

〈論 文〉

중력장에서 두개의 탄성팔을 가지는 로봇의 모델링

오 재 윤*

(1991년 12월 9일 접수)

Modeling of a Two Arm Flexible Robot in Gravity

Chae Youn Oh

Key Words : Elastic Arm(탄성팔), Elastic Deflection(탄성휨), Mode Shape(모드 형상), Shortening Effect(줄어듦 효과), Eigenvalue(고유값), Eigenvector(고유벡터)

Abstract

This paper presents techniques used to model a two arm experimental robot. Both arms are compliant and the robot operates in a vertical plane and is therefore influenced by gravity. The robot is being built to study different control strategies for robots containing compliant members. The system is built with extremely flexible members. This limits the required bandwidth of the control electronics, and mimics the flexible motions that are observed for stiffer faster robots. The objective of this paper is to develop a reduced order model of the robot system and to experimentally validate the model. Validation requires that the model includes gravitational effects. Therefore, an assumed modes model is developed which facilitates modeling of gravitational effects. In order to select the order and mode shapes for the model, an analytical solution is derived for a linearized continuous model. This is compared to the assumed modes model to determine the number of mode shapes needed to model the system. The final model, which includes shortening effects, correlates very well with experimental results.

기 호 설 명

<p>b_i : 위팔 mode shape의 계수</p> <p>d_i : 아래팔 mode shape의 계수</p> <p>E_1, E_2 : 위팔과 아래팔의 탄성계수</p> <p>g : 중력 가속도</p> <p>I_1, I_2 : 위팔과 아래팔의 면적 관성 모멘트</p> <p>J_1 : 위조인트에 있는 액츄에이터의 질량 관성 모멘트</p> <p>J_2 : 아래조인트에 있는 액츄에이터의 질량 관성 모멘트(=$J_a + J_b$)</p>	<p>J_a : 위팔의 아래부분에 고정된 액츄에이터 부분의 질량 관성 모멘트</p> <p>J_b : 아래팔의 위부분에 고정된 액츄에이터 부분의 질량 관성 모멘트</p> <p>J_p : End effector와 payload의 질량 관성 모멘트</p> <p>K_{t1} : 위조인트에서의 비틀림 스프링 상수</p> <p>K_{t2} : 아래조인트에서의 비틀림 스프링 상수</p> <p>l_1, l_2 : 위팔과 아래팔의 길이</p> <p>m_2 : 아래조인트에서의 액츄에이터의 질량(=$m_a + m_b$)</p> <p>m_a : 위팔의 아래부분에 고정된 액츄에이터</p>
--	--

*정회원, 전북대학교 정밀기계공학과

	부분의 질량
m_b	: 아래팔의 위부분에 고정된 액츄에이터 부분의 질량
m_p	: End effector와 payload의 질량
r_1, r_2	: 위팔과 아래팔의 j_1 과 j_2 축 방향의 거리
a_i	: 위팔 경계값 문제에서의 frequency parameter
β_i	: 아래팔 경계값 문제에서의 frequency parameter
θ_1, θ_2	: 위팔과 아래팔의 강성 운동 (rigid motion)
ρ_1, ρ_2	: 위팔과 아래팔의 질량 밀도

1. 서 론

적은 동력을 사용하면서 빠른 속도와 높은 정밀도를 가지고 작동하는 로봇을 개발하는 것이 요구되어진다. 이와같은 요구를 만족하게하는 확실한 방법중 하나는 로봇 팔의 무게를 줄이는 것이다. 그러나 속도가 증가되고 무게가 감소됨에 따라 로봇의 구조적인 유연성이 점점 중요하게 된다. 이같은 유연성은 로봇의 정확도와 반응 시간에 영향을 미칠것이다. 그러므로 탄성 머니플레이터들의 정확한 동적 모델을 개발하는 것이 유연한 로봇 시스템의 동적거동을 이해하고, 이들을 제어하기 위한 기법들을 개발하는 데 필요하다.

본 논문은 두개의 팔을 가지는 실험용 로봇트를 모델링 하기위해 사용된 기법들을 제시한다. 로봇트는 수직 평면상에서 움직이므로 중력의 영향을 받는다. 그리고 두팔은 모두 탄성을 가진다. 이 로봇트는 탄성 멤버들을 가지는 로봇트의 여러 제어 기법들을 연구하기위해 만들어졌다. 시스템의 특성들은 아주 유연한 멤버들을 가지게끔 정해진다. 이것은 제어를 위해 쓰이는 전자부품들에 요구되는 밴드폭을 제한하고, 탄성이 크고 빠른 로봇트에서 관찰 되어지는 유연한 운동들을 흉내낸다.

본 논문은 중력의 효과, assumed modes model에서 사용되는 모드 수가 모델의 정확도에 미치는 효과, 그리고 해석적인 결과와 실험적인 결과의 비교를 포함하는 모델링에 대한 초기보고서이다. 이 연구는 액츄에이터/컨트롤러 역학에의해 도입되는 탄성을 근사하게 나타내기위해 조인트들에서 액츄에이터들 대신에 비틀림 스프링들을 사용한다.

본 논문의 첫번째 부분은 탄성팔들의 힘에 의해

생기는 shortening effect를 고려하지않고 유도해서 선형화시킨 연속 운동방정식들의 해석적인 해를 구한다. 이 결과는 assumed mode shapes 수가 모델의 정확도에 미치는 효과를 연구하기위해 assumed modes model의 결과와 비교되어진다. 그리고 탄성팔들의 힘에 의한 shortening effect가 assumed modes model에 도입되어져서 실험 결과와 비교되어진다.

Assumed modes method⁽¹⁾와 유한요소법은 탄성 멤버를 가지는 기구들을 모델링 하는데 가장 흔히 사용되는 방법들이다. 이 방법들은 연속적인 동적 시스템을 유한차원을 가지는 시스템으로 바꾼다. Assumed modes method는 상대적으로 작은 수의 generalized coordinates를 가지고 연속적인 시스템을 유한차원의 시스템으로 근사하게 나타내기 때문에 널리 사용된다. 유한요소법 역시 연속적인 시스템을 discrete model로 근사하게 나타내지만 좀더 통상적으로 사용되는 shape functions의 성질 때문에 assumed modes methods 보다 많은 수의 generalized coordinates를 가진다. 본 논문은 assumed modes techniques에 초점을 맞추기 때문에 참고문헌 검토는 이 분야 연구에 관한 것에 국한한다.

많은 연구원들은 assumed modes method를 사용해서 유연한 머니플레이터들을 모델링하는 방법들을 조사하였다.⁽²⁻¹⁷⁾ 이것들 가운데 실험적인 결과를 가지고 모델들을 입증하는 논문들, shortening effects를 포함하는 논문들, 그리고 assumed mode shape 선택의 효과들을 조사하는 논문들에 참고문헌 검토의 초점을 맞출것이다.

유연한 머니플레이터에 assumed modes method를 최초로 응용한 논문들중 하나인 Book, Maizza-Neto and Whitney⁽²⁾는 두개의 탄성팔을 가지는 머니플레이터의 모델을 개발 하였다. 기하학적(geometric) 경계조건들을 만족하는 admissible functions가 assumed modes로 사용되었다. 높은 주파수 모드들의 탄성팔의 힘에 대한 기여가 처음 두개의 모드들 보다 작기때문에 단지 처음 두개의 assumed modes가 이 모델에 포함됐다. 운동방정식은 Lagrange 방정식을 이용해서 유도되어졌다. 이 모델은 세계의 선형 피드백 제어기법들을 비교하기위해 사용되어졌으며, 실험적으로 모델을 입증하지는 않았다.

좀더 최근 연구들에서 assumed modes model이

실험적으로 입증되어졌다. Schmitz⁽³⁾는 수평면상에서 움직이는 두팔중 앞팔만이 탄성을 가지는 머니플레이터의 assumed modes model을 개발했다. 이 논문은 assumed modes model이 실험결과와 잘 일치함을 보여준다. Oakley and Cannon⁽⁴⁾은 수평면상에서 움직이는 두팔중 앞팔만이 탄성을 가지는 머니플레이터의 해석적 모델을 assumed modes method를 이용해서 유도했다. 그들은 외팔보가 보의 끝에 질량을 가질때의 모우드 형상을 사용한 모델이 외팔보가 보의 끝에 질량을 가지지 않을 때의 모우드 형상을 사용한 모델보다 실험결과와 좀더 가깝게 일치 한다는 것을 입증하였다. Cannon and Schmitz⁽¹³⁾는 수평면상에서 움직이는 한개의 팔을 가지는 유연한 머니플레이터의 일반적인 형태의 상미분 운동 방정식을 Lagrange 방정식과 assumed modes method를 이용해서 유도하였다. 보의 끝지점에 질량을 가지지 않는 pinned-free beam의 고유함수들(eigenfunctions)이 assumed modes로 사용되었다. 상태방정식의 계수행렬의 요소들은 실험적인 확인 절차에의해 구해졌다.

몇몇 연구원들은 assumed modes model에서 assumed mode shapes의 수와 형상의 선택 효과를 조사하였다. Tsujisawa와 Book⁽⁵⁾과 Krishnan과 Vidyasagar⁽⁶⁾는 컨트롤러 개발에 필요한 mode shapes의 수를 평가하였다. 이 두연구는 낮은 차수의 모델이 컨트롤러 디자인에 적합하다는 것을 보여준다. 문헌들에서 머니플레이터에 통상적으로 사용되는 assumed mode shapes는 외팔보의 고유함수(eigenfunctions)⁽⁶⁻⁹⁾들과 admissible functions^(5,10,11)들이다.

많은 연구원들은 특별한 효과들을 포함하는 assumed mode models들을 개발해왔다. 예를들어, 탄성힘에 의한 shortening effects가 몇몇 연구원^(3,4,10,14)들에 의해 해석적으로 그리고 실험적으로 조사되어져왔다. 몇개의 assumed modes modeling 연구^(7,10,15)에서는 기초부의 운동을 포함하였다.

2. 두개의 유연한 팔을 가지는 로봇

Fig. 1은 유연한 팔을 가지는 로봇 시스템의 도식적인 그림을 나타낸다. 이 시스템은 두번째 팔의 끝에 end effector를 가지고 있다. 두개의 탄성팔들은 단지 회전운동만을 허용하는 회전 조인트에 의해 연결되어진다. 그리고 유연한 운동은 회전조

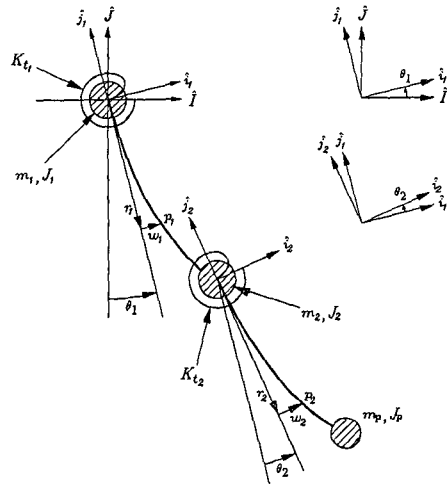


Fig. 1 A schematic diagram of the elastic robot system

인트의 운동과 같은 평면상에서 일어난다고 가정한다. 이 로봇 시스템은 수직 평면상에서 움직인다.

액츄에이터들은 각기의 조인트에서 모델되어지고, 두개의 조인트들에 회전 모멘트를 가하는 것으로 가정되어진다. 질량 관성 모멘트 J_2 를 가지는 질량 m_2 는 두개의 질량 m_a 와 m_b 로 나누어진다. 이 m_a 는 자기 질량 관성 모멘트 J_a 와 J_b 를 가진다. m_a 와 J_a 는 액츄에이터가 뒷팔의 아래부분에 고정된 부분이다. 그리고 m_b 와 J_b 는 액츄에이터가 앞팔의 앞부분에 고정된 부분이다. 컨트롤러 역할을 고려하지 않은 상태에서 초기 시스템의 검증을 위하여 각기의 회전 조인트에 비틀림 스프링 상수 K_{t1} 과 K_{t2} 를 가지는 비틀림 스프링들을 포함한다.

탄성팔들은 팔들의 길이에 비해 작은 단면적을 가진것으로 가정되므로 전단변형(shear deformation)과 회전관성(rotary inertia) 효과들은 무시된다. 그러므로 탄성팔들은 Euler-Bernoulli beam들로 모델되어진다. 자기 팔에서 비틀림(twist)은 없는 것으로 가정된다. 조인트들에서 마찰은 고려되지 않고 탄성 팔들의 구조적인 감쇠(structural damping)는 무시된다.

3. 연속적인 모델(Continuous Model)

시스템의 운동을 나타내는 비선형 편미분방정식은 extended Hamilton's principle을 이용해서 얻

어진다. 시스템의 에너지는 부록 A에 주어진다. 문헌 (18)에서 제시한다. 탄성체에 의한 탄성팔들의 운동방정식의 유도과정은 길기 때문에 여기에서 제시하지 않고 자세한 운동방정식의 유도과정은 참고 등 방정식들은

$$\begin{aligned}
 & K_{t1}\theta_1 + m_2g(w_{l_1} + l_1\theta_1) + m_p g(w_{l_1} + l_1\theta_1 + w_{l_2} + l_2\theta_2 + l_2\theta_1) \\
 & + [(J_1 + J_a + J_b + J_p) + (m_a + m_b)l_1^2 + m_p(l_1^2 + l_2^2) + 2m_p l_1 l_2] \ddot{\theta}_1 \\
 & + [(J_b + J_p) + m_p(l_2^2 + l_1 l_2)] \ddot{\theta}_2 + [(m_a + m_b)l_1 + m_p(l_1 + l_2)] \dot{w}_{l_1} \\
 & + m_p(l_1 + l_2) \dot{w}_{l_2} + J_a \ddot{w}_{l_1} + J_p \ddot{w}_{l_2}
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^{l_1} (\rho A)_1 [g(w_1 + r_1\theta_1) + (r_1^2 \ddot{\theta}_1 + r_1 \dot{w}_1)] dr_1 \\
 & + \int_0^{l_2} (\rho A)_2 [g(w_{l_1} + l_1\theta_1 + w_2 + r_2\theta_2 + r_2\theta_1) + (l_1 + r_2) \dot{w}_{l_1} \\
 & + (l_1 + r_2) \dot{w}_2 + (l_1^2 + r_2^2 + 2l_1 r_2) \ddot{\theta}_1 + (r_2^2 + l_1 r_2) \ddot{\theta}_2] dr_2 = 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 & K_{t2}(\theta_2 - w_{l_1}) + m_p g(l_2\theta_1 + w_{l_1} + l_2\theta_2) \\
 & + [(J_b + J_p) + m_p(l_2^2 + l_1 l_2)] \ddot{\theta}_1 + [(J_b + J_p) + m_p l_2^2] \ddot{\theta}_2 \\
 & + m_p l_2 \dot{w}_{l_1} + m_p l_2 \dot{w}_{l_2} + J_p \dot{w}_{l_2}
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{l_2} (\rho A)_2 [g(r_2\theta_1 + w_2 + r_2\theta_2) + (r_2^2 + l_1 r_2) \ddot{\theta}_1 \\
 & + r_2^2 \ddot{\theta}_2 + r_2 \dot{w}_2 + r_2 \dot{w}_{l_1}] dr_2 = 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$(\rho A)_1 (g\theta_1 + r_1 \ddot{\theta}_1 + \dot{w}_1) + (EI)_1 w_1^{iv} = 0 \tag{5}$$

$$(\rho A)_2 [g(\theta_1 + \theta_2) + (l_1 + r_2) \ddot{\theta}_1 + r_2 \ddot{\theta}_2 + (\dot{w}_2 + \dot{w}_{l_1})] + (EI)_2 w_2^{iv} = 0 \tag{6}$$

이고, 기하학적(geometric) 경계조건들은

$$(w)_{r_1=0} = 0 \tag{7}$$

$$(w)_{r_2=0} = 0 \tag{8}$$

$$(w)'_{r_2=0} = 0 \tag{9}$$

$$(w)_{r_1=0} = 0 \tag{10}$$

이고, 선형화된 natural 경계조건은 다음과 같이 주어진다.

$$(m_a + m_b + m_p)g\theta_1 - (EI)_1 (w_1''')_{r_1=l_1} + (m_a + m_b + m_p) \dot{w}_{l_1} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 & + [(m_a + m_b + m_p)l_1 + m_p l_2] \ddot{\theta}_1 + m_p l_2 \ddot{\theta}_2 + m_p \dot{w}_{l_2} \\
 & + \int_0^{l_2} (\rho A)_2 [g\theta_1 + (l_1 + r_2) \ddot{\theta}_1 + r_2 \ddot{\theta}_2 + \dot{w}_{l_1} + \dot{w}_{l_2}] - d\Gamma_2 = 0
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$K_{t2}(w'_{l_1} - \theta_2) + J_a(\ddot{\theta}_1 + \dot{w}'_{l_1}) + (EI)_1 (w_1')_{r_2=l_1} = 0 \tag{13}$$

$$J_p(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \dot{w}'_{l_2}) + (EI)_2 (w_2')_{r_2=l_2} = 0 \tag{14}$$

4. 선형화된 모델의 해석적인 해

$$\frac{d^4 W_1}{dr_1^4} - \frac{\omega^2}{v_1^2} W_1 = \frac{\Theta_1}{v_1^2} (r_1 \omega^2 - g) \tag{15}$$

되고, 여기서 v_1 은 다음과 같이 정의 된다.

윗팔의 강성(rigid)과 탄성(elastic) 운동은 separated form으로 다음과 같이 표현된다.

$$v_1^2 = \frac{(EI)_1}{(\rho A)_1} \tag{16}$$

$$w_1(r_1, t) = W_1(r_1) e^{j\omega t} \tag{17}$$

$$\theta_1(t) = \Theta_1 e^{j\omega t} \tag{18}$$

식 (15)의 일반해는

식 (13)과 (14)를 식 (3)에 대입하고 재정리하면 다음과 같은 4차 상미분 방정식이

$$\begin{aligned}
 W_1(r_1) = & b_1 \cosh(ar_1) + b_2 \sinh(ar_1) + b_3 \cos(ar_1) \\
 & + b_4 \sin(ar_1) + \Theta_1 \left(\frac{g}{\omega^2} - r_1 \right)
 \end{aligned} \tag{19}$$

이고, α 는 아래와 같이 정의 된다.

$$\alpha^4 = \frac{\omega^2}{\nu_1^2} \quad (18)$$

같은 방법으로 아래팔에 대해서도 강성과 탄성 모드들은 separated form으로 다음과 같이 표현된다.

$$w_2(r_2, t) = W_2(r_2) e^{i\omega t} \quad (19)$$

$$\theta_2(t) = \Theta_2 e^{i\omega t} \quad (20)$$

식 (19)와 (20)을 식 (4)에 대입해서 재정리하면 다음과 같은 4차 상미분 방정식이

$$\frac{d^4 W_2}{dr_2^4} - \frac{\omega^2}{\nu_2^2} W_2 = \frac{1}{\nu_2^2} [-g(\Theta_1 + \Theta_2) + \omega^2 l_1 \Theta_1 + \omega^2 W_{l_1} + \omega^2 (\Theta_1 + \Theta_2) r_2] \quad (21)$$

되고, 여기서 r_2 는 다음과 같이 정의된다.

$$\nu_2^2 = \frac{(EI)_2}{(\rho A)_2} \quad (22)$$

식 (21)의 일반해는 다음과

$$\begin{aligned} W_2(r_2) = & d_1 \cosh(\beta r_2) + d_2 \sinh(\beta r_2) \\ & + d_3 \cos(\beta r_2) + d_4 \sin(\beta r_2) \\ & - (\Theta_1 + \Theta_2) r_2 + \frac{g}{\omega_2} \Theta_2 \\ & - b_1 \cos h(\alpha l_1) - b_2 \sin h(\alpha l_1) \\ & - b_3 \cos(\alpha l_1) - b_4 \sin(\alpha l_1) \end{aligned}$$

같고, β 는 다음으로 정의된다.

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{\nu_2^2} \quad (24)$$

식 (17)과 (23)을 네개의 기하학적 경계조건들(식 (5)~(8)), 네개의 선형화된 natural 경계조건들(식 (9)~(12)) 그리고 다른 두개의 선형화된 운동 방정식(식 (1)과 (2))에 대입하면 다음과 같은 제차행렬계(homogeneous matrix system)로 배열될수 있는 열개의 식을 만든다.

$$\begin{bmatrix} S_{11} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & S_{23} & 0 & S_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & S_{48} & 0 & S_{410} \\ 0 & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} & S_{57} & S_{58} & S_{59} & S_{510} & 0 \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & \Theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{77} & S_{78} & S_{79} & S_{710} & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{87} & S_{88} & S_{89} & S_{810} & d_2 \\ S_{91} & S_{92} & S_{93} & S_{94} & S_{95} & S_{96} & S_{97} & S_{98} & S_{99} & S_{910} & d_3 \\ S_{101} & S_{102} & S_{103} & S_{104} & S_{105} & S_{106} & S_{107} & S_{108} & S_{109} & S_{1010} & d_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (25)$$

행렬 $[S_{ij}]$ 의 영이아닌 요소들은 참고문헌 (18)에서 주어진다. 미지수들($\Theta_1, b_1, b_2, b_3, b_4, \Theta_2, d_1, d_2, d_3, d_4$)이 nontrivial 해를 가지기 위하여 행렬 $[S_{ij}]$ 의 행렬식이 영이어야만 한다.

$$\det[S_{ij}] = 0 \quad (26)$$

이것은 비선형 대수 특성방정식을 만든다. 고유값들은 이 비선형 대수 특성 방정식을 풀어서 구해진다. 이 특성 방정식은 비선형도가 심한 식이기 때문에 이 시스템의 고유값들을 구하기 위하여 이식들을 해석적으로 풀기는 불가능하다. 그래서 비선형 특성 방정식은 컴퓨터를 이용해서 수치적으로 풀어진다. 고유벡터들(eigenvectors)을 구하기 위한 두가지 방법들은 참고문헌 (18)에서 제시된다.

5. Assumed Modes Model : 연속적인 모델과의 비교

이번 절에서는 두개의 팔을 가지는 시스템의 assumed modes model과 연속적인 모델을 비교한다. Assumed modes model의 유도과정은 길기 때문에 여기서 제시하지는 않는다. 운동방정식을 유도하는 전과정은 참고문헌 (18)에서 주어진다.

이 시스템에서 허브(hub)의 회전은 시스템의 하나의 generalized coordinate이다. 그러므로 허브의 회전에 대해서 탄성힘을 정의 하는 것이 자연스럽다. 탄성팔이 허브에 단단히 연결 되었다고 가정

하고, 허브에 부착되어서 허브와 같이 움직이는 좌표계에서 정의할때 허브지점에서 탄성 멤버 기울기는 영이다. 이같은 좌표계의 선택 때문에, 탄성률을 정의하기 위한 가장 자연스런 기본 함수들(basis functions)의 선택은 외팔보가 보의 끝에 질량을 가질때의 모우드 형상이다. 이 함수들은 직교성을 가지고 있고 모든 경계조건들을 만족하므로 문헌들을 통해 이 같은 응용에 사용된다.

모우드 형상 선택에 관해서 본 논문에서 제시하고자 하는 바는 assumed modes의 수가 모델의 정확도에 어떠한 영향을 미치느냐 하는 것이다. Assumed modes model로 부터 얻어진 결과는 팔들이 수직으로 매달려있는 있는 위치($\theta_1=0$, $\theta_2=0$)에 관해 선형화된 식들의 해석적인 해와 비교된다. 보들이 일직선으로 놓여있는 이 위치는 강성과 탄성 운동 사이에 최대의 커플링을 가지게하는 위치중 하나로 선형화 과정에서 필요한 평형점을 쉽

게 찾을 수 있는 위치이다. 더우기 수직으로 놓여있는 위치에서의 모델들 사이의 관계는 다른위치들에 관해서 선형화 시켜서 발견되는 관계들중 전형적인 것이다. 그러므로 단지 수직위치에 관한 결과만이 본 논문에서 제시된다.

Table 1은 다른수의 assumed mode shapes를 사용했을때 얻어지는 시스템의 고유 진동수들을 나타낸다. 이같은 비교들은 강성운동과 탄성운동이 많이 커플되어지고, 강성운동과 탄성운동이 처음 두개의 모우드 형상에 같은 정도로 기여하게끔 선택된 비틀림 스프링 상수의 값들에 기초한 것이다. 이같은 강한 강성과 탄성운동의 커플링 특성은 assumed modes model의 정확도를 평가하는데 필요하다. Table 2는 Table 1에서 사용된 여러개의 선단 질량들의 물성치를 제시한다. Table 2는 선단질량과 두개의 팔을 가지는 시스템 전체질량의 비도 나타낸다. 이와 비슷한 양상을 보여주는 많은

Table 1 Comparisons of the assumed modes model to the exact solution

End Mass	Nat'l Freq.	Exact Solution	Assumed modes per arm		
			1 mode Hz/%error	2 mode Hz/%error	3 mode Hz/%error
1	1	1.3485	1.3711/-1.68	1.3486/ 0.00	1.3485/0.00
	2	5.5924	5.8642/-4.86	5.5938/-0.03	5.5925/ 0.00
	3	20.6776	27.9135/-34.99	20.6834/-0.03	20.6778/ 0.00
	4	33.4967	36.5135/-9.01	33.5606/-0.19	33.4981/0.00
2	1	0.9524	0.9641/-1.23	0.9525/-0.01	0.9524/0.00
	2	5.2176	5.4108/-3.70	5.2183/-0.01	5.2177/0.00
	3	18.7612	25.6853/-36.91	18.7657/-0.02	18.7614/0.00
	4	33.1212	35.4513/-7.04	33.1890/-0.20	33.1235/0.00
3	1	0.8965	0.9061/-1.07	0.8965/0.00	0.8965/0.00
	2	5.1755	5.3544/-3.46	5.1762/-0.01	5.1756/0.00
	3	18.4735	25.2705/-36.79	18.4780/-0.02	18.4736/0.00
	4	33.0093	35.2754/-6.87	33.0773/-0.21	33.0112/0.00
4	1	0.8450	0.8524/-0.88	0.8450/0.00	0.8450/0.00
	2	5.1334	5.2957/-3.16	5.1340/-0.01	5.1335/0.00
	3	18.1527	24.7856/-36.54	18.1576/-0.03	18.1530/0.00
	4	32.8624	35.0694/-6.72	32.9326/-0.21	32.8655/-0.01

unit : $M_p = lb_f - in^t - sec^2$
 $J_p = lb_f - in - sec^2$

Table 2 End masses

END MASS	MASS (m_p)	MASS MOMENT OF INERTIA (J_p)	RATIO (%)
Mass 1	1.051×10^{-4}	1.110×10^{-5}	14.3
Mass 2	4.482×10^{-4}	1.078×10^{-4}	61.1
Mass 3	5.761×10^{-4}	1.385×10^{-4}	78.5
Mass 4	7.475×10^{-4}	1.783×10^{-4}	101.8

다른 비틀림 스프링과 선단질량의 조합에 대한 결과는 참고문헌 (18)에서 제시된다.

기대되어지는^(1,5,6) 바와 같이 discrete model로부터 계산된 고유값들은 assumed modes의 수가 증가됨에 따라 연속적인 모델과의 관계가 향상된다. 각기의 팔에 세개의 assumed modes가 사용될때 (8 자유도를 가지는 모델), 두 모델의 처음 네개 고유진동수는 거의 같은 고유값을 가진다. 기대한 바와 같이 discrete model의 정확도는 모우드들의 수가 감소됨에 따라 떨어진다. 각기의 팔에 두개의 모우드를 사용한 모델(6 자유도 모델)은 처음 네개의 고유진동수를 0.3% 이내에서 예측한다. 그러나 각기의 팔에 하나의 모우드만을 사용 했을 때 처음 두개의 고유진동수는 5% 이내에서 예측되고 세번째 고유진동수는 37% 이내에서 그리고 네번째 고유진동수는 10%이내에서 예측된다. 이것은 모델의 크기와 모델의 정확도 사이에서 모우드수의 가장 좋은 선택은 각기의 팔에 두개의 assumed modes를 사용한 경우이다 라는것을 나타낸다. 이것은 처음 네개의 고유진동수까지는 정확한 모델을 제공한다. 좀더 많은 assumed modes를 사용했을때 정확도는 단지 조금 향상된다. (다섯번째 고유진동수(59.88 Hz)는 다섯번째나 그이상의 모우드에 의한 운동들이 상대적으로 작게끔 처음 네개의 진동수(1.35 Hz, 5.59 Hz, 20.68 Hz, 33.50 Hz)보다 충분히 높다.)

처음 네개의 고유진동수를 예측하기위한 assumed modes model의 효율성은, 잘 기록된 관찰은 아니지만 널리 인식되어져온, 주의깊은 assumed modes의 선택에 의존한다. 이것은 Fig. 2에서 분명하게 설명되어진다. 이그림은 각기의 팔에 하나, 둘, 세개의 모우드를 가지는 assumed modes

model을 이용해서 구한 시스템의 처음 네개의 모우드 형상을 나타낸다. 모우드 형상들은 discrete 고유벡터와 assumed modes의 선형적인 조합에 의해 계산된다. 연속적인 모델로부터 계산된 고유함수(eigenfunction)도 선도들에 포함된다. Table 1에서 주어진 진동수들의 정확도 또한 assumed modes의 선형적인 조합이 얼마만큼 근사하게 시스템의 모우드 형상들을 나타낼 수 있는나에 상응한다.

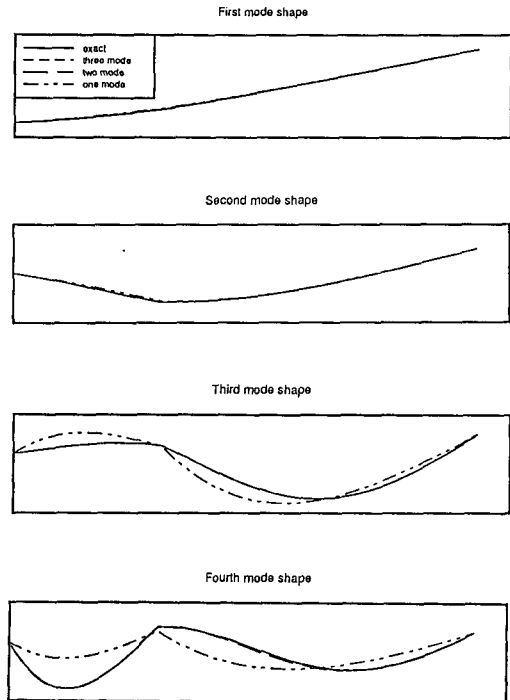


Fig. 2 First four mode shapes

6. The Shortening Effect

개발된 모델을 실험적으로 입증하려는 최초의 시도에서 모델로부터의 결과와 실험결과 사이에 차이가 있음을 발견하였다. 이 차이는 탄성팔들의 탄성힘에 의한 shortening effect로부터 야기된다는 것을 후에 발견하였다. 이 shortening effect가 모델에 포함되었을때 모델의 결과가 실험결과와 잘일치하였다. 다음에서 assumed modes model에 포함되는 shortening effect를 설명한다.

Fig. 3은 탄성팔의 탄성힘에 의한 shortening effect를 보여주는 도식적인 그림이다. 만약 팔에 탄성힘이 있으면, 팔위에있는 점 p 의 local coordinate j 에서의 위치가 허브로부터 팔을 따라서 측정 한 점 p 까지의 거리와 같다고 가정할 수 없다. (3.4,10,14) 흰팔의 조그만 부분의 길이(ds)는

$$ds = \left[1 + \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right]^{1/2} dr \tag{27}$$

이고, 여기서 dw 는 조그만 부분 dr 의 local coordinate i 방향으로 힘을 나타낸다. 팔을 따라서 쥘 허브로부터의 점 p 까지의 거리는

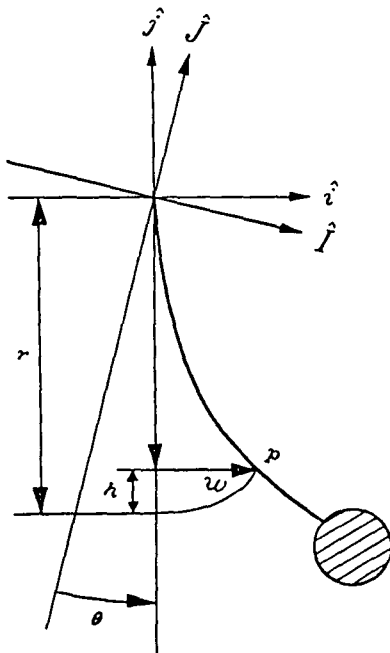


Fig. 3 The shortening effect

$$s = \int_0^{r-h} \left[1 + \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right]^{1/2} dr \tag{28}$$

이고, 여기서 h 는 점 p 의 local coordinate j 방향으로 줄어든 길이를 나타낸다. 식 (28)의 대괄호 항은 이항급수를 이용해서 전개하고 처음 두항만을 취한다. 허브로부터 점 p 까지 팔을 따른 거리는 다음과 같이 근사하게 나타내진다.

$$s \cong \int_0^{r-h} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right] dr \tag{29}$$

Fig. 3으로부터 $s=r$ 이다.

$$r \cong (r-h) + \int_0^{r-h} \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 dr \tag{30}$$

점 p 에서의 힘에 의한 local coordinate j 방향으로의 줄어듬은 다음과 같다.

$$h \cong \int_0^{r-h} \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 dr \tag{31}$$

식 (31)에서 적분상한을 r 로서 근사하게 나타내면 식 (31)은 다음으로 주어진다.

$$h \cong \int_0^r \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 dr \tag{32}$$

Local coordinate j 에서의 점 p 의 위치는 $(-r+h)$ 로 주어진다.

운동에너지를 유도할때 shortening effect를 고려하는 것이 필요하다. 운동 에너지에서 shortening effect는 두가지형태로 나타난다. 하나는 점선속도를 계산하는데 필요한 반경이 줄어들음으로 인한 local axes i_1 과 i_2 방향에서의 속도에서 나타난다. 다른 하나는 팔의 길이가 줄어들음으로 인해 수반되는 팔의 길이방향 속도(\dot{h})에 의한 local axes j_1 과 j_2 방향의 속도에서 나타난다. 만약에 시스템이 수직 위치에 관해서 작동한다면 운동에너지에서 shortening effect는 작다. 그래서, shortening effect에 의해 생기는 모든 운동에너지 항들은 선형화 과정에서 사라진다. 그러나 시스템이 수직위치로부터 벗어나서 작동하면 shortening effect는 선형화 과정에서도 남는다.

Table 3은 shortening effect를 고려한 모델과 고려하지 않은 모델의 처음 네개의 고유진동수를 비교한다. 이 두개의 assumed modes models에서 각각의 팔에 세개의 assumed modes가 사용된다. Table 3은 탄성힘에 의한 shortening effect를 모델에 포함함에 의해 고유진동수가 증가된다는 것을 보

Table 3 Comparison of a model including the shortening effect to a model neglecting the shortening effect

Natural Frequency	End Mass	Without Shortening effect	With Shortening effect	% Increase
1	1	1.5073	1.5331	1.71
	2	1.0306	1.0580	2.66
	3	0.9624	0.9906	2.93
	4	0.8992	0.9283	3.24
2	1	6.6041	6.7168	1.71
	2	6.0498	6.3449	4.88
	3	5.9699	6.3354	6.12
	4	5.8817	6.3447	7.87
3	1	22.414	22.628	0.95
	2	20.612	21.140	2.56
	3	20.363	21.008	3.17
	4	20.094	20.894	3.98
4	1	39.132	39.684	1.41
	2	38.663	39.507	2.18
	3	38.530	39.485	2.48
	4	38.358	39.462	2.88

여준다. 이와 비슷한 양상을 보여주는 많은 다른 비틀림 스프링에 대한 결과는 참고문헌 (18)에서 제시된다.

7. 실험적 입증

본 논문에서 개발된 모델을 입증하기 위해서 실험을 실시하였다. 두개의 탄성팔은 낮은 마찰을 가

지는 베어링을 이용해서 설치되고 액츄에이터 모터 대신에 비틀림 스프링이 사용된다. 이것은 유연한 시스템을 특징지우면서 액츄에이터를 설치하기전에 모델을 입증하기위해 행해진다. 두개의 유연한 팔들은 알루미늄으로 만들어지고 물성과 기계적성질은 부록 B에서 주어진다. 시스템 질량들은 측정되어지고 관성량들은 해석적으로 계산되어진다. 하나의 LVDT와 두개의 가속도계(각기의 팔에 하나

Table 4 Comparison of the first natural frequency

END MASS	MEASURED FREQ. (Hz)	ESTIMATED FREQ. (Hz)	ABS. ERROR (Hz)	REL. ERROR (%)
Mass 1	1.375	1.36	0.02	1.09
Mass 2	0.976	0.97	0.01	0.61
Mass 3	0.929	0.91	0.02	2.05
Mass 4	0.875	0.86	0.02	1.71

Table 5 Comparison of the second natural frequency

END MASS	MEASURED FREQ. (Hz)	ESTIMATED FREQ. (Hz)	ABS. ERROR (Hz)	REL. ERROR (%)
Mass 1	6.062	5.66	0.40	6.63
Mass 2	5.625	5.40	0.23	4.00
Mass 3	5.664	5.40	0.26	4.66
Mass 4	5.601	5.42	0.18	3.23

Table 6 Comparison of the third natural frequency

END MASS	MEASURED FREQ. (Hz)	ESTIMATED FREQ. (Hz)	ABS. ERROR (Hz)	REL. ERROR (%)
Mass 1	20.875	20.96	-0.09	-0.41
Mass 2	19.437	19.49	-0.05	-0.27
Mass 3	19.562	19.37	0.19	0.98
Mass 4	19.125	19.27	-0.15	-0.76

Table 7 Comparison of the fourth natural frequency

END MASS	MEASURED FREQ. (Hz)	ESTIMATED FREQ. (Hz)	ABS. ERROR (Hz)	REL. ERROR (%)
Mass 1	32.000	34.13	-2.13	-6.66
Mass 2	32.000	34.06	-2.06	-6.44
Mass 3	32.250	34.06	-1.81	-5.61
Mass 4	32.125	34.07	-1.95	-6.05

씩)가 시스템의 주파수 반응을 측정하기 위해 사용된다. 실험적으로 측정된 고유진동수들은 중력과 shortening effect 를 포함하는 assumed modes model에 의해 예측된 것들과 비교된다. Table 4~7은 처음 네개의 고유진동수들의 비교를 보여준다.

탄성팔들의 길이와 두개의 비틀림 스프링 상수는 탄성 운동과 강성 운동이 서로 많이 커플 되어지고 처음 두개의 모드 형상에 같은 정도의 기여를 하게끔 선택되어졌다. 두개의 비틀림 스프링들은 컨트롤러/액추에이터 역학에서 도입되는 탄성을 근사하게 나타내기 위해 모델에서 사용된다. Assumed modes model은 처음 네개의 고유 진동수를 2.05%, 6.63%, 0.98%와 6.66% 내로 예측한다. 이것은 모델의 변수들을 조정하지않고 얻어진 assumed modes model의 결과가 실험결과와 훌륭

한 상호 관계를 가지는 것을 나타낸다.

8. 결론

Assumed modes model과 실험 결과를 이용해서 본 논문은 두개의 중요한 관찰을 하였다. 첫번째 관찰은, 이 시스템을 모델하기 위해서 매우작은 수의 assumed modes만이 필요하다는 것이다. 비록 이것은 일반적으로 알려진 사실이지만, 본 논문은 이 같은 발견을 분명하게 입증하는 새로운 해석적인 해를 개발하였다. 실험결과와의 상호관계는 이 같은 결론을 더욱더 확실히 한다. 두번째로, 본 논문은 통상적으로 shortening effects를 고려하지않고 모델되어진 시스템에 대한 shortening effect의 중요성을 보여준다. 이것은 모델결과를 실험결과와

의 상호 관계를 찾는 과정에서 저자에 의해 발견된 사실이다.

다음 단계의 연구는 액추에이터들을 설치하고 개발된 모델과 실험 장비를 사용해서 유연한 로봇 팔들을 제어하기 위한 기법들을 개발하고 평가하는 것이다.

참고문헌

- (1) Meirovitch, L., 1967, "Analytical Methods in Vibrations," Macmillan Company, New York.
- (2) Book, W.J., Maizza-Neto, O. and Whitney, D. E., 1975, "Feedback Control of Two Beam, Two Joint Systems with Distributed Flexibility," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 97, pp. 424~431.
- (3) Schmitz, E., 1989, "Modeling and Control of a Planar Manipulator with an Elastic Forearm," *Proceedings 1989 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Vol.2, pp.894~899.
- (4) Oakley, C.M. and Cannon Jr., R.H., 1989, "End-Point Control of a Two-Link Manipulator with a Very Flexible Forearm: Issues and experiments", *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 1381~1388.
- (5) Tsujisawa, T. and Book, W.J., 1989, "A Reduced Order Model Derivation for Lightweight Arms with a Parallel Mechanism," *Proceedings 1989 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Vol. 2, pp. 728~735.
- (6) Krishnan, H. and Vidyasagar, M., 1988, "Control of a Single-Link Flexible Beam Using a Hankel-Norm-Based Reduced Order Model," *Proceedings 1988 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Vol. 1, pp. 9~14.
- (7) Biswas, S.K. and Klafter, R.D., 1988, "Dynamic Modeling and Optimal Control of Flexible Robotic Manipulator," *Proceedings 1988 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Vol. 1, pp. 15~20.
- (8) Nathan, P.J. and Singh, S.N., 1989, "Variable Structure Control of a Robotic Arm with Flexible Links," *Proceedings 1989 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Vol.2, pp.882~887.
- (9) Djerassi, S. and Kane, T.R., 1985, "Equations of Motion Governing the Deployment of a Flexible Linkage from a Spacecraft," *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 33, No.4, pp.417~428.
- (10) Yigit, A., Scott, R.A. and Ulsoy, A.G., 1988, "Flexible Motion of a Radially Rotating Beam Attached to a Rigid Body," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.121, No.2, pp. 201~210.
- (11) Yang, G. and Donath, M., 1988, "Dynamic Model of a One-Link Robot Manipulator with Both Structural and Joint Flexibility," *Proceedings 1988 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Vol. 1, pp. 476~481.
- (12) Schmitz, E., 1986, "Dynamics and Control of a Planar Manipulator with Elastic Links," *Proceedings of 25th Conference on Decision and Control*, pp. 1135~1139.
- (13) Cannon Jr., R.H. and Schmitz, E., 1984, "Initial Experiments on the End-Point Control of a Flexible One-Link Robot," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 3, No. 3, pp. 62~75.
- (14) Johanni, R., 1988, "On the Automatic Generation of the Equations of Motion for Robots with Elastically Deformable Arms," In *Theory of Robotics*, pp. 143-147. Edited by Kopacek, D., Troch, I. and Desoyer, K., IFAC Proceedings Series, No. 3, Oxford.
- (15) Kane, T.R., Ryan, R.R. and Banerjee, A.K., 1987, "Dynamics of a Cantilever Beam Attached to a Moving Base," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 10, No. 2, pp. 139~151.
- (16) Chassiakos, A.G. and Bekey, G.A., 1986, "Pointwise Control of a Flexible Manipulator Arm," In *Robot Control (SYROCO '85)*, pp. 181~185. Edited by Basañez, L., Ferraté and Saridis, G., IFAC Proceedings Series, No.9, Oxford.
- (17) Book, W.J., 1984, "Recursive Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulator Arms," *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 3, No. 3, pp. 87~101.
- (18) Oh, C.Y., 1990, "Modeling and Control of a Two-Arm Elastic Robot in Gravity", *Dissertation Ph. D., Iowa State University*.

부록 A

● 시스템의 운동에너지와 위치에너지

탄성힘에 의한 shortening effect를 포함하는 시스템의 총 운동에너지는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2} J_1 (\dot{\theta}_1)^2 & (33) \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^{l_1} (\rho A)_1 [(\dot{w}_1)^2 + (w_1 \dot{\theta}_1)^2 + (\dot{\theta}_1)^2 (r_1 - \frac{1}{2} \int_0^{r_1} (w_1')^2 d\xi_1)^2 \\
 & + (\int_0^{r_1} (\dot{w}_1) (w_1') d\xi_1)^2 + 2\dot{w}_1 \dot{\theta}_1 (r_1 - \frac{1}{2} \int_0^{r_1} (w_1')^2 d\xi_1) \\
 & + 2w_1 \dot{\theta}_1 + (\int_0^{r_1} (\dot{w}_1) (w_1') d\xi_1)] dr_1 \\
 & + \frac{1}{2} (m_a + m_b) [(\dot{w}_1)^2 + (w_1 \dot{\theta}_1)^2 + (\dot{\theta}_1)^2 (l_1 - \frac{1}{2} \int_0^{l_1} (w_1')^2 dr_1)^2 \\
 & + (\int_0^{l_1} (\dot{w}_1) (w_1') dr_1)^2 + 2\dot{w}_1 \dot{\theta}_1 (l_1 - \frac{1}{2} \int_0^{l_1} (w_1')^2 dr_1) \\
 & + 2w_1 \dot{\theta}_1 (\int_0^{l_1} (\dot{w}_1) (w_1') dr_1)] \\
 & + \frac{1}{2} J_a (\dot{\theta}_1 + \dot{w}_1')^2 \\
 & + \frac{1}{2} J_b (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^{l_2} (\rho A)_2 [(\dot{w}_1)^2 + (w_1 \dot{\theta}_1)^2 + (\dot{\theta}_1)^2 (l_1 - \frac{1}{2} \int_0^{l_1} (w_1')^2 dr_1)^2 \\
 & + (\int_0^{l_1} (\dot{w}_1) (w_1') dr_1)^2 + 2\dot{w}_1 \dot{\theta}_1 (l_1 - \frac{1}{2} \int_0^{l_1} (w_1')^2 dr_1) \\
 & + 2w_1 \dot{\theta}_1 (\int_0^{l_1} (\dot{w}_1) (w_1') dr_1) \\
 & + (\dot{w}_2)^2 + (w_2)^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + (\int_0^{r_2} (\dot{w}_2) (w_2') d\xi_2)^2 \\
 & + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 (r_2 - \frac{1}{2} \int_0^{r_2} (w_2')^2 d\xi_2)^2 \\
 & + 2w_2 \dot{\theta}_2 (\int_0^{r_2} (\dot{w}_2) (w_2') d\xi_2) \\
 & + 2\dot{w}_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (r_2 - \frac{1}{2} \int_0^{r_2} (w_2')^2 d\xi_2) \\
 & + 2\{\dot{w}_2 \cos \theta_2 - w_2 \sin \theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\} \\
 & \{\dot{w}_1 + \dot{\theta}_1 (l_1 - \frac{1}{2} \int_0^{r_1} (w_1')^2 dr_1)\} \\
 & + 2\sin \theta_2 (\int_0^{r_2} (\dot{w}_2) (w_2') d\xi_2) \{-\dot{w}_1 + \dot{\theta}_1 (l_1 - \frac{1}{2} \int_0^{l_1} (w_1')^2 dr_1)\} \\
 & + 2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 (r_2 - \frac{1}{2} \int_0^{r_2} (w_2')^2 d\xi_2) \\
 & \{\dot{w}_1 + \dot{\theta}_1 (l_1 - \frac{1}{2} \int_0^{r_1} (w_1')^2 dr_1)\} \\
 & + 2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin \theta_2 (r_2 - \frac{1}{2} \int_0^{r_2} (w_2')^2 d\xi_2) \\
 & \{w_1 \dot{\theta}_1 + (\int_0^{l_1} (\dot{w}_1) (w_1') dr_1)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +2\{w_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 + \dot{w}_2 \sin \theta_2\} \\
 & \{w_{l_1} \dot{\theta}_1 + (\int_0^{l_1} (\dot{w}_1) (w_1) dr_1)\} \\
 & +2\cos \theta_2 (\int_0^{r_2} (\dot{w}_2) (w_2) d\xi_2) \{w_{l_1} \dot{\theta}_1 + (\int_0^{r_1} (\dot{w}_1) (w_1) dr_1)\} \\
 & +2w_2 \dot{\theta}_1 (\int_0^{l_2} (\dot{w}_2) (w_2) d\xi_2)] dr_2 \\
 & +\frac{1}{2}m_p [(\dot{w}_{l_1})^2 + (w_{l_1} \dot{\theta}_1)^2 + (\dot{\theta}_1)^2 (l_1 - \frac{1}{2} \int_0^{l_1} (w_1)^2 dr_1)^2 \\
 & + (\int_0^{l_1} (\dot{w}_1) (w_1) dr_1)^2 + 2\dot{w}_{l_1} \dot{\theta}_1 (l_1 - \frac{1}{2} \int_0^{l_1} (w_1)^2 dr_1) \\
 & + 2w_{l_1} \dot{\theta}_1 (\int_0^{l_1} (\dot{w}_1) (w_1) dr_1) \\
 & + (\dot{w}_{l_2})^2 + (w_{l_2})^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + (\int_0^{l_2} (\dot{w}_2) (w_2) dr_2)^2 \\
 & + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 (l_2 - \frac{1}{2} \int_0^{l_2} (w_2) dr_2)^2 \\
 & + 2w_{l_2} \dot{\theta}_2 (\int_0^{l_2} (\dot{w}_2) (w_2) dr_2) \\
 & + 2\dot{w}_{l_2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (l_2 - \frac{1}{2} \int_0^{l_2} (w_2)^2 dr_2) \\
 & + 2\{\dot{w}_{l_2} \cos \theta_2 - w_{l_2} \sin \theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\} \\
 & \{\dot{w}_{l_1} + \dot{\theta}_1 (l_1 - \frac{1}{2} \int_0^{l_1} (w_1)^2 dr_1)\} \\
 & + 2\sin \theta_2 \int_0^{r_2} (\dot{w}_2) (w_2) dr_2 \{-\dot{w}_{l_1} + \dot{\theta}_1 (l_1 - \frac{1}{2} \int_0^{l_1} (w_1)^2 dr_1)\} \\
 & + 2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 (l_2 - \frac{1}{2} \int_0^{r_2} (w_2)^2 dr_2) \\
 & \{\dot{w}_{l_1} + \dot{\theta}_1 (l_1 - \frac{1}{2} \int_0^{l_1} (w_1)^2 dr_1)\} \\
 & + 2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin \theta_2 (l_2 - \frac{1}{2} \int_0^{l_2} (w_2)^2 dr_2) \\
 & \{w_{l_1} \dot{\theta}_1 + (\int_0^{l_1} (\dot{w}_1) (w_1) dr_1)\} \\
 & + 2\{w_{l_2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 + \dot{w}_{l_2} \sin \theta_2\} \\
 & \{w_{l_1} \dot{\theta}_1 + (\int_0^{l_1} (\dot{w}_1) (w_1) dr_1)\} \\
 & + 2\cos \theta_2 (\int_0^{l_2} (\dot{w}_2) (w_2) dr_2) \{w_{l_1} \dot{\theta}_1 + (\int_0^{l_1} (\dot{w}_1) (w_1) dr_1)\} \\
 & + 2w_{l_2} \dot{\theta}_1 (\int_0^{l_2} (\dot{w}_2) (w_2) dr_2)] \\
 & +\frac{1}{2}J_p (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + (\dot{w}_{l_2}))^2
 \end{aligned}$$

탄성힘에 의한 shortening effect를 포함하는 시스템의 총 위치에너지는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
 \Pi = & \frac{1}{2}K_{t_1} \theta_1^2 + \frac{1}{2}K_{t_2} \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial r_1} \right)_{r_1=l_1} - \theta_2 \right]^2 \\
 & + \int_0^{l_1} (\rho A)_1 g (w_1 \sin \theta_1 - r_1 \cos \theta_1) dr_1 \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^{l_1} (\rho A)_1 g \left[\cos \theta_1 \int_0^{r_1} (w_1)^2 d\xi_1 \right] dr_1
 \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^{l_2} (\rho A)_2 g \left[w_1 \sin \theta_1 - l_1 \cos \theta_1 + (w_2 \cos \theta_2 + r_2 \sin \theta_2) \sin \theta_1 \right. \\
 & \left. + (w_2 \sin \theta_2 - r_2 \cos \theta_2) \cos \theta_1 \right] dr_2 \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^{l_2} (\rho A)_2 g \left[\cos \theta_1 \int_0^{l_1} (w_1')^2 dr_1 \right] dr_2 \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^{l_2} (\rho A)_2 g \left[(-\sin \theta_2 \sin \theta_1 + \cos \theta_2 \cos \theta_1) \int_0^{l_2} (w_2')^2 dr_2 \right] dr_2 \\
 & + m_2 g (w_1 \sin \theta_1 - l_1 \cos \theta_1) \\
 & + \frac{1}{2} m_2 g \cos \theta_1 \int_0^{l_1} (w_1')^2 dr_1 \\
 & + m_p g [(w_1 \sin \theta_1 - l_1 \cos \theta_1) + (w_1 \cos \theta_2 + l_2 \sin \theta_2) \sin \theta_1 \\
 & + (w_1 \sin \theta_2 - l_2 \cos \theta_2) \cos \theta_1] \\
 & + \frac{1}{2} m_p g \cos \theta_1 \int_0^{l_1} (w_1')^2 dr_1 \\
 & + \frac{1}{2} m_p g (-\sin \theta_2 \sin \theta_1 + \cos \theta_2 \cos \theta_1) \int_0^{l_2} (w_2')^2 dr_2 \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^{l_1} (EI)_1 (w_1'')^2 dr_1 + \frac{1}{2} \int_0^{l_2} (EI)_2 (w_2'')^2 dr_2
 \end{aligned}$$

부록 B

● 유연한 두팔을 가지는 시스템의 물성과 기계적 성질

PROPERTY	UPPER ARM	LOWER ARM	UNIT
Length	$L_1=9.0$	$L_2=19.0$	<i>in</i>
Density	$\rho_1=2.538 \times 10^{-4}$	$\rho_2=2.538 \times 10^{-4}$	$lb_f \cdot sec^2 \cdot in^{-4}$
Modulus of Elasticity	$E_1=1.000 \times 10^7$	$E_2=1.000 \times 10^7$	$lb_f \cdot in^{-2}$
Area Moment of Inertia	$I_1=1.501 \times 10^{-5}$	$I_2=1.505 \times 10^{-5}$	in^4
Area	$A_1=4.656 \times 10^{-2}$	$A_2=4.668 \times 10^{-2}$	in^2
Mass Moment of Inertia	$J_a=2.1854 \times 10^{-4}$	$J_b=2.3937 \times 10^{-4}$	$lb_f \cdot in \cdot sec^2$
Mass $M_a=1.8395 \times 10^{-4}$	$M_b=2.1861 \times 10^{-4}$	$lb_f \cdot in^{-1} \cdot sec^2$	
Mass Moment of Inertia	$J_1=1.743 \times 10^{-3}$	$J_p=1.110 \times 10^{-5}$	$lb_f \cdot in \cdot sec^2$
Mass		$m_p=1.501 \times 10^{-4}$	$lb_f \cdot in^{-1} \cdot sec^2$