 정규화된 변수 선도)

Abstract

QUICKER scheme has several attractive properties. However, under highly convective conditions, it produces overshoots and possibly some oscillations on each side of steps in the dependent variable when the flow is convected at an angle oblique to the grid line. Fortunately, it is possible to modify the QUICKER scheme using non-linear and linear functional relationship. Details of the development of polynomial upwinding scheme are given in this paper, where it is seen that this non-linear scheme has also third order accuracy. This polynomial upwinding scheme is used as the basis for the SHARPER and SMARTER schemes. Another revised scheme was developed by partial modification of QUICKER scheme using CDS and UPWIND schemes(QUICKUP). These revised schemes are tested at the well known bench mark flows, Two-Dimensional Pure Convection Flows in Oblique-Step, Lid Driven Cavity Flows and Buoyancy Driven Cavity Flows. For pure convection oblique step flow test problem, QUICKUP, SMARTER and SHARPER schemes remain absolutely monotonic without overshoot and oscillation. QUICKUP scheme is more accurate than any other scheme in their relative accuracy. In high Reynolds number Lid Driven Cavity Flow, SMARTER and SHARPER schemes retain lower computational cost than QUICKER and QUICKUP schemes, but computed velocity values in the revised schemes produced less predicted values than QUICKER scheme which is strongly effected by overshoot and undershoot values. Also, in Buoyancy Driven Cavity Flow, SMARTER, SHARPER and QUICKUP schemes give acceptable results.

————— 기 호 설 명 —————

*고려대학교 기계공학과

**정회원, 고려대학교 기계공학과

a, b, c, d : 3차방정식의 계수

C_{IF} : 검사체적으로 대류되는 유입유속

f_e : 보간계수

- N : 계산영역의 전 격자수
- $\bar{N}u_o$: $x=0$ 에서 평균 누셀트수
- Nu_{max} : $x=0$ 에서 최대 국부 누셀트수
- Nu_{min} : $x=0$ 에서 최소 국부 누셀트수
- r : 이완계수
- T : 온도
- U, u : x 방향 속도
- V, v : y 방향 속도
- x, y, z : 직각 좌표계
- ε : 상대적인 오류도
- ρ : 밀도
- ν : 동점성 계수
- ϕ : 스칼라 변수
- $\tilde{\phi}$: 정규화된 변수

하첨자

- U, D, C : 격자점
- e, f, i : 격자점의 위치

1. 서 론

강한 대류현상에 대한 효과적인 모형화는 전산유체역학 분야에서 가장 많이 다루어져야 할 분야중의 하나이다. Leonard⁽¹⁾에 따르면 대류항의 안정성은 Fig. 1에서와 같이 $i-1$ 점에 중심을 두고있는 검사체적으로 대류되는 유입유속, C_{IF} 의 변화 즉 $\partial C_{IF} / \partial \phi_{i-1}$ 로 결정된다고 한다.

여기에는 3가지 가능성이 있는데

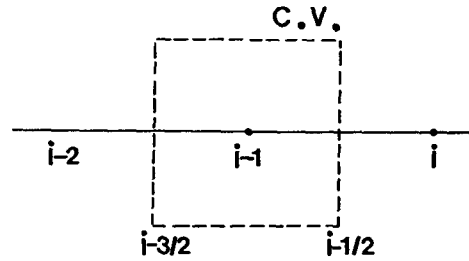


Fig. 1 Nodal configuration showing a typical control volume

$$\frac{\partial C_{IF}}{\partial \phi_{i-1}} \begin{cases} < 0 : \text{안정 (stable sensitivity)} \\ = 0 : \text{중립 (neutral sensitivity)} \\ > 0 : \text{불안정 (unstable sensitivity)} \end{cases}$$

이 그것이다. 따라서 대류항의 안정성을 유지하기 위해서는 $\partial C_{IF} / \partial \phi_{i-1}$ 이 음의 값을 갖도록 하는것이 우선 요구된다고 하겠으며 기존의 잘 알려진 해법들에 대한 안정성 여부는 Table 1에 나타난 바와 같이 대부분 이 값이 음의 값을 갖고 있다. 순수하게 물리적인 견해에서 보면 대류는 상류에서 하류로의 유체상태들을 전달하는데 관련이 있고, 대류에 대한 어떠한 수치적 접근도 이러한 현상을 반영해야 한다. 그러므로 대류에 의한 전달을 수치적으로 모형화하는 데에는 상류쪽의 요소들을 유지해야만 한다는 것이 분명 중요한 개념이 될 것이다. 따라서 어떠한 수치적 방법에 대해서도 상류쪽에 대한 정보를 포함하는 것이 없이는 대류항의 안정성이 유지되지 않을 것이다.

Table 1 Some well known discretization schemes and their associated properties in uniform grid system

Discretization scheme	Discretization expression for $\phi_{i-1/2}$ when $u_{i-1/2} = u_o > 0$	Leading truncation error term	Convective stability $\partial C_{IF} / \partial \phi_{i-1}$	Critical Peclet number
QUICK	$\frac{1}{8}(3\phi_i + 6\phi_{i-1} - \phi_{i-2})$	$\frac{u_o \Delta x^3}{16} \phi'''_{i-1/2}$	$-\frac{3u_o}{8\Delta x}$ (stable)	$\frac{8}{3}$
CUI	$\frac{1}{6}(2\phi_i + 5\phi_{i-1} - \phi_{i-2})$	$\frac{u_o \Delta x^2}{24} \phi''_{i-1/2}$	$-\frac{u_o}{2\Delta x}$ (stable)	3
2nd-order upwind	$\frac{1}{2}(3\phi_{i-1} - \phi_{i-2})$	$\frac{3u_o \Delta x^2}{8} \phi''_{i-1/2}$	$-\frac{3u_o}{2\Delta x}$ (stable)	∞
Central differencing	$\frac{1}{2}(\phi_i + \phi_{i-1})$	$\frac{u_o \Delta x^2}{4} \phi''_{i-1/2}$	0 (neutral)	2
upwind	ϕ_{i-1}	$\frac{u_o \Delta x}{16} \phi'_{i-1/2}$	$-\frac{u_o}{\Delta x}$ (stable)	∞

현재 가장 일반적으로 많이 쓰이는 타원형 문제에 대한 대류항 처리기법은 2차상류해법⁽²⁾이거나 QUICK^{(1),(3)} 해법이다. 특히 QUICK해법은 몇가지 장점을 갖고 있는데 그것은 수치확산의 최소화, 낮은 산포성(dispersion), 본질적으로 대류항을 안정화시키는 성질, 해법의 단순성, 전산비용의 경제성 등을 들 수 있다. 또한 QUICK해법은 Navier-Stokes 방정식에서 뛰어난 압력 예측능력을 갖고 있으며 기존의 TEACH-CODE⁽⁴⁾ 등에 손쉽게 적용하여 사용할 수 있는 면도 있다. 그러나 QUICK의 단점은 격자에 경사지게 유입되는 매우 강한 대류 조건에서는 풀어야 할 종속변수들이 진동할 가능성이 있다는 것과 실제값보다 더 큰 값(overshoot)이나 작은 값(undershoot)을 예측한다는 것이다.

전산유체역학에서는 얇은 전단층, 불연속적인 온도, 충격파 등의 급격한 변화에 대한 해를 정확히 구하는 것을 하나의 기본목적으로 하고 있다. 따라서 이런 현상에 QUICK해법을 적용할 경우 충격파의 급경사성(steeptening), 계산된 확산계수나 점성계수들의 비선형성들은 진동(oscillation)하는 오류값들을 점차 증대시키면서 발산해 갈 것이다.⁽⁵⁾ 따라서 이런 문제들을 해결하기 위해서는 전형적인 다차원 전달방정식에서 대류항을 처리하는 새로운 접근방법이 제시되어야 한다. 그리고 이 접근방법은 어떠한 대류된 스칼라 전달변수에 대해서도 단순하면서 엄격한 제한성을 보존하는 알고리즘이 되어야 한다. 이 방법중의 하나는 3차의 정확도를 가지면서 좋은 안정성을 유지하고 있는 QUICK해법을 보완하는 것으로부터 시작할 수 있으며, 이러한 보완사항은 전산시간에 대한 비용의 큰 추가부담 없이도 수정 되어져야 한다.

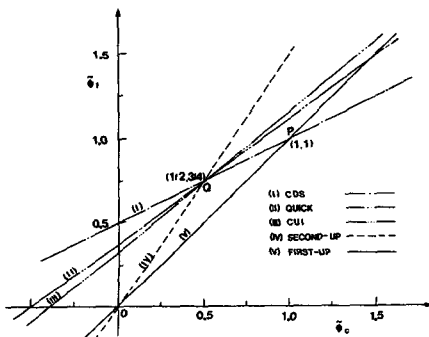


Fig. 2 Normalized values of $\tilde{\phi}_c$ for various well known approximations

Fig. 2는 균일격자계에서 무차원으로 정규화된 변수선도(Normalized Variable Diagram : NVD)를 나타내는데 이 도면에서 1차상류해법, 2차상류해법, 중심차분법, QUICK해법, CUI^{(6),(7)} (Cubic Upwind Interpolation) 해법 등은 모두 직선으로 표시된다. 이 해법들에 대한 안정성 및 정확도는 Table 1에 수록하였다. ⁽⁶⁾ Leonard⁽⁹⁾에 의하면 경험적으로 볼 때 2사분면을 지나는 해법은 진동(oscillation)이 있으며, 4사분면을 지나는 해법은 오류확산이 생긴다고 하였다. 또한 P점 위를 통과하는 해법도 진동(oscillation)이 발생하며, P점 아래를 통과하는 해법 역시 오류확산이 존재한다고 하였다. 따라서 개선될 해법은 0점과 P점을 통과하는것이 분명한 필요조건이 된다고 할 수 있으며, 또한 QUICK해법과 같은 3차의 정확도를 갖으려면 Q점에서 곡선의 구배가 QUICK과 같은 3/4이 되어야 한다고 하였다. 이런 조건을 모두 갖추면서도 단순하고 높은 정확도를 유지하기 위한 해법의 곡선은 비선형함수이거나 여러 선형함수들의 조합 관계가 되어야 함이 분명하다.

Leonard⁽⁹⁾는 이 비선형관계를 Fig. 3과 같이 지수함수를 사용하여 SHARP(Simple High-Accuracy Resolution Program)라고 명명하였으며, Gaskell과 Lau⁽⁶⁾는 Fig. 4와 같이 구간별로 선형함수를 사용하여 SMART(Sharp and Monotonic Algorithm for Realistic Transport)라고 개정된

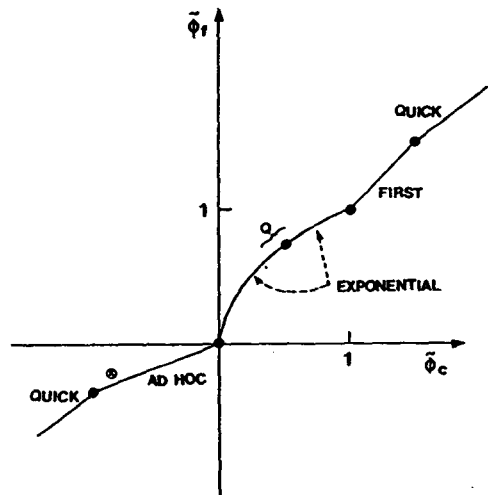


Fig. 3 Composite NVD characteristics for the SHARP scheme

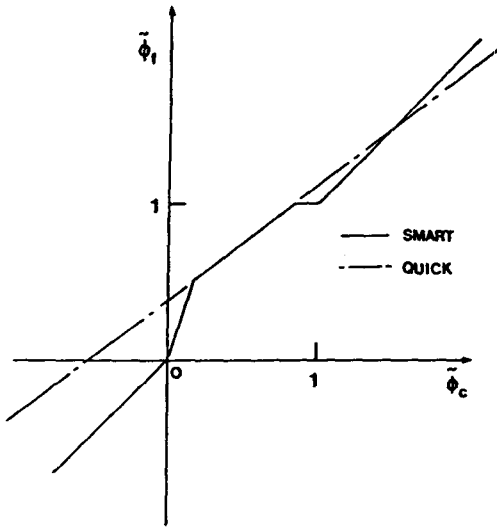
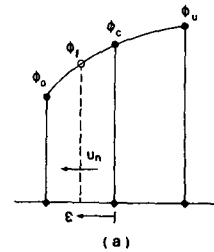


Fig. 4 Representation of the SMART algorithm in the $(\bar{\phi}_f, \bar{\phi}_c)$ plane

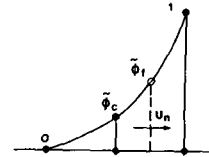
해법을 제시한 바 있다. 기존의 SHARP 해법은 균일 격자계에만 적용할 수 있는 방법이며 SMART 해법은 곡선의 불균일성을 갖고있는 단점이 있고, 시험한 문제도 순수 대류만 있는 단순유동이었다. 따라서 대부분의 전산유체역학 문제에서 적용되고 있는 비균일격자계에 적용하면 오차가 커질 것이다. 또한 QUICK 해법에서 생기는 overshoot나 undershoot 값들이 어떤 이유에서 생기며 확산이 존재하는 유동영역에서는 이러한 값들이 어떠한 영향을 미치는지에 대해서는 언급되지 않았다. 이에 대해 본 논문은 이 기존의 방법들을 개선하여 비균일격자계에서도 사용할 수 있는 비선형 함수관계를 제시하며, 이 방법과 기존의 해법들을 비교할 때 실제 유동장에서의 해의 정확도 차이, 전산비용의 경제성등은 어느정도 인지를 밝히고, 또 개선된 해법이 앞서 제시한 좀 더 복잡한 유동장에서도 성공적으로 적용 가능한지의 여부를 판단하는 것을 그 목적으로 한다.

2. 이론 해석

Fig. 5(a)에서 보여준 것과 같이 한 검사체적에 수직인 방향으로 대류된 어떤 수송량 $\phi(x, y, z)$ 의 변화를 고려할 때, 검사체적면으로 대류되는 속도에 대하여 QUICK 해법을 비균일격자계에 적용한 QUICKER 해법⁽¹⁰⁾은 대류된 검사체적면에서의 ϕ_f



(a) Original Variables



(b)

(b) Normalized Variables

Fig. 5 Node variables in the vicinity of C.V. face (at the dashed lines)

의 값을 상류값 ϕ_u 와 인접한 2값 ϕ_D, ϕ_C 의 값으로 나타낼 수 있다. 여기서 각 절점의 값들은 검사체적면에 수직인 속도성분 방향에 따라 하류점(D), 중앙점(C) 그리고 상류점(U)과 같이 표시하였다.

Fig. 5(b)는 현 상황에 대해 국부적으로 정규화된 변수⁽⁹⁾

$$\bar{\phi} = \frac{\phi - \phi_U}{\phi_D - \phi_U} \tag{1}$$

로 나타낸 것이고, 이렇게 정규화된 변수의 항에서 $\bar{\phi}_D=1$ 이고 $\bar{\phi}_U=0$ 임을 주목해야 한다. 1차원 비균일격자계에서 중심차분법 및 QUICKER 해법은 한 검사체적에 대한 대류의 강도 $(\rho u)_e$ 가 0보다 클 때 다음과 같이 표시될 수 있다.

- 중심차분법

$$\bar{\phi}_f = f_e \bar{\phi}_c + (1 - f_e) \tag{2}$$

- QUICKER 해법

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_f &= f_e \bar{\phi}_c + (1 - f_e) + \frac{(1 - f_e) f_e}{\Delta x_1 + \Delta x_2} [\bar{\phi}_c \Delta x_1 \\ &\quad \left(\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta x_2} \right) - \Delta x_1] \tag{3} \\ &= [f_e + (1 - f_e) f_e \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}] \bar{\phi}_c + (1 - f_e) \\ &\quad \left(1 - f_e \frac{\Delta x_1}{\Delta x_1 + \Delta x_2} \right) \tag{4} \end{aligned}$$

식 (3), (4)에서 $\Delta x_1, \Delta x_2$ 는 Fig. 6에서 보여지는 변수이고 f_e 는 보간계수(interpolation factor)이다.

정규화된 변수선도상에서 앞에서 제시한 필요조건 및 필요충분조건을 만족하는 비선형함수를 3차의 다항식으로 가정하면 이 함수는 Fig. 7에서 보여지는 바와같이 $\bar{\phi}_c$ 가 0에서 1 사이에서는 O, P, Q 점을 지나는 곡선이 될 것이다. 여기서 Q점은 QUICKER 해법에 대한 직선과 중심차분법에 대한 직선이 만나는 점이다. 이 점은 식(3)에서

$$\bar{\phi}_c \Delta x_1 \left(\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta x_2} \right) - \Delta x_1 = 0 \quad (5a)$$

이므로

$$\bar{\phi}_c = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1 + \Delta x_2} \equiv \bar{\phi}_0 \quad (5b)$$

이다. QUICKER 직선의 구배를

$$f_e + (1-f_e) f_e \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} \equiv g_0 \quad (6)$$

라고 정의하자.

Q점에서 구배가 g_0 이고 O, P, Q점을 지나는 곡선에 대한 방정식을 3차식으로 구하면

$$\bar{\phi}_f = a + b\bar{\phi}_c + c\bar{\phi}_c^2 + d\bar{\phi}_c^3 \quad (7)$$

이 된다. 이 식에서 Fig. 7에서 주어진 경계조건을 대입하면

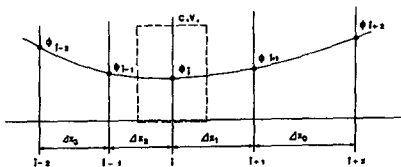


Fig. 6 QUICKER scheme in non-uniform grid

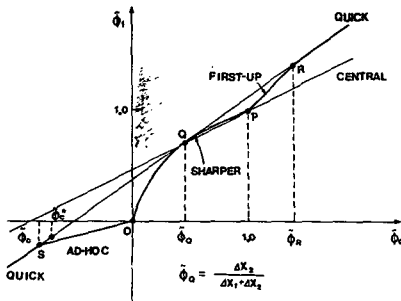


Fig. 7 Composite normalized variable diagram characteristics for the SHARPER scheme

$$a=0 \quad (8a)$$

$$1=b+c+d \quad (8b)$$

이다. Q점에서의 $\bar{\phi}_f$ 값을 $\bar{\phi}_{fQ}$ 라 하면 중심차분법에서

$$\bar{\phi}_{fQ} = f_e \bar{\phi}_Q + (1-f_e) \quad (9)$$

이고 3차의 다항식으로 표현된 방정식에서는

$$\bar{\phi}_f = b\bar{\phi}_c + c\bar{\phi}_c^2 + d\bar{\phi}_c^3 \quad (10)$$

이 된다. 식(7)을 $\bar{\phi}_c$ 에 대해 미분하면

$$\frac{d\bar{\phi}_f}{d\bar{\phi}_c} = g_c = b + 2c\bar{\phi}_c + 3d\bar{\phi}_c^2 \quad (11)$$

이 된다. 식 (8), (10), (11)을 연립하여 풀면 3차방정식의 계수 b, c, d 가 다음과 같이 구해진다.

$$b = \frac{\bar{\phi}_Q^4 + g_0(\bar{\phi}_Q^3 - \bar{\phi}_Q^2) + \bar{\phi}_{fQ}(2\bar{\phi}_Q - 3\bar{\phi}_Q^2)}{\bar{\phi}_Q^4 - 2\bar{\phi}_Q^3 + \bar{\phi}_Q^2} \quad (12)$$

$$c = \frac{-2\bar{\phi}_Q^3 + g_0(\bar{\phi}_Q - \bar{\phi}_Q^3) + \bar{\phi}_{fQ}(3\bar{\phi}_Q - 1)}{\bar{\phi}_Q^4 - 2\bar{\phi}_Q^3 + \bar{\phi}_Q^2} \quad (13)$$

$$d = \frac{\bar{\phi}_Q^2 + g_0(\bar{\phi}_Q^2 - \bar{\phi}_Q) + \bar{\phi}_{fQ}(1 - 2\bar{\phi}_Q)}{\bar{\phi}_Q^4 - 2\bar{\phi}_Q^3 + \bar{\phi}_Q^2} \quad (14)$$

이렇게 구해진 비선형 3차다항식을 앞서 제시한 필요조건 및 필요충분조건을 만족하는 함수관계로 연결시키는 것은 여러 방법이 있을 수 있으나 여기에서는 Leonard의 SHARP해법과 Gaskell & Lau의 SMART해법에 입각한 2가지 개선방법과, 3차다항식을 사용하지 않으며 앞서 제시한 필요조건도 만족하지 않지만 기존의 잘 알려진 해법들을 구간별로 조합하여 해의 안정성과 정확성을 보장하는 새로운 해법을 제시하고자 한다.

2.1 SHARPER (SHARP Efficiently Revised) 해법

이 방법은 Fig. 7에서 보여준 바와 같이 QUICKER해법의 정확성이 우수하다는 점을 이용하여 점 R 및 S에서는 QUICKER해법으로 복귀하는 방법이다. 이 경우 P와 R을 연결하는 직선은 1차상류해법이 되며, R점은 다음과 같이 구할 수 있다. 즉 R점은 1차상류 해법

$$\bar{\phi}_f = \bar{\phi}_c \quad (15)$$

와 식(4)가 만나는 점이므로

$$\bar{\phi}_c = g_0 \bar{\phi}_c + (1-f_e) \left(1 - f_e \frac{\Delta x_1}{\Delta x_1 + \Delta x_2} \right) \quad (16)$$

이다. 따라서

$$\bar{\phi}_c = \frac{(1-f_e)(1-f_e \frac{\Delta x_1}{\Delta x_1 + \Delta x_2})}{1-g_0} \equiv \bar{\phi}_R \quad (17)$$

이 된다.

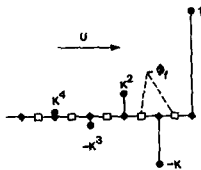
점 S와 O를 연결하는 직선은 QUICKER해법의 구배보다 작은 기울기를 갖는 특정직선이 된다. 그러나 이 직선은 QUICKER 직선상에서의 어떤 특이점 ($\bar{\phi}_c^*$)을 피하는 것이 요구되는데, 이 특이점을 지나는 어떤 경우에 대해서는 물리적으로 타당성이 없는 진동(oscillation)이 발생할 가능성이 있기 때문이다.⁽⁹⁾ 이 특이점은 다음과 같이 구할 수 있다. 정규화된 변수선도상에서 직선 성질을 갖는 어떤 $\bar{\phi}_r$ 값은

$$\bar{\phi}_r = S\bar{\phi}_c + I \quad (18)$$

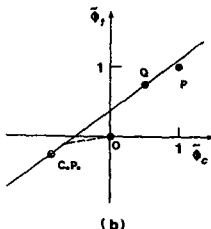
로 표시할 수 있다. 1차원 유동에서 만약 진동(oscillation)이 발생한다면 상류쪽으로 갈수록 점 차 소멸하면서 $\phi_i=1, \phi_{i-1}=-k, \phi_{i-2}=k^2, \dots$ 등과 같이 부호가 바뀌면서 일어날 수 있다. 이때 $\phi_D=1$ 이고 $\phi_C=-k, \phi_U=k^2$ 이 되며 무차원으로 정규화된 변수는

$$\bar{\phi}_c^* = \frac{\phi_C - \phi_U}{\phi_D - \phi_U} = \frac{-k - k^2}{1 - k^2} = -\frac{k}{1-k} \quad (19)$$

이 되고 여기서 별표(*)는 진동하는 성질에 대응하고 있는 $\bar{\phi}_c$ 의 특이값이 될 것이다. Fig. 8(a)에서 보는 바와 같이 $\bar{\phi}_r^*=0$ 이고,



(a) Oscillatory Node Values



(b) Location of C.P.

Fig. 8 Oscillatory critical point for QUICKER

$$\bar{\phi}_r^* = S\left(\frac{-k}{1-k}\right) + I = \frac{\phi_r^* - \phi_U}{\phi_D - \phi_U} = \frac{-k^2}{1-k^2} \quad (20)$$

이 된다. 식(20)은 k의 2차방정식에 해당하고 이 방정식의 물리적으로 타당한 해는

$$k = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4I(1-S-I)}}{2(1-S-I)} \quad (21)$$

이 된다.

QUICKER해법의 경우에는 식(4)에서 보는 바와 같이

$$S = f_e + (1-f_e)f_e \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} \quad (22)$$

$$I = (1-f_e)(1-f_e \frac{\Delta x_1}{\Delta x_1 + \Delta x_2}) \quad (23)$$

가 된다. 계산에 적용할 때에는 이 특이값을 지나서 사용해야 하므로 이 값에서 경험적으로 볼 때 충분히 벗어날 수 있다고 판정되어지는 값 0.25 정도를 감해서 $\bar{\phi}_s = \bar{\phi}_c^* - 0.25$ 에서 QUICKER선상으로 복귀하게하여 사용한다.⁽⁹⁾ 이 경우 특정선도의 식은

$$\bar{\phi}_r = \frac{\bar{\phi}_{rs}}{\bar{\phi}_s} \bar{\phi}_c \quad (24)$$

이고 여기서

$$\bar{\phi}_{rs} = g_0 \bar{\phi}_s + (1-f_e)(1-f_e \frac{\Delta x_1}{\Delta x_1 + \Delta x_2}) \quad (25)$$

가 된다. 다차원 비균일격자계에서도 이와 같은 방법으로 모든 검사체적면에 대해서 단순히 고려하기만 하면 된다. 최종적으로 SHARPER해법을 요약하면 다음과 같다.

① 검사체적의 한 면에 대한 유동의 세기(ρu)의 부호를 판정한다.

② 만약 $|\phi_D - \phi_U| < 10^{-5}$ 이거나 $\bar{\phi}_r > \bar{\phi}_R, \bar{\phi}_r \leq \bar{\phi}_S$ 이면 QUICKER해법을 사용한다.

③ $1.0 < \bar{\phi}_c \leq \bar{\phi}_R$ 구간에서는 1차상류해법 $\bar{\phi}_r = \bar{\phi}_c$ 을 사용한다.

④ $0.0 < \bar{\phi}_c \leq 1.0$ 구간에서는 $\bar{\phi}_r = b\bar{\phi}_c + c\bar{\phi}_c^2 + d\bar{\phi}_c^3$ 의 비선형 다항식을 사용한다.

⑤ $\bar{\phi}_s < \bar{\phi}_c \leq 0.0$ 구간에서는 $\bar{\phi}_r = \frac{\bar{\phi}_{rs}}{\bar{\phi}_s} \bar{\phi}_c$ 를 사용한다.

2.2 SMARTER (SMART Efficiently Revised) 해법

대류적인 측면에서만 볼 때 한 지점의 유체상태

전달을 위해서는 상류차분법을 사용해야 한다는 것은 자명하다. 이런 기본성질에 기초를 두고서 또 앞서 제시한 정규화된 변수선도에서 해의 정확성 및 안정성을 위해 O, P, Q 점을 지나야 한다는 조건에서, 1차상류해법은 이미 O, P 점을 지나고 있으므로 이 선도위에 비선형 함수관계를 적용한다는 것은 아주 간단한 일이 된다. 이 해법은 Fig. 9와 같이 $\bar{\phi}_c$ 가 0에서 1사이에 있을 때는 SHARPER 해법에서 이미 구한 3차의 비선형 다항식을 적용하는 것이고 나머지 구간에서는 1차상류해법을 적용하는 것이다. 해법의 간결성 및 단순성은 SHARPER 해법보다 우수하다는 것을 알 수 있으며, 앞서 제시한 필요조건 및 필요충분 조건도 모두 만족하고 있다. 이 SMARTER 해법을 요약하면 다음과 같다.

- ① 검사 체적의 한 면에 대한 유동의 세기 (ρu)의 부호를 판정한다.
- ② 만약 $|\phi_D - \phi_U| < 10^{-5}$ 이거나 $\bar{\phi}_c \leq 0$, $\bar{\phi}_c > 1$ 에서는 $\bar{\phi}_r = \bar{\phi}_c$ 의 1차상류해법을 사용한다.
- ③ $0.0 < \bar{\phi}_c \leq 1$ 구 간에서는 $\bar{\phi}_r = b\bar{\phi}_c + c\bar{\phi}_c^2 + d\bar{\phi}_c^3$ 의 3차다항식을 사용한다.

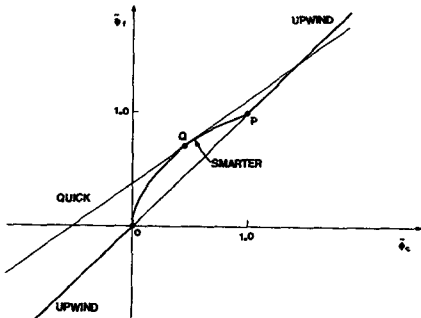


Fig. 9 Composite normalized variable diagram characteristics for the SMARTER scheme

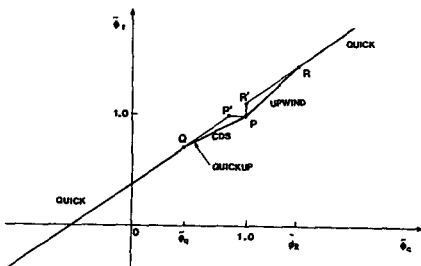


Fig. 10 Composite normalized variable diagram characteristics for the QUICKUP scheme

2.3 QUICKUP(QUICKER+CDS+UP-WIND) 해법

기존의 QUICKER 해법을 부분적으로 약간 변형시켜 반복계산 시간을 절약하고 QUICKER 해법에서 발생하는 overshoot를 제거할 수 있는 방법을 찾는것은 흥미로운 일이 아닐 수 없다. 따라서 본 연구에서는 QUICKER 해법의 정규화된 변수선도 상에서 경험적으로 overshoot를 발생시키는 점을 찾은 결과 Fig. 10의 P' 점을 지나는 경우 overshoot가 발생하는 것을 발견하였다. 따라서 CDS 해법과 UPWIND해법을 부분적으로 사용하여 정규화된 변수선도상에서 QPR을 지나므로 P' 점을 피해가는 방법을 고안하여 이 해법을 QUICKUP해법이라 하였다. 이 QUICKUP해법을 요약하면 다음과 같다.

- ① 검사체적의 한 면에 대한 유동의 세기(ρu)의 부호를 판정한다
- ② $\bar{\phi}_r < \bar{\phi}_0$, $\bar{\phi}_r \geq \bar{\phi}_R$ 이면 QUICKER해법을 사용한다.
- ③ $\bar{\phi}_0 \leq \bar{\phi}_r < 1$ 이면 중심차분법(CDS)을 사용한다.
- ④ $1 \leq \bar{\phi}_r < \bar{\phi}_R$ 이면 1차상류해법 $\bar{\phi}_r = \bar{\phi}_c$ 를 사용한다.

3. 적용 대상 문제 및 해법

현재의 개선된 해법들을 시험하기 위하여 3가지 문제를 대상으로 선택하였다. 첫번째는 Fig. 11에서와 같은 정사각 단면에서 어떤 스칼라 값(ϕ)의

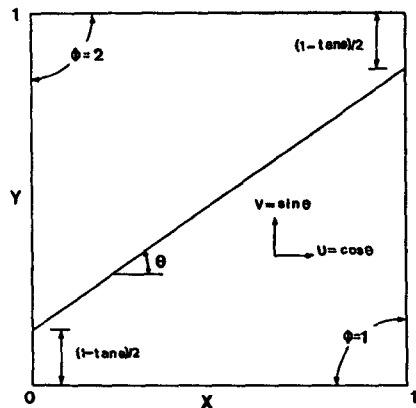


Fig. 11 Pure convection of a step profile showing the flow configuration

분포가 왼쪽 및 상부 경계조건에서 2이고 하부 및 오른쪽 경계조건에서는 1인 경우에 대해 격자에 경사지게 유량이 유입되는 확산계수가 0인 순수한 대류유동의 Bench-Mark 시험문제이다.

이 문제는 격자선에 경사지게 유입되는 대류에 대해서 각 적용해법에 따라 오류확산의 존재 여부, 예측값의 overshoot와 undershoot의 유무, 계산도면에서의 예측값의 진동 여부 등을 시험할 수 있다. 본 계산에서는 45°로 유입되는 경우에 대해서만 계산 하였으며 QUICKER해법을 적용할 경우 경계선에서는 스칼라양의 2차 보간을 적용하는 번거로움이 있고, 원칙적으로 엇갈림 격자제를 사용하였다. 사용된 격자제는 41×41 균일격자제 및 비균일격자제(이완계수, $r=1.1$)이고 행렬계산은 TDMA를 이용하였으며 수송량의 이완계수 (under-relaxation factor)는 0.5로 하였다. 이 경우 각 적용해법에 따라 수송량의 이완계수를 크게 하면 수렴성이 좋아지고 계산시간이 단축되나 동일한 조건하에서 각 해법을 비교하기 위하여 이완계수를 0.5로 고정 하였고 모든 해법에서 수송량의 잔류량이 더 이상 변하지 않게되어 충분히 수렴되는 동일한 반복계산수를 선정하여 전체 계산에 사용하였다.

두번째 대상문제는 모든 대류해법의 정확성 정도를 비교할 수 있으며, 실제문제에 직접 적용 가능한 Fig. 12와 같은 Lid Driven Cavity Flow를 선정하였다.⁽¹¹⁾ 이 문제에서 적용한 레이놀즈수는 400, 3200의 2가지 경우이다.

세번째 대상문제는 속도 이외에 다른 스칼라 변

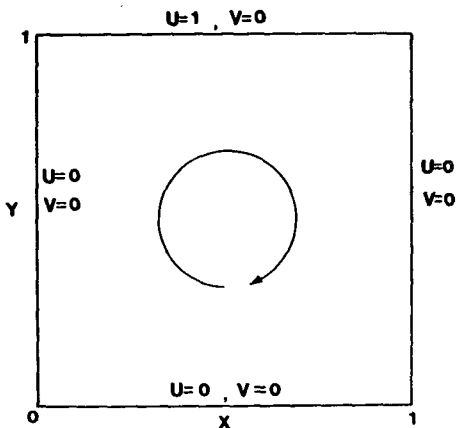


Fig. 12 Lid driven cavity flow configuration

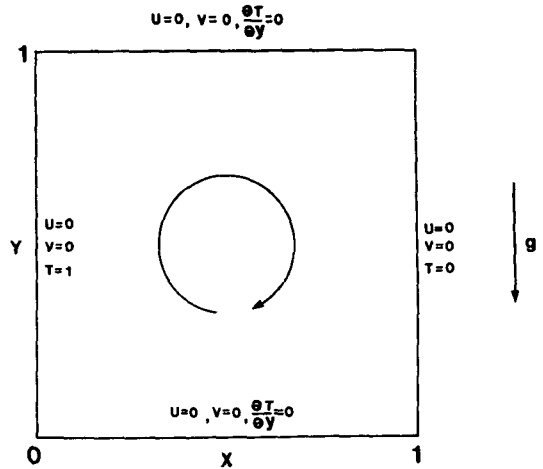


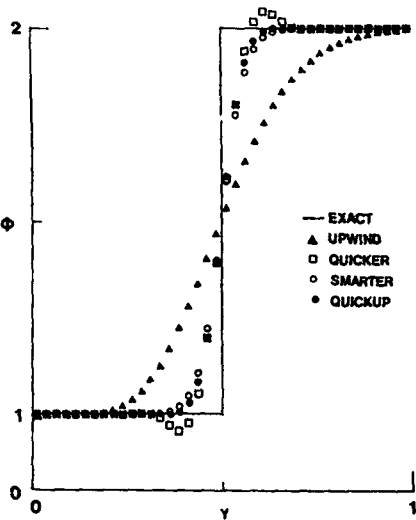
Fig. 13 Buoyancy driven cavity flow configuration

수가 중요한 문제가 되는 경우로서, 실제적인 문제에 응용도가 높아 각종 전산기 CODE의 시험과 타당성에 사용되고 있는 Fig. 13에서와 같은 정사각 단면에서의 자연대류 문제를 채택하였다. 이러한 문제는 실내의 환기, 태양 에너지 집열기, 액체에서의 결정의 성장, 반응로의 절연 등 전반적으로 응용도가 높고 실제적인 문제에 활용가능하다.^(12,13) 이 문제에서는 Rayleigh 수가 10^6 인 경우만 채택하였는데 이것은 Rayleigh수가 작은 경우에는 적용 대류해법에 따라 큰 차이가 없기 때문이다.⁽¹⁴⁾

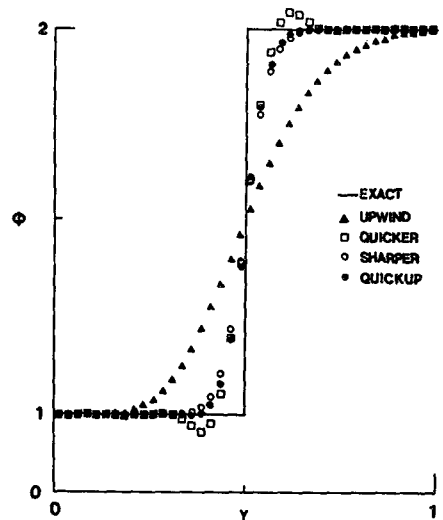
Cavity 문제에 사용된 격자제는 41×41 비균일 격자제이며 압력 및 속도수정은 SIMPLER 해법을 사용하였다. 또한 이완계수는 속도 및 온도 U,V,T에 대해서는 0.5, 압력은 1.0으로 하였으며 행렬계산은 TDMA, 수렴조건은 상대오차 10^{-4} 으로 하였다.

4. 결과 및 고찰

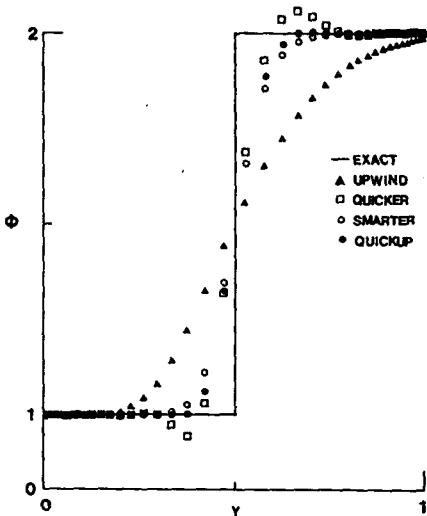
Fig. 14와 15는 Bench Mark 시험문제에 대해 $x = 0.5$ 인 지점에서 각 적용해법에 대한 y 방향으로의 ϕ 분포를 나타낸다. 균일 및 비균일격자제 모두에서 SHARPER, SMARTER, QUICKER 해법의 ϕ 분포 값 차이는 거의 없으며, 3가지 해법 모두 $y=0.5$ 근처에서는 QUICKER 해법보다 오류확산이 크게 나타나고 있다. 그러나 이 3가지 해법들은 QUICKER 해법에서 명백히 보여지고 있는 실제값보다 큰 값(overshoot)이나 작은 값(under-



(a) Uniform 41×41 Grid System

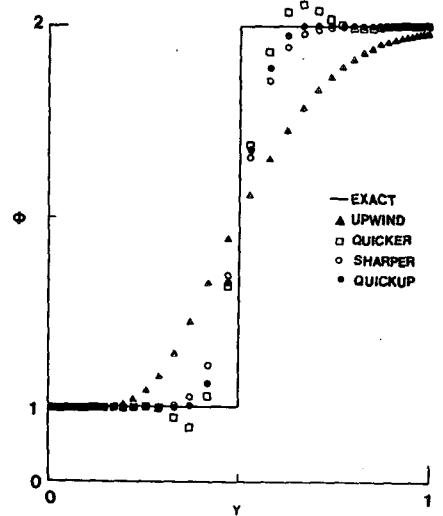


(a) Uniform 41×41 Grid System



(b) Non-uniform 41×41 Grid System

Fig. 14 Comparison of the profiles obtained using UPWIND, QUICKER, SMARTER and QUICKUP with that of the exact solution at 45° flow angle



(b) Non-uniform 41×41 Grid System

Fig. 15 Comparison of the profiles obtained using UPWIND, QUICKER, SHARPER and QUICKUP with that of the exact solution at 45° flow angle

shoot)을 예측해 주지는 않는다. 비균일격자계에서 QUICKER 해법의 overshoot 및 undershoot는 더욱 커지고 있으며, $y=0.5$ 지점에서는 QUICKER 해법 및 개선된 3가지 해법 모두 균일격자계를 사용한 경우보다 오류확산이 약간 크게 나타나고 있다. 또한 균일격자계를 사용한 경우보다 비균일격자계를 사용한 경우 $y=0.5$ 근처에서 개선된 3가지 해법들이 QUICKER해법보다 오류확산의 정도

는 큰 것을 알 수 있다. 따라서 개선된 3가지 방법은 overshoot와 undershoot를 제거하는 대신 오류확산의 정도가 약간 증가 되었다.

Fig. 16은 Bench Mark 시험문제에 QUICK 해법을 적용한 경우에 대해서 공간상에 전계산값을 도시한 것이며, 이 경우 overshoot 및 undershoot의 값이 분명히 존재함을 보여준다. QUICK 해법에 의한 이러한 overshoot 및 undershoot값이 격자수

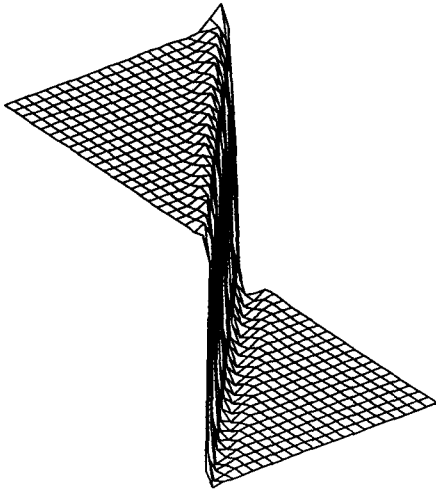


Fig. 16 Oblique-step test results for QUICK in uniform grid system, $\theta=45^\circ$, relative error $\epsilon=1.81547$

에 따라 어떠한 영향을 받는지를 Table 2 및 Fig. 17은 보여주고있다. 결론적으로보면 QUICK해법에 의한 예측값은 격자의 조밀성에 관계없이 항상 overshoot 및 undershoot 값을 나타내고 있으며, 격자수의 증가에 따라 상대적인 오류도(ϵ)는 감소하지만 overshoot와 undershoot의 크기는 점점 커지며 그 위치들은 $y=0.5$ 부근으로 이동하고 있음을 알 수 있다. 전유동장에서 overshoot와 undershoot를 포함한 해법의 오류도를 알아보기 위해서 상대적인 오류도 ϵ 을

$$\epsilon = \frac{\sum_{\text{all nodes}} |(\phi_{\text{exact}} - \phi_{\text{numerical}}) / \phi_{\text{exact}}| \times 100\%}{N} \quad (26)$$

로 정의하였다. 여기서 N 은 전 계산영역의 격자수를 나타낸다.

Fig. 10에서 보여준 QUICKER 직선에서 over-

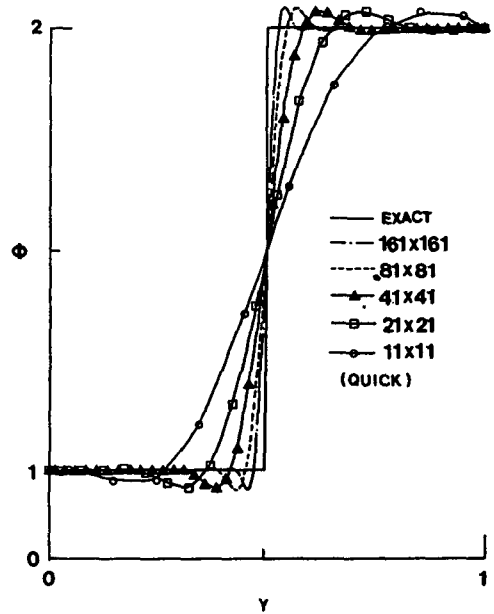


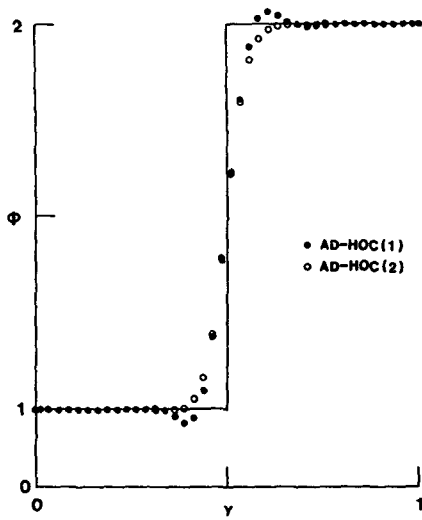
Fig. 17 Comparison of the QUICK with various mesh size

shoot 및 undershoot가 어느 부분에서 발생하는지 알아보기 위하여 QUICKUP 이외에 QP'PR을 지나는 특정선[AD-HOC(1)]과 QPR'를 지나는 또 다른 특정선[AD-HOC(2)]는 선정하여 계산하였다. Fig. 18에서 보면 AD-HOC(2)는 사실상 수렴성은 좋지 않았으나 overshoot 및 undershoot는 예측해 주지 않았다. 이 결과로 판단할 수 있는 것은 QUICKER직선이 직선 QP'를 지나는 것에 의해 overshoot 및 undershoot를 발생시킨다고 할 수 있다. 따라서 수렴성도 우수하고 overshoot 및 undershoot를 나타내지 않게 하기 위해서는 특정선 QPR을 지나는 것이 요구되며, 본 연구에서 이를 선정하여 QUICKUP이라고 명명 적용하였다.

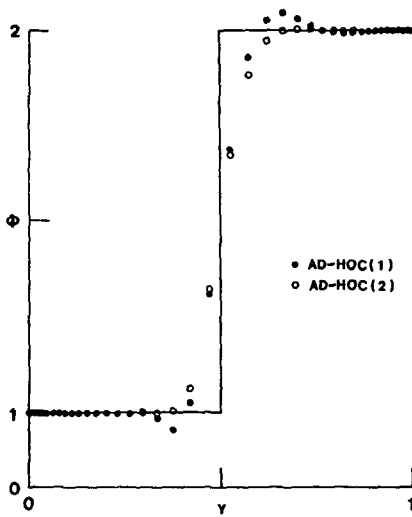
Table 3은 각각의 적용 대류해법에 대한 상대적

Table 2 comparison of the QUICK scheme with different mesh sizes

mesh size	$\phi_{min}(x=0.5, @y=)$	$\phi_{max}(x=0.5, @y=)$	ϵ
11x11	0.97761(0.5, 0.250)	2.0352(0.5, 0.85)	3.77659
21x21	0.96281(0.5, 0.325)	2.03747(0.5, 0.725)	2.72229
41x41	0.95760(0.5, 0.38750)	2.04245(0.5, 0.61250)	1.81547
81x81	0.9552(0.5, 0.43125)	2.0452(0.5, 0.56875)	1.16849
161x161	0.95355(0.5, 0.45937)	2.04695(0.5, 0.54062)	0.73747



(a) Uniform 41x41 Grid System



(b) Non-uniform 41x41 Grid System

Fig. 18 Comparison of the profiles obtained using AD-HOC(1) and AD-HOC(2) with that of the exact solution at 45° flow angle

인 오류도를 균일격자계와 비균일 격자계에 대해 나타낸 것이다. 균일격자계 및 비균일격자계 모두 QUICKUP이 가장 낮은 오류도를 유지하고 있으며, 균일격자계에서는 QUICKER의 오류도가 SMARTER나 SHARPER 보다 낮은 값을 유지하고 있지만 비균일격자계에서는 UPWIND를 제외하고 QUICKER의 오류도가 가장 큰 값을 갖고있다. 따라서 강한 대류현상을 유지하는 유동장에 QUICKER해법을 적용할 때는 주위를 요하는 것이

Table 3 Comparison of relative error ϵ for oblique step flow

	uniform grid system (41x41)	non-uniform grid system (41x41)
UPWIND	6.93075	6.65785
QUICKER	1.81547	2.60464
SMARTER	1.93568	2.52514
SHARPER	1.87252	2.50179
QUICKUP	1.63028	2.42248

좋다고 하겠다.

전산기의 계산 시간면에서 보면 1번의 반복 계산당 1차상류해법, QUICKER, QUICKUP, SMARTER, SHARPER 해법의 계산 시간비는 QUICKER를 기준으로 0.8 : 1.0 : 1.05 : 1.1 : 1.4이었다. 따라서 강한 대류해의 안정성이 큰 문제가 되는 경우에는 overshoot 나 undershoot를 방지하기 위하여 QUICKER에 비해 계산 시간면에서는 다소 뒤지지만 해의 안정성을 위해 SMARTER, SHARPER 및 QUICKUP해법의 사용이 필요하다 하겠으며 현재의 전산기 계산 비용적인 측면에서는 QUICKUP 및 SMARTER의 사용이 추천된다.

Fig. 19~22는 41x41 비균일격자계에서 Lid

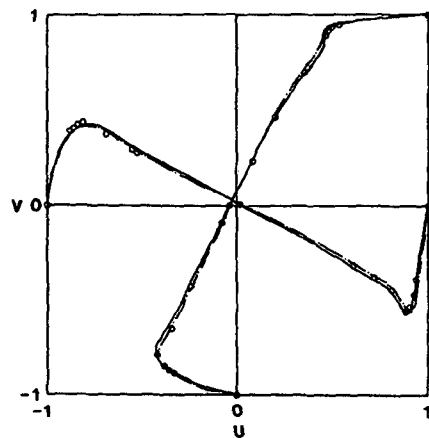


Fig. 19 U velocity profiles at the vertical centerline and V velocity profiles at the horizontal centerline (Re = 3200; - - : AUICKER, - · - : QUICK, o : Ghia Solution)

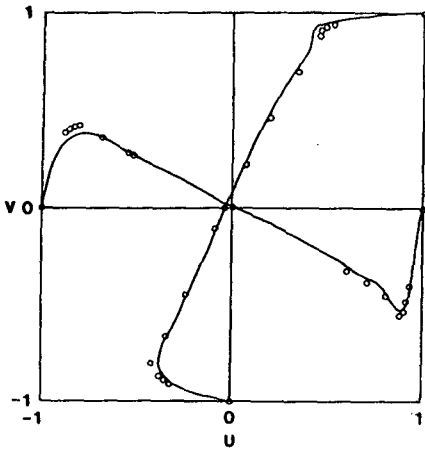


Fig. 20 U velocity profiles at the vertical centerline and V velocity profiles at the horizontal centerline. (Re=3200 : — : SMARTER, o : Ghia Solution)

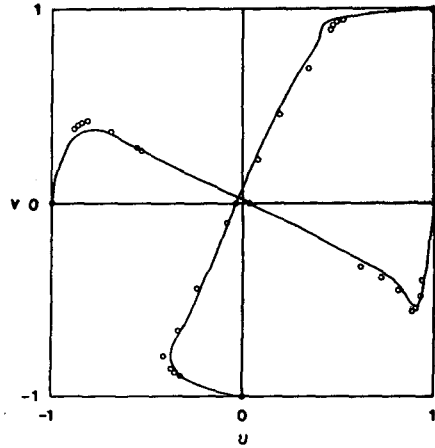


Fig. 22 U velocity profiles at the vertical centerline and V velocity profiles at the horizontal centerline. (Re=3200 : — : QUICKUP, o : Ghia Solution)

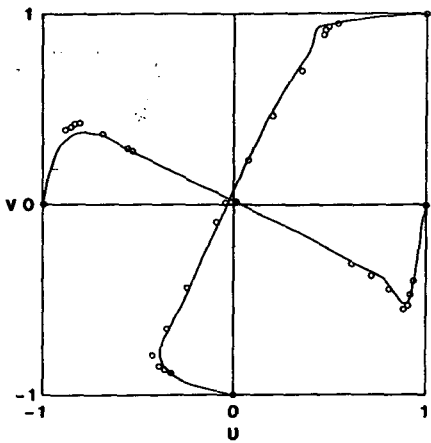


Fig. 21 U velocity profiles at the vertical centerline and V velocity profiles at the horizontal centerline. (Re=3200 : — : SHARPER, o : Ghia Solution)

Driven Cavity 유동특성을 레이놀즈수 3200인 경우에 대해 위에서 제시한 각 대류항 해법을 적용한 경우의 속도 U,V의 분포도이다. 레이놀즈수 400인 경우는 Table 4에서 제시된 값들로부터 알 수 있는 바와 같이 각 적용해법에 따라 속도분포의 변화가 거의 없다. 각각의 경우에 있어서 계산값들은 Table 4에 제시한 바와 같이 Ghia등⁽¹¹⁾의 해와 비교하였는데, Ghia등의 해는 129×129 격자계를 사용하여 계산한 결과이다. 균일격자계에서 사용하는 QUICK 해법을 비균일격자계에 그대로 적용할 경

우 전체 해에 어떠한 영향을 미치는지 알아보기 위하여 이 방법도 적용해 계산해 보았다. 이 경우는 Fig. 19 및 Table 4에서 보는 바와 같이 예측 속도 분포가 QUICKER해법을 적용한 경우보다 대부분 작게 나타나며 V 속도분포의 경우는 최소값의 위치가 보다 오른쪽으로 치지는 것을 알 수 있다. 따라서 어떤 계산에 적용하려는 대류항의 처리법이 격자의 비균일성에 따라 타당성이 있는지의 여부를 항상 먼저 판단하여야 할 필요가 있다.

Table 4와 Fig. 19에서 보면 QUICKER 해법의 경우 41×41 비균일격자계를 사용하였음에도 불구하고 Ghia등의 해와 유사한 결과를 나타내주고 있다. 이에 비해 QUICKUP, SMARTER, SHARPER해법은 레이놀즈수가 적은 400인 경우에는 ghia등의 해와 유사한 값을 예측하지만 3200인 경우에는 약간의 차이를 보여주고 있다. 이 결과들을 검토해 볼 때 개선된 해법들이 재순환 유동과 같은 실제 유동장에서는 별 효과를 나타내고 있지 않으나 엄밀한 의미에서 보았을때 QUICKER해법을 적용한 결과가 더 정확한것은 overshoot와 undershoot 값들이 예측값에 역으로 오류확산을 상쇄시키는 영향을 주어 전체적으로 속도분포를 상승시키는 결과를 나타내었다고 볼 수 있다. 이 경우를 검증하기 위해 Fig. 10에서 보여준 바와 같이 QP'PR를 지나는 특성선[AD-HOC(1)]을 선정하여 계산한 결과값들을 Table 4에 수록하였는데, QUICKER 해법에 보다 가까운 값들을 제시해 주

Table 4 Comparison of various schemes for Lid Driven Cavity Flow

scheme	CPU time/iter. (sec)	Re. No.	$V_{max}(y=0.5)$	$V_{min}(y=0.5)$	iteration No.	total CPU time(sec)
QUICKER	3.6	400	0.30106	-0.45074	635	2286.0
		3200	0.42917	-0.55658	2994	10778.4
QUICK	3.5	400	0.29955	-0.44907	632	2212.0
		3200	0.41449	-0.54554	2634	9219.0
QUICKUP	4.35	400	0.29480	-0.44597	714	3105.9
		3200	0.38223	-0.52185	2507	10905.45
SMARTER	4.4	400	0.29607	-0.44696	660	2904.0
		3200	0.38432	-0.52266	2191	9640.4
SHARPER	4.65	400	0.29634	-0.44682	668	3106.2
		3200	0.38341	-0.52036	2176	10118.4
Ghia ⁽¹¹⁾ solution	—	400	0.304	-0.4499	—	—
		3200	0.428	-0.5405	—	—
AD-HOC ⁽¹⁾	4.35	400	0.3004	-0.45119	776	3375.5
		3200	0.42040	-0.54934	3435	14942.25

어 QUICKER 해법에서의 overshoot와 undershoot가 오류확산 효과를 상쇄시키는 방향으로 작용하였음을 알 수 있다. 그러나 이와 같은 현상이 복잡한 재순환 유동의 해석에서도 일어날 것인가는 의문의 여지가 있기 때문에 Fig. 19에 나타난 자료만에 의해서 QUICKER 해법의 정확성을 논해서는 안된다고 생각되며 복잡한 3차원 유동등에서의 검증이 요구되어 진다.

따라서 Fig. 10에서 볼 때 $\bar{\phi}_c$ 가 $\bar{\phi}_0$ 보다 크고 1보다 작은 경우의 QUICKER 해법은 앞서서도 언급한 바와 같이 분명 overshoot 및 undershoot를 갖는 즉, 진동하는 값들을 예측해 주며 이 값들은 대류와 확산이 동시에 존재하는 유동장에서는 전체 예측값에 상당한 영향을 준다고 할 수 있다. 이 overshoot와 undershoot의 발생이 Lid Driven Cavity 유동에서는 좋은 방향으로 영향을 주었으나 더 복잡한 유동장에서는 이러한것을 보장할 수 없고 오히려 악영향으로 변할 가능성이 크다. 따라서 복잡한 재순환 유동이나 shock등이 발생하는 유동에서는 overshoot나 undershoot가 발생하지 않는 개선된 해법들을 사용하는 것이 더 안심할 수

있는 방법이라고 할 수 있다. 수렴할 때 까지의 각종 해법들에 대한 전체 계산시간에 있어서는 레이놀즈수가 400인 경우에는 QUICKER 해법이 우수하고 3200인 경우에는 QUICKER에 비해 SMARTER는 89%, SHARPER는 94% 정도의 빠른 수

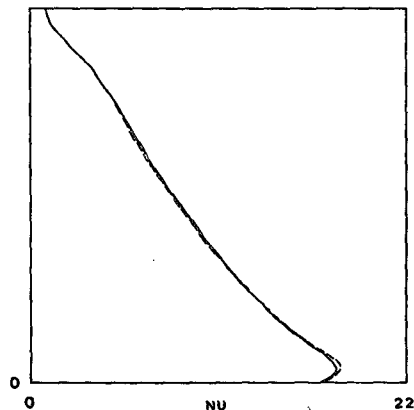


Fig. 23 Local nusselt numbers at $x=0$ for $Ra=10^6$
 — : 120×120 Grid solution⁽¹⁴⁾
 --- : QUICKUP

렴성을 보여주나 QUICKUP은 101.2%로 QUICKER와 유사하며 특정선[AD-HOC(1)]인 경우에는 138.6%로 상대적으로 수렴성이 좋지 않았다. 레이놀즈수가 큰 경우에 SMARTER나 SHARPER가 빠른 수렴성을 보여주는 것은 이 경우 확산에 비해 대류 현상이 지배적이기 때문으로 볼 수 있으며 앞의 Bench Mark해에서와 같이 전 계산도면에서 SMARTER나 SHARPER해법이 높은 안정성으로 유지한다고 판단할 수 있다. 따라서 강한 대류 조

건하에서는 QUICKER, QUICKUP 및 특정선 [AD-HOC(1)]보다 SMARTER나 SHARPER해법이 수치해를 상당히 안정화시키며 빠른 수렴효과를 가져올 수 있다고 예측할 수 있다. 이 문제에 대해서도 SMARTER, SHARPER 및 QUICKUP 해법의 계산결과값 차이는 거의 없음이 판명되었으므로 실제 적용시에는 계산시간적인 면에서는 SMARTER를, 기존의 CODE를 이용하는 면에 있어서는 QUICKUP의 사용이 추천되어진다.

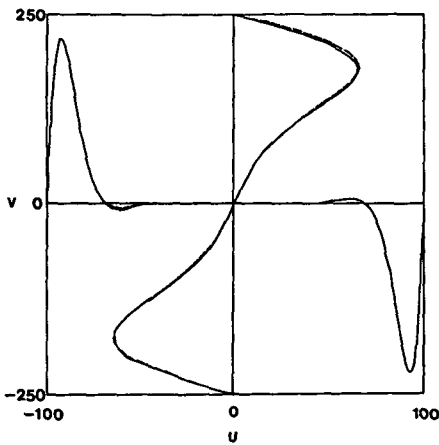


Fig. 24 U velocity profiles at the vertical centerline and V velocity profiles at the horizontal centerline. (Ra = 10⁶ : --- : QUICKER, — : 120 × 120 Grid solution⁽¹⁴⁾)

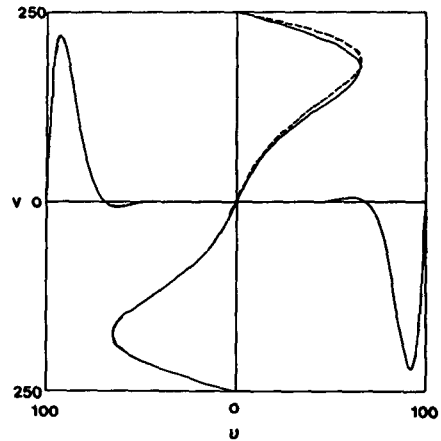


Fig. 26 U velocity profiles at the vertical centerline and V velocity profiles at the horizontal centerline. (Ra = 10 : --- : SHARPER, — : 120 × 120 Grid solution⁽¹⁴⁾)

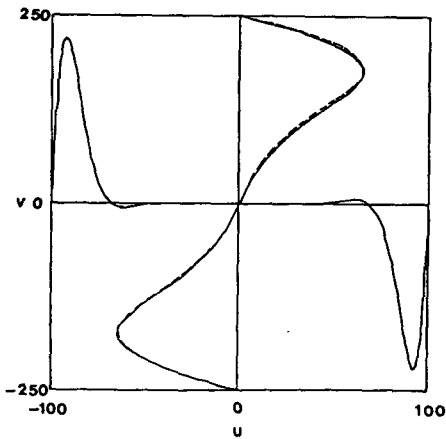


Fig. 25 U velocity profiles at the vertical centerline and V velocity profiles at the horizontal centerline. (Ra = 10⁶ : --- : SMARTER, — : 120 × 120 Grid solution⁽¹⁴⁾)

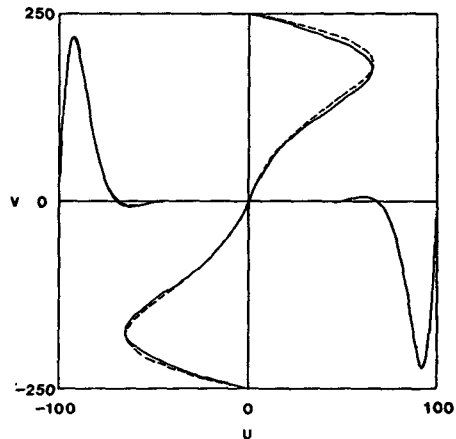


Fig. 27 U velocity profiles at the vertical centerline and V velocity profiles at the horizontal centerline. (Ra = 10 : --- : QUICKUP, — : 120 × 120 Grid solution⁽¹⁴⁾)

Table 5 Comparison of the solutions in Buoyancy Driven Cavity Flow

	U_{max}	y_{max}	V_{max}	x_{max}	N_{uo}	Nu_{max}	y_{max}	Nu_{min}	y_{min}
QUICKER	65.81992	0.850	219.1512	0.03443	8.90822	18.19687	0.03443	0.94515	0.99584
QUICKUP	66.43623	0.8716516	214.1442	0.03443	8.85888	18.18279	0.03443	0.96244	0.99584
SMARTER	64.85987	0.850	218.6548	0.0344	8.89782	18.14982	0.03443	0.9810	0.99584
SHARPER	66.46093	0.87165	216.3727	0.03443	8.88660	18.16200	0.03443	0.95766	0.99584
120×120 Grid ⁽¹⁴⁾ Solution	65.2352	0.85397	219.553	0.04090	8.86083	17.8425	0.03443	0.98091	0.99695

Fig. 24~27은 정사각 단면에서의 자연대류 문제에 대해 $x=0.5$, $y=0.5$ 에서 U , V 의 속도분포를 표시한 것이고 Table 5는 이 문제에서 중요한 값들을 실험과 최⁽¹⁴⁾의 Bendch Mark 해와 비교한 것이다. Table 5에서 보면 $x=0$ 에서 국부 누셀트수의 최고값은 41×41 격자계에 의해 계산된 모든 해법의 값들이 실험과 최⁽¹⁴⁾의 해에 비해서 보다 크게 예측되었음을 나타내고 있으며, Fig. 24~27의 속도분포에서는 QUICKER와 SMARTER가 SHARPER와 QUICKUP보다 더 좋은 결과를 보여주고 있다. V 속도분포의 경우는 길이 척도가 너무 커서 그림상으로 비교가 어려우나 Table 5에 의하면 QUICKER와 SMARTER 해법에 대한 타당성이 보증되며 전체 속도분포에 대해서는 QUICKER가 가장 우수한 예측값을 보여준다. 그러나 속도분포의 경우에는 Lid Driven Cavity 유동에서 설명한 바와 마찬가지로 QUICKER의 overshoot 및 undershoot 값이 오히려 속도 분포 예측에서 오류 확산을 상쇄시키는 방향으로 작용했다고 판단 되어진다. 여기서 나타낸 속도 U , V 는 무차원 값으로 $U=u/(\nu/L)$, $V=v/(\nu/L)$ 로 표시된다. ν 는 점성계수이며 L 은 1로 주어진다.

Table 5에 따르면 온도에 관계된 값들 즉 $\overline{N_{uo}}$, Nu_{max} , Nu_{min} 등은 QUICKER에 비해 SMARTER, SHARPER, QUICKUP이 우수함을 알 수 있으며, 이 중에서도 SMARTER가 가장 좋은 예측값을 나타내었다. $\overline{N_{uo}}$ 의 경우는 QUICKUP이 우수하나 Fig. 23에서 보면 $y=0.5$ 부근에서 보다 작은 값으로 예측되어 평균적인 측면에서 좋아졌을 뿐이지 전체적인 면에서는 오히려 좋지 않은 값을 예측하였다. 이 문제에 대해 전체 수렴조건은 온도와 속도에 대한 각각의 수렴조건을 만족시켜야 하

는데 QUICKER의 경우는 온도는 빨리 수렴되나 속도에 대해서는 느린 반면 나머지 3가지 해법들은 반대로 속도는 빨리 수렴되고 온도에 대해서는 느리게 수렴되었다. 따라서 Lid Driven Cavity 유동과는 다르게 모든 적용해법에 대해 수렴할 때까지의 반복 계산수를 약 3000번 정도로 일정하게 하였고 각 해법의 1회 반복 계산 시간비는 QUICKER, QUICKUP, SMARTER, SHARPER 순으로 1 : 1.146 : 1.146 : 1.170이었다.

결론적으로 보면 수정된 3가지 해법은 실제유동에 모두 적용가능하며 특히 자연대류 문제와 같이 스칼라양의 값이 중요한 변수로 될 때에는 SMARTER 해법의 사용이 추천되어지나 현재의 해법들을 보다 엄밀히 검증하기 위해서는 복잡한 3차원 유동 등에 적용하여 그 결과를 비교함이 타당하다고 생각된다.

5. 결론

기존의 QUICKER 해법을 토대로 3차의 정확도를 유지하면서 안정성이 더 우수하고 overshoot나 undershoot가 없어진다고 생각되어지는 SMARTER, SHARPER 및 QUICKUP 해법을 격자에 45°로 유입되는 순수 대류유동 문제, Lid Driven Cavity 유동과 Buoyancy Driven Cavity 유동에 적용하고 그 결과를 비교 검토하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) SMARTER, SHARPER 및 QUICKUP 해법은 격자에 경사지게 유입되는 순수 대류문제에 대해서는 overshoot 및 undershoot 값의 발생을 방지할 수 있다.

(2) SMARTER 및 SHARPER 해법은 강한 대

류현상이 지배적인 재순환 유동장에서도 계산 영역을 안정화시키며 빠른 수렴효과를 보여 주고 QUICKUP 해법은 같은 정확도를 보이나 계산 시간적인 면에서 다소 불리하다.

(3) 확산이 중요한 문제에서 QUICKER 해법은 overshoot 및 undershoot 값의 영향으로 인해 실제값보다 큰 유동분포를 예측할 가능성이 있다.

(4) 속도 이외에 다른 스칼라양이 포함된 문제에 대해서도 개선된 3가지 해법의 적용은 가능하고 그 중에서도 특히 스칼라양에 대해서는 SMARTER 해법이 우수함을 나타낸다.

(5) 강한 대류가 중요한 문제에서는 QUICKUP이, 복잡한 유동장에서는 시간적인 면에서 우수한 SMARTER의 사용이 기대되나 개선된 3가지 해법 및 QUICKER 해법은 순수 대류문제를 제외하고는 유사한 결과를 보여 주고 있다. 따라서 현재의 해법들을 보다 엄밀히 검증하기 위해서는 복잡한 3차원 유동 등에 적용하여 그 결과를 비교함이 타당하다고 생각되어진다.

참고문헌

- (1) Leonard, B.P., 1979, "A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation," *Compt. Methods Appl. Mech. Eng.*, 19, pp. 59~98.
- (2) Warming, R.F. and Beam, R.M., 1976, "Upwind Second-order Difference Schemes and Applications in Aerodynamic Flows," *AIAA J.*, 14, pp. 1421~1249.
- (3) Han, T., Humphrey, J.A.C. and Launder, B.E., 1981, "A Comparison of Hybrid and Quadratic Upstream Differencing in High Reynolds Number Elliptic Flows." *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 29, pp. 81~95.
- (4) Gosman, A.D. and Pun, W.M., 1974, "Calculation of Recirculating Flows," Report No. HTS/74/2, Department of Mechanical Engineering, Imperial College, London.
- (5) Agarwal, R.K., 1987, "Numerical Study of Convection-Diffusion-Reaction Equations for Large Damkohler and Cell Reynolds Numbers," *Numer. Heat Transfer*, 11, pp. 143~164.
- (6) Leonard, B.P., 1979, "A Survey of Finite Difference of Opinion on Numerical Modelling of Incomprehensive Defective Confusion Equation," Paper in ASME, Applied Mechanics Division, Winter Annual Meeting.
- (7) Agarwal, R.K., 1982, "A Third-Order-Accurate Upwind Scheme for Navier-Stokes Solution at high Reynolds numbers," Paper No. AIAA-81-0112, AIAA 19th Aerospace Science Meeting, St. Louis.
- (8) Gaskell, P.H. and Lau, A.K.C, 1988, "Curvature Compensated Convective Transport : SMART, a New Boundedness Preserving Transport Algorithm," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol.8, pp. 617~641.
- (9) Leonard, B.P., 1988, "Simple High-Accuracy Resolution Program for Convective Modelling of Discontinuities," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol.8, pp. 1291~1318.
- (10) Koo, H.M. and Park, S.O., 1991, "Extension and Application of the QUICKER Scheme to a Non-uniform Rectangular Grid System," *Communi. Appl. Numer. Methods*, Vol.7, pp. 111~122.
- (11) Ghia, U., Ghia, K.N. and Shin, C.J., 1982, "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multi-grid Method," *J. Comp. Physics*, Vol.48, pp. 387~411.
- (12) Davis, G.D.V. and Jones, I.P., 1983, "Natural Convection in a Square Cavity — a Comparison Exercise," *Int. J. Num. Method Fluids*, 3, pp. 227~248.
- (13) Davis, G.D.V., 1983, "Natural Convection of Air in a Square Cavity : a Bench Mark Numerical solution," *Int. Num. Methods Fluids*, 3, pp. 249~274.
- (14) 신종근, 최영돈, 1991, 제2회 전산 유체 역학 분과회 Workshop 초록집.