韓國經營科學會誌
第17卷 第3號
1992年 12月

단일 범용설비 운영을 위한 (r, Q) 정책[†]

오근태*

(r,Q) Policy for Operation of a Multipurpose Facility

Geun-Tae Oh*

Abstract

This paper considers an (r, Q) policy for operation of a multipurpose facility. It is assumed that whenever the inventory level falls below r, the model starts to produce the fixed amount of Q. The facility can be utilized for extra production during idle periods, that is, when the inventory level is still greater than r right after a main production operation is terminated or an extra production operation is finished. But, whenever the facility is in operation for an extra production, the operation can not be terminated for the main production even though the inventory level falls below r. In the model, the demand for the product is assumed to arrive according to a compound Poisson process and the processing time required to produce a product is assumed to follow an arbitary distribution. Similarly, the orders for the extra production is assumed to occur in a Poisson process and the extra production processing time is assumed to follow an arbitrary distribution. It is further assumed that unsatisfied demands are backordered and the expected cumulative amount of demands is less than that of production during each production period.

Under a cost structure which includes a setup/production cost, a linear holding cost, a linear backorder cost, a linear extra production lost sale cost, and a linear extra production profit, an expression for the expected cost per unit time for a given (r, Q) policy is obtained, and using a convex property of the cost function, a procedure to find the optimal (r, Q) policy is presented.

† 본 논문은 1990년도 한국과학재단 기초연구비에 의해 연구되었음.
* 수원대학교 산업공학과

1. 서 론

본 연구는 하나의 제품을 하나의 기계에서 생산하여 소비자에게 공급하는 생산/재고 체계에 대한 것이다.

이 분야에서는 전형적으로 (r, R)정책이 주요 통제기법으로 응용되어 왔다. (r, R)정책은 재고수준이 r이하가 되면 생산율을 σ_1에서 σ_2($\sigma_1 < \sigma_2$)로 절환하고 재고수준이 R이 되면 σ_2에서 σ_1으로 절환하는 기법이다. 여기서 σ_1<평균수요율<σ_2이다.

De Kok et al. [4]은 $\sigma_1=0$이라는 가정하에서 수요의 발생은 Poisson process를 따르며 수요의 크기(demand size for the product)는 수요 발생과정과는 독립인 일반적 연속확률변수일 때, 일정한 비율로 연속적으로 제품이 조달되는 경우를 다루고 있다. 그들은 공장의 저장공간이 무한하다고 가정했다. Doshi et al.[5]는 같은 문제를 공장의 저장공간이 한정되어 있고 미충족수요는 backorder로 처리된다는 가정하에서 분석하였다.

그밖의 다른 사람들의 연구들도 기본적으로 $\sigma_1=0$인 경우를 다루었다. Heyman[10]과 Bell [2]은 재고를 전혀 허용치 않는 경우를 고려하였다(즉 $R \leq 0$). 이들은 수요가 Poisson process를 따르며, 제품 한 단위를 생산하는 데 걸리는 시간은 수요과정과는 독립된 일반적 연속확률변수라고 가정하였다. Bell[2]은 기대할인비용(expected discounted cost)을 최소화하는 r과 R을 찾을 수 있는 algorithm을 제시하였다. Puterman[14]은 재고수준이 diffusion process를 따르는 모형을 연구하였다. Gavish와 Graves[6, 7]는 [6]에서는 수요가 Poisson process를 따르고 일정시간 간격으로 제품을 한 단위씩 생산하는 경우를 다루었고, [7]에서는 수요가 compound Poisson process(수요의 크기는 이산형 확률변수이다)를 따르며, 제품 한 단위를 생산하는 시간이 수요과정과는 독립인 일반적 연속확률변수인 경우를 다루었다. 두 경우 모두 미충족 수요에 대해서는 backorder를 가정하였으며, R－r이 고정되어 있을 때 비용함수가 r에 대해서 블록(convex) 임을 증명하여 최적 r과 R을 찾는 데 도움이 되도록 하였다. Graves와 Keilson[8]은 수요의 발생은 Poisson process를 따르고 수요의 크기가 지수분포이며 제품의 조달이 일정률로 연속적으로 조달되는 경우에 대해서 연구하였으나, 최적해를 찾을 수 있는 algorithm을 제시하지 못하였고 목적함수의 어떠한 성질도 규명하지 못했다. 최근에 Lee와 Srinivasan[11, 12]이 [11]에서 수요가 Poisson process를 따르고 제품생산시간이 연속형 확률변수일 때, 비용함수가 r이 주어졌을 때 R에 대해 unimodal임을 증명하였고, [12]에서는 수요를 compound Poisson process로 가정했으며 비용함수가 R－r이 주어졌을 때 R에 대해 블록임을 증명하고 최적 r과 R을 효과적으로 찾을 수 있는 algorithm을 제시하였다.

하지만 (r, R)정책하에서는 재고수준이 R에 이를 때까지 생산을 계속할 수 밖에 없는데, 이는 수요가 매우 크게 발생할 경우에는 매우 장시간 생산을 계속해야 하는 위험이 있다. 특히, 수요가 compound Poisson process와 같은 경우에는 이러한 가능성은 더욱 커지게 되므로, 생산용량에 어떤 제약이 있거나 고정되어 있는 설비에 대해 (r, R)정책을 적용하는 것은 부적절하다고 할 수 있다. 이와 같은 경우에는 (r, Q) 정책이 보다 더 현실적이다. (r, Q)정책이란 재고수준이 r이하로 떨어질 때마다 일정량 Q를 생산하는 정책이다. (r, Q)정책에 관해서는

Sung과 Oh [16]가 수요가 compound Poisson process를 따르며 제품 한 단위 제조에 걸리는 시간의 분포가 일반적인 분포라는 가정하에서 단위시간당 기대비용함수가 Q가 주어졌을 때, r에 대해서 블록임을 증명하고 수치예를 통하여 Q의 최적값이 backorder가 허용되는 경우의 EPQ값과 backorder가 허용되지 않았을 때의 EPQ값 사이에 존재하며, 일반적으로 Q의 최적치는 이 두가지 EPQ값의 평균치와 거의 일치함을 보였다.

본 연구는 Sung과 Oh[16]의 연구를 좀 더 확장하여, 설비가 범용이어서 설비를 사용하지 않고 있는 동안에 이 설비를 다른 제품의 생산에 이용할 수 있는 경우를 고려하였다. 원래의 제품을 주제품(main product)이라 하고, 주제품을 생산하는 것을 주생산(main production)이라 하며, 다른 제품을 생산하는 것을 가외생산(extra production)이라 할 때, 이 설비의 운용방식은 다음과 같다. 가외생산을 요구하는 수요가 주제품의 재고가 r이상이고 설비가 유휴 중일 때 발생하면 설비를 이용할 수 있지만, 설비가 주생산이나 다른 가외생산에 이용되고 있을 때 발생하면 lost sale로 처리된다. 가외생산은 일종의 주문생산이므로 가외생산에서 제조한 제품은 재고로 쌓이지 않기 때문에 본 논문에서 재고라 함은 주제품 재고를 의미한다. 또 설비가 가외생산을 위해서 이용되고 있는 동안에는 주제품의 재고수준이 r이하로 떨어지더라도 가외생산이 완료될 때까지 주생산을 시작할 수 없다. 이와 같은 원칙하에서 다음과 같은 가정을 한다.

① 주제품에 대한 수요는 그 발생빈도가 평균 λ인 Poisson process를 따르며 수요의 크기는 이산확률변수인 compound Poisson process이다.

② 주제품은 한 단위씩 생산되며 한 단위당 제조시간은 평균 $1/\mu$이고 분포함수로서 F(t)를 갖는 연속확률변수이다.

③ 주생산이 행해질 때 마다 고정비 K원과 변동비 c원이 발생하여 한번의 주생산마다 K+cQ원이 발생한다.

④ 주제품에 대한 미충족수요는 backorder로 처리되며 backorder비용은 제품 한 단위에 단위시간당 b원이다.

⑤ 주제품 한 단위의 유지비용은 단위시간당 h원이다.

⑥ 가외생산수요는 평균발생빈도가 λ_s인 Poisson process를 따른다.

⑦ 가외생산 한 건당 처리시간은 평균 $1/\mu_s$이고 분포함수로서 H(t)를 갖는 연속확률변수이다.

⑧ 가외생산수요가 lost sale됨으로써 잃게 되는 기회상실비용은 건당 b_L원이며 가외생산을 수행함으로써 얻게 되는 이익은 건당 b_I이다.

⑨ 주생산 기간 동안 발생한 주제품의 평균수요는 Q보다 작으며, $r+Q \geq 0$이고, $Q \geq 1$이다.

이와 같은 문제는 여러 제조업 분야에서 볼 수 있다. 한정된 용량을 갖고 있는 도금공장에서 설비가 쉬고 있을 때 다른 공장의 주문량 일부를 소화시켜 준다든지, 자동차공장에서 기본형 자동차를 일정량씩 생산하는 도중에 주문(option)형 자동차를 생산하는 경우를 예로 들 수 있다. 이 경우에 Q가 설비용량도 될 수 있으며 경제적 생산량도 될 수 있을 것이다.

2. 재고수준의 안정상태(Steady-state) 확률분포

분석에 앞서 주제품 수요에 관련된 수식들을 다음과 같이 정의하자. $(t_1, t_2]$를 t_1보다 크고 t_2와 같거나 작은 시간구간이라 할 때 $D(t_2-t_1)$를 $(t_1, t_2]$ 동안의 누적수요라 하고 $D(t)=D(t-0)$라고 하면, 본 논문에서 고려하는 compound Poisson process의 $(0, t]$ 동안 누적수요의 분포는

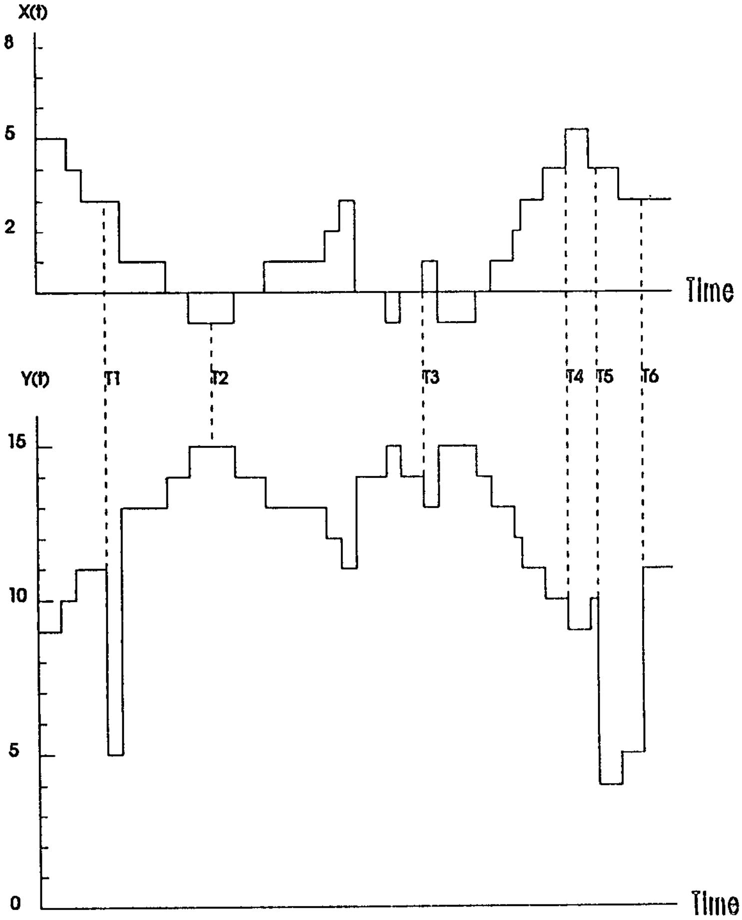
$$P\{D(t)=k\}=\sum_{n=0}^{k}e^{-\lambda t}\{(\lambda t)^n/n!\}q_n(k) \qquad (1)$$

가 된다. 여기서 $q_n(k)$는 수요가 n번 발생해서 그 합이 k개가 될 확률이며, $k\geq 1$에 대해 $q_0(k)=0$, $q_1(k)=p_k$, $n\geq 1$에 대해 $q_n(0)=0$, $q_0(0)=1$, 그리고 $\zeta=\sum_{k=0}^{\infty}kp_k$이다. 또, $\Psi(0)=1$이고, $k\geq 1$에 대해 $\Psi(k)=\sum_{n=0}^{k}q_n(k)$라 하면,

$$\Psi(k)=\sum_{i=0}^{k}\Psi(k-i)p_i \qquad (2)$$

로 표현할 수 있다. 따라서, $p_k(k=1,2,\cdots)$가 주어지면 식 (2)를 이용하여 $q_n(k)$를 구할 수 있다. 이 수식들을 이용하여 다음과 같이 (r, Q) 시스템을 분석한다.

X(t)를 시점 t에서의 주제품의 "재고수준"이라고 하자. 이 (r, Q) 시스템이 서론에서 설명한 바와 같이 운용될 때 X(t)가 가질 수 있는 상태공간을 S라 하면 $S=\{r+Q, r+Q-1,\cdots\}$이 된다. $n\geq 1$에 대해 각 T_n은 주생산이나 가외생산을 위한 설비가동 시작시점 또는 설비가동 완료시점이라 하자(단, $T_0=0$). T_{n+1}을 $X(T_n)$, $X(T_{n+1})$과 T_n에 관련지어 세가지 경우를 생각할 수 있는데, 첫째는 $X(T_n)>r$이고 $X(T_{n+1})\leq r$인 경우로 T_n에 관계없이 T_{n+1}은 주생산 시작시점이고, 두번째는 $X(T_n)\leq r$인 경우로 $X(T_{n+1})$과 T_n에 관계없이 T_{n+1}은 주생산 완료시점이 된다. 마지막 세번째는 $X(T_n)>r$이고 $X(T_{n+1})>r$인 경우로 앞의 두 경우와 달리 T_n이 어떤 시점이었는가에 따라 다시 두가지 상황으로 구분되는데, T_n이 주생산 완료시점이거나 가외생산 완료시점이면 T_{n+1}은 가외생산 시작시점이며, T_n이 가외생산 시작시점이면 T_{n+1}은 가외생산 완료시점이 된다. 즉 X(t)로 이 생산/재고 시스템을 표현하면 T_{n+1}이 어떤 시점을 나타내는지 알기 위해서는 $X(T_n)$과 $X(T_{n+1})$의 값 이외에도 T_n이 어떤 시점이었는가를 알아야 한다. 이런 점을 피하기 위해서 새로이 가외생산이 시작되는 시점에서부터 완료되기 직전까지 즉 설비가 가외생산을 위해 가동되고 있는 기간중 $X(t)\geq r+1$일 때만 $r+Q-X(t)$의 값을 갖고, 그 외의 모든 경우에는 $r+2Q-X(t)$의 값을 갖는 Y(t)를 정의하고, 그 결과로 발생하는 확률과정 $\{Y(t);t\geq 0\}$를 "재고과정"이라 하자. 이 경우 만일 설비가 유휴중이고 주제품의 재고수준이 r보다 큰 상태에 있을 때 가외생산 수요가 발생했다면, 설비는 즉시 가외생산을 위해 가동되고, 가동시점 직전까지 $Y(t)=r+2Q-X(t)$의 관계였다가 바로 가동시점부터 $Y(t)=r+Q-X(t)$로 전환되며, 이후 수요가 적게 발생하여 설비가동이 완료될 때까지 $X(t)\geq r+1$인 상태가 계속된다면 $Y(t)=r+Q-X(t)$의 관계가 유지되다가 설비가동이 완료되는 순간 $Y(t)=r+2Q-X(t)$의 관계로 전환된다. 그러나, 이 기간 도중에 주제품에 대한 큰 수요가 발생해서 어느 시점에 X(t)가 r이하로 떨어지게 되면 그 순간부터 $Y(t)=r+2Q-X(t)$의 관계가 성립되게 된다. 그밖의 모든 경우에는 $Y(t)=r+2Q-X(t)$의 관계가 항상 성립한다. 따라서, Y(t)가 가질 수 있는 상태공간 S^*는 $\{0,1,2,\cdots\}$이 된다.



[그림 1] r=2이고 Q=6일 때의 재고수준과 재고과정과의 관계의 예

r이 2이고 Q가 6일 경우를 예로 들어 주제품의 재고수준과 그에 연관된 재고과정과의 관계를 다음 [그림 1]에 묘사하였다. 여기서, T_1과 T_5는 가외생산의 시작시점들이고, T_2는 가외생산이 완료됨과 동시에 주생산을 시작하는 시점이며, T_3는 주생산이 완료됨과 동시에 주제품의 재고수준이 r이하이기 때문에 다시 주생산이 시작되는 시점이다. 또, T_4는 주생산이 완료되는 시점이며, T_6는 가외생산이 완료되는 시점이다.

$n \geq 1$에 대해 $Y(T_n)$을 Y_n이라 하고 $Y_0=Y(0)$라고 하면, 각 T_n과 Y_n은 다음과 같이 정의될 수 있다.

(i) $0 \leq Y_n \leq Q-1$일 때

T_{n+1} : 가외생산의 완료시점,

Y_{n+1} : $Y_n+D(T_{n+1}-T_n)+Q$,

(ii) $Q \leq Y_n \leq 2Q-1$일 때

T_{n+1} : T_n 이후 첫번째 가외생산 발생시점까지 주제품에 대한 누적수요가 $2Q-Y_n$보다 작은 경우는 가외

생산의 시작시점이고, 아니면

주생산 시작시점,

Y_{n+1} : $D(T_{n+1}+T_n) < 2Q-Y_n$ 이면

$Y_n+D(T_{n+1}T_n)-Q$이고

아니면 $Y_n+D(T_{n+1}T_n)$,

(iii) $Y_n \geq 2Q$일 때

T_{n+1} : 주생산의 완료시점,

Y_{n+1} : $Y_n+D(T_{n+1}-T_n)-Q$.

Y_n과 T_n의 정의에 따라, Y_{n+1}과 $T_{n+1}-T_n$은 단지 Y_n에만 종속되므로 $j \in S^*$, $t \geq 0$에 대해

$$P\{Y_{n+1}=j,\ T_{n+1}-T_n \leq t \mid Y_0,\cdots Y_n : T_0,\cdots T_n\}$$
$$=P\{Y_{n+1}=j,\ T_{n+1}-T_n \leq t \mid Y_n\} \qquad (3)$$

이 되며, $i,\ j \in S^*$, $t \geq 0$가 주어졌을 때 $n \geq 1$에 대해

$$P\{Y_{n+1}=j,\ T_{n+1}-T_n \leq t \mid Y_n=1\}$$
$$=P\{Y_1=j,\ T_1-T_0 \leq t \mid Y_0=i\}$$

가 성립된다.

따라서, $P\{Y_{n+1}=j,\ T_{n+1}-T_n \leq t \mid Y_n=j\}$를 $G_{ij}(t)$라 하면 다음 보조정리가 당연히 성립된다.

[보조정리 1] $\{Y_n,\ T_n ; n \geq 0\}$은 semi-Markov kernel $G(t)=\{G_{ij}(t) ; i,\ j \in S^*,\ t \geq 0\}$를 갖는 Markov renewal process이며, $\{Y(t) ; t \geq 0\}$는 semi-regenerative process이다.

$t \geq 0$에 대해

(i) $j \geq i+Q$, $i \leq Q-1$이면

$G_{ij}(t)=P\{$가외생산을 위한 설비가동이 완료되는 순간이면서 그때까지의 주제품의 수요가 $j-i-Q$인 시점이 t 시점 이하인 경우$\}$

$$=\int_0^t P\{D(w)=j-i-Q\}\, dH(w), \qquad (4)$$

(ii) $Q \leq i \leq 2Q-1$이면

① $i-Q \leq j \leq Q-1$일 때,

$G_{ij}(t)=P\{$설비가동 완료 이후 가외생산에 대한 수요가 최초로 발생한 순간이면서 그때까지 주제품에 대한 수요가 $j-i+Q$가 되는 시점이 t시점 이하인 경우$\}$

$$=\int_0^t P\{D(w)=j-i+Q\}\, \lambda_s e^{-\lambda_s w} dw, \qquad (5)$$

② $j \geq 2Q$일 때,

U_n을 $n-1$번째 주제품 수요와 n번째 수요와의 발생시간간격(단, $U_0=0$), D_n을 n번째 발생한 주제품 수요의 크기(단, $D_0=0$), W는 가외생산 수요의 발생간격이라 하면,

$G_{ij}(t)=P\{$주제품을 위한 설비가동이 시작되는 순간이며 동시에 그때까지 가외생산 수요가 발생하지 않으면서 주제품 누적수요가 $j-i$가 되는 시점이 t시점 이하인 경우$\}$

$$=\sum_{l=0}^{2Q-i-1}\sum_{m=0}^{1} P\{\sum_{n=0}^{m} D_n=1,\ D_{m+1}=j-i-1,$$
$$\sum_{n=0}^{m+1} U_n < W,\ \sum_{n=0}^{m+1} U_n \leq t\}$$
$$=\int_0^t q_1(j-i)\lambda e^{-\lambda u} e^{-\lambda_s u} du$$
$$+\int_0^t \Big[\sum_{l=1}^{2Q-i-1}\sum_{n=1}^{1} q_n(1)\, q_1(j-i-1) \int_0^u$$
$$\frac{\lambda(\lambda(u-w))^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda(u-w)}\, \lambda e^{-\lambda w} dw\Big] e^{-\lambda_s u} du, \qquad (6)$$

(iii) $j \geq i-Q$, $i \geq 2Q$이면

$F_Q(t)$를 $F(t)$ 자신의 Q-fold convolution이라 할 때,

$G_{it}(t)=P\{$주제품의 생산이 끝남과 동시에 그때까지의 주제품 누적수요가 $j-i+Q$가 되는 시점이 t시점 이하인 경우$\}$

$$=\int_0^t P\{D(w)=j-i+Q\}\, dF_Q(w), \qquad (7)$$

$$
G(t)=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ Q-1 \\ Q \\ Q+1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 2Q-1 \\ 2Q \\ 2Q+1 \\ \cdot \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & \cdots & Q-1 & Q & Q+1 & \cdots & 2Q-1 & 2Q & 2Q+1 \; \cdots \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccccc}
0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_0(t) & \alpha_1(t) & \cdots & \alpha_{Q-1}(t) & \alpha_Q(t) & \alpha_{Q+1}(t) \; \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_0(t) & \cdots & \alpha_{Q-2}(t) & \alpha_{Q-1}(t) & \alpha_Q(t) \; \cdots \\
\cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_0(t) & \alpha_1(t) & \alpha_2(t) \; \cdots \\
\beta_0(t) & \beta_1(t) & \cdots & \beta_{Q-1}(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_{Q\,Q}(t) & \sigma_{Q\,Q+1}(t) \; \cdots \\
0 & \beta_0(t) & \cdots & \beta_{Q-2}(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_{Q+1\,Q-1}(t) & \sigma_{Q+1\,Q}(t) \; \cdots \\
\cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \cdots & \beta_0(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_{2Q-1\,1}(t) & \sigma_{2Q-1\,2}(t) \; \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \gamma_0(t) & \gamma_1(t) & \cdots & \gamma_{Q-1}(t) & \gamma_Q(t) & \gamma_{Q+1}(t) \; \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \gamma_0(t) & \cdots & \gamma_{Q-2}(t) & \gamma_{Q-1}(t) & \gamma_Q(t) \; \cdots \\
\cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}\right]
\end{array}
\qquad (9)
$$

(iv) 그 밖의 경우에

$$G_{ij}(t)=0 \qquad (8)$$

가 된다.

식 (4), (5), (6), (7)을 각각 $\alpha_{j-i-Q}(t)$, $\beta_{j-i+Q}(t)$, $\sigma_{i\,j-i}(t)$, $\gamma_{j-i+Q}(t)$로 표시하고, t를 무한대로 보냈을 때 이 식들의 극한값들을 각각 α_{j-i-Q}, β_{j-i+Q}, $\sigma_{i\,j-i}$, γ_{j-i+Q}라 하자.

따라서, semi-Markov kernal G(t)는 다음과 같은 행렬로 표현될 수 있다.

Markov renewal process와 semi-regenerative process의 특성을 이용해서 재고과정의 안정상태확률(steady-state probability)을 유도할 수 있다.

p_{ij}를 imbedded Markov chain $\{Y_n; n\geq 0\}$에서 $Y_n=i$에서 $Y_{n+1}=j$로의 변이확률(transition probability)이라 할 때, i, $j\in S^*$에 대해

$$p_{ij}=P\{Y_{n+1}=j \mid Y_n=i\} \qquad (10)$$
$$=\lim_{t\to\infty} G_{ij}(t)$$

가 된다. P를 (i, j)번째 요소가 p_{ij}인 행렬이라 하면

$$P=\lim_{t\to\infty} G(t) \qquad (11)$$

그러므로 P의 구조는 $\alpha_j(t)$, $\beta_j(t)$, $\gamma_j(t)$, $\sigma_{ij}(t)$가 각각 α_j, β_j, γ_j, σ_{ij}로 바뀐 점을 제외하고는 G(t)의 구조와 같다.

[정리 1] Markov renewal process $\{Y_n, T_n; n\geq 0\}$는 irreducible positive recurrent이며 aperiodic이다.

증 명 : $\{Y_n, T_n; n\geq 0\}$이 *irreducible positive recurrent*임을 보이기 위해서는 $\{Y_n; n\geq 0\}$이, 즉, P가 irreducible positive recurrent임을 보여야 한다. P의 형태로부터 irreducible이면서 aperiodic임이 명백하므로 P가 positive recurrent함을 증명하기 위해서는 다음 stationary equation을 만족하는 벡터 $\pi=\{\pi_j; j\in S^*\}$가 존재함을 보이면 된다. 여기서 π_j는 $\lim_{n\to\infty} P\{Y_n=j \mid Y_0=i\}$를 의미한다.

행렬 P와 관련된 stationary equation들은

$$\pi_j=\begin{cases}\sum_{i=0}^{j}\pi_{Q+i}\,\beta_{j-i},\ 0\le j\le Q-1\text{에서}\\ \sum_{i=0}^{j-Q}\pi_i\alpha_{j-i-Q}+\sum_{i=0}^{j-Q}\pi_{2Q+i}\,\gamma_{j-i-Q},\ Q\le j\le 2Q-1\text{에서},\\ \sum_{i=0}^{Q-1}\pi_i\alpha_{j-i-Q}+\sum_{i=0}^{Q-1}\pi_{Q+i}\sigma_{Q+i\,j-i-Q}+\sum_{i=0}^{j-Q}\pi_{2Q+i}\,\gamma_{j-i-Q},\ j\ge 2Q\\ \text{에서},\end{cases}\tag{12}$$

으로 주어진다.

$\Pi(z)$를 $\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j z^j$라 하자. 식(12)의 양변에 z^j를 곱하고 j에 대해서 더하면 $\Pi(z)$는 다음과 같은 형태로 표현된다.

$$\Pi(z)=[\sum_{i=0}^{Q-1}\pi_i\{z^{2Q+i}K_\alpha(z)-z^iK_\gamma(z)\}+\sum_{i=Q}^{2Q-1}\pi_i\{\sum_{j=0}^{2Q-i-1}\beta_jz^{i+j}+z^{Q+i}(K_\sigma^i(z)-\sum_{j=0}^{2Q-i-1}\sigma_{ij}z^j)-z^iK_\gamma(z)\}]/[z^Q-K_\gamma(z)].\tag{13}$$

여기서 $K_\alpha(z)$는 $\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_jz^j$이고 $K_\sigma^i(z)$는 $\sum_{j=0}^{\infty}\sigma_{ij}z^j$이다.

식(13)의 형태로 보아 함수 $\Pi(z)$는 2Q개의 확률들, 즉, π_0, $\pi_1,\cdots,\pi_{2Q-1}$로 완전히 표현될 수 있다. 이것은 일단 2Q개의 확률들이 지정되면 남은 확률들은 $\Pi(z)$로 부터 계산될 수 있음을 의미한다.

식(13)은 $|z|\le 1$에서 수렴해야 하므로 분모 $z^Q-K_\gamma(z)$를 0으로 하는 해는 역시 분자를 0으로 한다는 사실로부터 처음 Q개의 해 π_0, $\pi_1,\cdots,\pi_{Q-1}$을 식(13)으로부터 구할 수 있다. $z^Q-K_\gamma(z)=0$은 $|z|\le 1$에서 Q개의 서로 다른 해를 갖는다(부록에 증명되어 있음). Q개의 서로 다른 해 중에 당연해(simple zero)로서 $z_0=1$을 택할 수 있고, 나머지 다른 해를 각각 z_1, $z_2,\cdots$, z_{Q-1}이라고 표기하자. 이 중 어느 값에 대해서도 식(13)의 분자는 0이 된다. 이 특성으로부터 다음과 같은 Q개의 식으로 이루어진 연립선형방정식을 구할 수 있다.

$k=1,2,\cdots,Q-1$에 대해

$$\sum_{i=0}^{Q-1}\pi_i[z_k^{2Q+i}K_\alpha(z_k)-z_k^iK_\gamma(z_k)]+\sum_{i=Q}^{2Q-1}\pi_i[\sum_{j=0}^{2Q-i-1}\beta_jz_k^{i+j}+z_k^{Q+i}(K_\sigma^i(z_k)-\sum_{j=0}^{2Q-i-1}\sigma_{ij}z_k^j)-z_k^iK_\gamma(z_k)]=0,\tag{14}$$

$$Q-\mu_\gamma=(2Q+\mu_\alpha-\mu_\gamma)\sum_{i=0}^{Q-1}\pi_i+\sum_{i=Q}^{2Q-1}\pi_i[\sum_{k=0}^{2Q-i-1}\{(\beta_k+\sigma_{ik})(k+i)-Q\sigma_{ik}\}+Q+\mu_\sigma^i-\mu_\gamma]\tag{15}$$

가 된다. 여기서 $\mu_\alpha=\sum_{j=0}^{\infty}j\alpha_j$이고 $\mu_\sigma^i=\sum_{j=0}^{\infty}j\sigma_{ij}$이다.

식(15)는 z가 1에 접근함에 따라 $\Pi(z)$도 1에 접근한다는 성질을 이용하여 식(13)에 l'Hospital의 정리를 적용함으로서 구해진다. 식(14)와 (15)는 2Q개의 미지(unknown) 변수들 π_0, π_1, $\cdots,\pi_{2Q-1}$로 이루어진 Q개의 연립선형방정식이다. 추가로 Q개의 선형방정식이 더 필요한 데, 이는 식(12)에서 처음 Q개의 방정식들(π_0, π_1, $\pi_2\cdots$, π_{2Q-1}로만 구성되어 있다)을 취함으로써 가능해진다. 이로써 2Q개의 변수를 가진 2Q개의 연립선형방정식이 구해지므로 π_0, $\pi_1,\cdots$, π_{2Q-1}을 구할 수 있고, $\Pi(z)$ 또는 식(12)로부터 나머지 π_j를 구할 수 있게 된다. 따라서 Markov chain $\{Y_n;n\ge 0\}$는 positive recurrent하다.

또한, G(t)는 arithmetic이 아니므로 Markov renewal process $\{Y_n, T_n;n\ge 0\}$의 모든 상태들은 aperiodic이다.

이로써 Markov renewal process $\{Y_n, T_n;n\ge 0\}$는 irreducible positive recurrent이며 aperiodic임이 증명되었다. ■

다음은 $\{Y(t);t\ge 0\}$의 안정상태 확률분포(steady-state probability distribution)을 유도하자. $j,k\in S^*$에 대해 $\phi_{jk}(t)=P\{Y(t)=k\mid Y_0=j\}$라고 하자. $\phi_{jk}(t)$의 극한을 ϕ_k라 하면

$$\phi_k = \lim_{t\to\infty} \phi_{jk}(t) \tag{16}$$

$$= \sum_{j\in S^*} \pi_j \int_0^\infty L_{jk}(t)dt \,/ \sum_{j\in S^*} \pi_j m_j$$

가 된다[3]. 여기서 $L_{jk}(t)=P\{Y(t)=k,\ T_1>t\mid Y_0=j\}$이고 m_j는 $Y_n=j$일 때 구간 $T_{n+1}-T_n$의 기대치를 의미하며

$$m_j = \sum_{k\in S^*} \int_0^\infty t\, dG_{jk}(t) \tag{17}$$

$$=\begin{cases} 1/\mu_s,\ 0\le j\le Q-1, \\ \sum_{i=0}^{2Q-j-1}\sum_{n=0}^{i} \dfrac{(n+1)\lambda^n}{(\lambda+\lambda_s)^{n+2}} q_n(i)[\lambda_s+\lambda-\sum_{k=0}^{2Q-j-i-1} q_1(k)], \\ \qquad Q\le j\le 2Q-1, \\ Q/\mu,\ j\ge 2Q, \end{cases}$$

이다.

그러므로

(i) $j\le Q-1$에 대해

$$L_{jk}(t)= \tag{18}$$

$$\begin{cases} P\{D(t)=k-j\}[1-H(t)],\ j\le k\le Q-1\text{일 때}, \\ P\{D(t)=k-j-Q\}[1-H(t)],\ 2Q\le k\text{일 때}, \end{cases}$$

(ii) $Q\le j\le 2Q-1$에 대해

$$L_{jk}(t)=P\{D(t)=k-j\}e^{-\lambda_s t},\ j\le k\le 2Q-1\text{일 때}, \tag{19}$$

(iii) $2Q\le j$일 때는 주생산시작후 n번째 제품의 생산이 완료된 시점을 V_n(단, $V_0=0$), $r_{k,n}(t)=P\{D(t)=k\}F_n(t)$라 할 때,

$$L_{jk}(t)=P\{Y(t)=k,\ V_0>t\mid Y_0=j\}$$

$$= \sum_{n=[j-k+1]^+}^{Q} P\{Y(t)=k, V_{n-1}<t<V_n\mid Y_0=j\}$$

$$= \sum_{n=[j-k+1]}^{Q} P\{D(t)=k-j+n-1\}\, P\{V_{n-1}<t<V_n\}$$

$$= \sum_{n=[j-k+1]}^{Q} [r_{k-j+n-1,n-1}(t)-r_{k-j+n-1,n}(t)] \tag{20}$$

(여기서 $[\cdot]^+$는 정수 x에 대해서 $[x]^+=\max[x,1]$를 의미한다),

(iv) 그밖의 경우에는

$$L_{jk}(t)=0. \tag{21}$$

$A_k=\int_0^\infty P\{D(t)=k\}H(t)dt$, $r_{k,n}=\int_0^\infty r_{k,n}(t)dt$라고 할 때, 위의 $L_{jk}(t)$를 이용하여 다음과 같이 ϕ_k를 유도할 수 있다.

(i) $0\le k\le Q-1$에 대해

$$\phi_k=\sum_{j=0}^{k} \pi_j \int_0^\infty L_{jk}(t)dt \,/ \sum_{j\in S^*} \pi_j m_j$$

$$=\sum_{j=0}^{k} \pi_j\, [\Psi(k-j)/\lambda-A_{k-j}] \,/ \sum_{j\in S^*} \pi_j m_j, \tag{22}$$

(ii) $k=Q$에 대해

$$\phi_Q=\pi_Q \int_0^\infty L_{QQ}(t)dt] \,/ \sum_{j\in S^*} \pi_j m_j$$

$$=\pi_Q/(\lambda+\lambda s), \tag{23}$$

(iii) $Q+1\le k\le 2Q-1$에 대해

$$\phi_k=[\sum_{j=Q}^{k} \pi_j \int_0^\infty L_{jk}(t)dt+\sum_{j=2Q}^{k+Q-1} \pi_j \int_0^\infty L_{jk}(t)dt] \,/$$

$$\sum_{j\in S^*} \pi_j m_j$$

$$=[\sum_{j=Q}^{k} \pi_j \sum_{n=0}^{k-j} \lambda^n q_n(k-j)/(\lambda+\lambda_s)^{n+1}$$

$$+\sum_{j=2Q}^{k+Q-1} \pi_j \sum_{n=[j-k+1]^+}^{Q} (r_{k-j+n-1,n-1}-r_{k-j+n-1,n})] \,/$$

$$\sum_{j\in S^*} \pi_j m_j, \tag{24}$$

(iv) $k\ge 2Q$에 대해

$$\phi_k=[\sum_{j=0}^{Q-1} \pi_j \int_0^\infty L_{jk}(t)dt+\sum_{j=2Q}^{k+Q-1} \pi_j \int_0^\infty L_{jk}(t)dt] \,/$$

$$\sum_{j\in S^*} \pi_j m_j$$

$$=[\sum_{j=0}^{Q-1} \pi_j \{\Psi(k-j-Q)/\lambda-A_{k-j-Q}\}$$

$$+\sum_{j=2Q}^{k+Q-1} \pi_j \sum_{n=[j-k+1]^+}^{Q} (r_{k-j+n-1,n-1}-r_{k-j+n-1,n})] \,/$$

$$\sum_{j\in S^*} \pi_j m_j. \tag{25}$$

3. 단위시간당 기대비용

$Y_0=j$일 때 처음부터 t시점까지 발생한 기대비용을 $C_j(t:r,\ Q)$라 하자. 주어진 가정으로부터 $C_j(t\ ;r,\ Q)$는 주생산에 관련되는 준비/생산비용, 재고유지비용, 재고부족비용과 가외생산에 관련되는 기회상실비용과 수입의 기대치들로 구성되어 있다.

최적 r과 Q를 결정하기 위한 척도는 단위시간당 기대비용, 즉,

$$\lim_{t\to\infty} C_j(t:r,\ Q)/t$$

이며, 이는 다음 정리 2에 유도되어진다.

[정리 2] 단위시간당 기대비용은 초기값 Y_0에 관계없이

$$C(r,\ Q)=\lim_{t\to\infty} C_j\ (t:r,\ Q)/t \qquad (26)$$
$$=C^0(r,Q)+C^1(r,Q)+C^2(r,Q)+C^3(r,Q)$$

이다. 여기서

$$C^0(r,Q)=(K+cQ)\ [(1-\sum_{k=0}^{2Q-1}\pi_k)/\sum_{j\in S'}\pi_j m_j]$$

$C^1(r,Q)=$
$$\begin{cases} h\sum_{k=0}^{Q-1}(r+Q-k)\,\phi_k+h\sum_{k=Q}^{r+2Q-1}(r+2Q-k), & r\geq 0\text{일 때,} \\ h\sum_{k=0}^{r+Q-1}(r+Q-k)\,\phi_k+h\sum_{k=Q}^{r+2Q-1}(r+2Q-k)\,\phi_k, & r<0\text{ 일 때,} \end{cases}$$

$C^2(r,Q)=$
$$\begin{cases} b\sum_{k=r+2Q}^{\infty}(k-r-2Q)\,\phi_k, & r\geq 0\text{일 때,} \\ b\sum_{k=r+Q}^{Q-1}(k-r-2Q)\,\phi_k+b\sum_{k=r+2Q}^{\infty}(k-r-2Q)\,\phi_k, & r<0\text{ 일 때,} \end{cases}$$

그리고

$C^3(r,Q)=$

$$b_L\lambda_s\Big[\ 1-\sum_{j=Q}^{2Q-1}\pi_j m_j/\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j m_j\Big]\ -b_l\sum_{j=0}^{Q-1}\pi_j/\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j m_j$$

이다.

증 명 : 함수 $f(k)$를 $Y(t)=k$일 때 발생하는 총비용이라 하자. 그러면, 처음부터 시점 t까지 발생한 총비용은 $\int_0^t f(Y(u))du$로 나타낼 수 있다. $f_1(k)$, $f_2(k)$, $f_3(k)$, $f_4(k)$를 각각 임의 시점 t에서 $Y(t)=k$일 때 발생하는 주생산 준비/생산비용, 재고유지비용, 재고부족비용, 가외생산 관련비용이라 하면, 총비용 $f(k)$는 $\sum_{n=1}^{4} f_n(k)$이 된다. 임의 (r,Q) 정책하에서 $Y_0=j$이고 [0, t] 동안 발생한 기대비용을 $C_j(t:r,Q)$라 하자. 따라서, $Y_0=j$라 할 때 주어진 (r,Q)정책에 대한 단위시간당 기대비용은

$$\lim_{t\to\infty} C_j(t:r,Q)/t=\lim_{t\to\infty} E_j[\textstyle\int_0^t f(Y(u))du/t]$$
$$=\lim_{t\to\infty} E_j[\textstyle\int_0^t f(Y(u))du]/t$$
$$=\lim_{t\to\infty}\sum_{n=1}^{4} E_j[\textstyle\int_0^t f_n(Y(u))du]/t$$

가 된다. 여기서 $E_j[\cdot]$는 조건부 기대치 $E[\cdot\,|\,Y_0=j]$를 의미한다.

증명을 위하여 다음과 같은 두개의 함수를 정의하자.

$$1_k(Y(t))=\begin{cases}1, & Y(t)=k\text{ 일 때,}\\ 0, & Y(t)\neq k\text{ 일 때,}\end{cases}$$

$$I_{[0,t]}(T_n)=\begin{cases}1, & T_n\in[0,\ t]\text{일 때,}\\ 0, & T_n\notin[0,\ t]\text{ 일 때.}\end{cases}$$

$f_1(Y(t))$는 t시점이 주생산 시작점일 때만 K+cQ의 값을 가지며 그 밖의 경우는 0이다. 따라서 $\int_0^t f_1(Y(u))du$는 t시점까지 발생한 주생산 시작시점의 총횟수에 K+cQ를 곱한 값이므로

$$E_j[\int_0^t f_1(Y(u))du] = (K+cQ) \sum_{k=2Q}^{\infty} E_j\Big[\sum_{n=0}^{\infty} 1_k(Y_n)\, I_{0,t}(T_n)\Big]$$

이다.

$R_{jk}(t) = E_j\Big[\sum_{n=0}^{\infty} 1_k(Y_n)\, I_{0,t}(T_n)\Big]$ 이라고 하면

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} E_j[\int_0^t f_1(Y(u))du]/t \\
&= \lim_{t\to\infty} (K+cQ)\sum_{k=2Q}^{\infty} R_{jk}(t)/t \\
&= (K+cQ) \sum_{k=2Q}^{\infty} \lim_{t\to\infty} R_{jk}(t)/t \\
&= (K+cQ) \sum_{k=2Q}^{\infty} \Big[\pi_k / \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i m_i\Big] \\
&= (K+cQ)\Big[\Big(1-\sum_{k=0}^{2Q-1} \pi_k\Big) / \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i m_i\Big].
\end{aligned}$$

$f_2(Y(t))$는 $Y(t)=k$ 일 때 $r \geq 0$이고 $k \leq Q-1$이거나, $r < 0$이고 $k \leq r+Q-1$이면 $h(r+Q-k)$의 값을 갖고, $Q \leq k \leq r+2Q-1$이면 r의 값에 관계없이 $h(r+2Q-k)$의 값을 갖는다. 따라서,

$\int_0^t f_2(Y(u))du$는 $\sum_k f_2(k) \times$ ([0, t] 동안 $Y(u)$가 k에 머문 시간)

이 되며

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} E_j[\int_0^t f_2(Y(u))du]/t = \lim_{t\to\infty} \sum_k f_2(k)\, E_j\Big[\int_0^t 1_k(Y(u))\, du\Big]/t \\
&= \lim_{t\to\infty} \sum_k f_2(k) \sum_{i=0}^{\infty} \Big[\int_0^t dR_{ji}(s) \int_0^{t-s} L_{ik}(u)du\Big]/t \\
&= \sum_k f_2(k) \sum_{i=0}^{\infty} \lim_{t\to\infty}\Big[\int_0^t dR_{ji}(s) \int_0^{t-s} L_{ik}(u)du / R_{jk}(t)\Big] \cdot [R_{jk}(t)/t] \\
&= \sum_k f_2(k) \sum_{i=0}^{\infty}\Big[\pi_i \int_0^{\infty} L_{ik}(u)du / \pi_k\Big] \cdot \Big[\pi_k / \sum_{l=0}^{\infty} \pi_l m_l\Big] \\
&= \sum_k f_2(k) \sum_{i=0}^{\infty}\Big[\pi_i \int_0^{\infty} L_{ik}(u)du\Big] / \Big[\sum_{l=0}^{\infty} \pi_l m_l\Big] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \sum_k f_2(k) \int_0^{\infty} L_{ik}(u)du / \sum_{l=0}^{\infty} \pi_l m_l
\end{aligned}$$

의 형태를 갖는다.

여기서 $\sum_k f_2(k) \int_0^t L_{ik}(u)du$는 i로 시작한 regeneration interval 동안 발생한 비용의 기대치를 의미하며, $r \geq 0$에 대해

(i) $0 \leq i \leq Q-1$ 일 때

$$h\sum_{k=i}^{Q-1} (r+Q-k) \int_0^{\infty} L_{ik}(u)du + h\sum_{k=2Q}^{r+2Q-1} (r+2Q-k) \int_0^{\infty} L_{ik}(u)du,$$

(ii) $Q \leq i \leq 2Q-1$ 일 때

$$h\sum_{k=i}^{r+2Q-1} (r+2Q-k) \int_0^{\infty} L_{ik}(u)du,$$

(iii) $2Q \leq i \leq r+3Q-2$ 일 때

$$h\sum_{k=i-Q+1}^{r+2Q-1} (r+2Q-k) \int_0^{\infty} L_{ik}(u)du$$

가 되어 $L_{ik} = \int_0^{\infty} L_{ik}(u)du / \sum_{l=0}^{\infty} \pi_l m_l$라 하면,

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} E_j[\int_0^t f_2(Y(u))du]/t = \sum_{i=0}^{Q-1} \pi_i\, h\Big\{\sum_{k=i}^{Q-1} (r+Q-k)\, L_{ik} + \sum_{k=2Q}^{r+2Q-1} (r+Q-k)\, L_{ik}\Big\} \\
&+ \sum_{i=Q}^{2Q-1} \pi_i\, h \sum_{k=i}^{r+2Q-1} (r+2Q-k)\, L_{ik} \\
&+ \sum_{i=2Q}^{r+3Q-2} \pi_i\, h \sum_{k=i}^{r+2Q-1} (r+2Q-k)\, L_{ik} \\
&= h\sum_{k=0}^{Q-1} (r+Q-k) \sum_{i=0}^{k} \pi_i\, L_{ik} + h\,(r+Q)\, \pi_Q\, L_{QQ} \\
&+ h\sum_{k=Q}^{2Q-1} (r+2Q-k)\Big[\sum_{i=0}^{k} \pi_i\, L_{ik} + \sum_{i=2Q}^{k+Q-1} \pi_i\, L_{ik}\Big] \\
&+ h\sum_{k=2Q}^{r+2Q-1} (r+2Q-k)\Big[\sum_{i=0}^{Q-1} \pi_i\, L_{ik} + \sum_{i=2Q}^{k+Q-1} \pi_i\, L_{ik}\Big]
\end{aligned}$$

이므로 식 (22), (23), (24), (25)로 부터

$$\lim_{t\to\infty} E_j[\int_0^t f_2(Y(u))du]/t = h\sum_{k=0}^{Q-1} (r+Q-k)\, \phi_k + h\sum_{k=Q+1}^{r+2Q-1} (r+2Q-k)\, \phi_k$$

가 된다.

$r<0$인 경우에는

(i) $0 \leq i \leq Q-1$ 일 때

$$h\sum_{k=i}^{r+Q-1} (r+Q-k)\, L_{ik}$$

(ii) $Q \leq i \leq 2Q-1$ 일 때

$$h\sum_{k=i}^{r+2Q-1} (r+2Q-k)\, L_{ik}$$

(iii) $2Q \leq i \leq r+3Q-2$ 일 때

$$h\sum_{k=i-Q+1}^{r+2Q-1} (r+2Q-k)\, L_{ik}$$

이 되어

$$\lim_{t\to\infty} E_j[\int_0^t f_2(Y(u))du]/t=$$
$$\sum_{i=0}^{r+Q-1}\pi_i h \sum_{k=1}^{r+Q-1}(r+Q-k)L_{ik}$$
$$+\sum_{i=Q}^{r+2Q-1}\pi_i h \sum_{k=i}^{r+2Q-1}(r+2Q-k)L_{ik}$$
$$+\sum_{i=2Q}^{r+3Q-2}\pi_i h \sum_{k=i-Q+1}^{r+2Q-1}(r+2Q-k)L_{ik}$$
$$=\sum_{i=0}^{r+Q-1}(r+Q-k)h\sum_{k=i}^{r+Q-1}\pi_i L_{ik}+h(r+Q)\pi_Q L_{QQ}$$
$$+h\sum_{i=Q+1}^{r+2Q-1}(r+2Q-k)[\sum_{i=0}^{k}\pi_i L_{ik}+\sum_{i=2Q}^{k+Q-1}\pi_i L_{ik}]$$
$$=h\sum_{i=0}^{r+Q-1}(r+Q-k)\phi_k+h\sum_{k=Q}^{r+2Q-1}(r+2Q-k)\phi_k$$

이 된다.

$f_3(Y(t))$는 $Y(t)=k$에 대해 $r\geq 0$일 때와 $r<0$이고 $k\geq r+2Q$일 때 $b(k-r-2Q)$의 값을 갖고, $r<0$이고 $k\leq Q-1$이면 $b(k-r-Q)$의 값을 갖는다.

$\int_0^t f_3(Y(u))du$도 $\int_0^t f_2(Y(u))du$와 마찬가지로 $\sum_k f_3(k)\hat{1}$ ([0,t] 동안 Y(u)가 k에 머문 시간)

이 되며

$$\lim_{t\to\infty} E_j[\int_0^t f_3 Y(u)du]/t=\sum_i \pi_i \sum_k f_3(k)L_{ik}$$

로 표현된다.

따라서 f_2와 같은 방법으로 $\lim_{t\to\infty} E_j[\int_0^t f_3(Y(u))du]/t$는 $r\geq 0$에 대해

$$\sum_{k=r+2Q}^{\infty}(k-r-2Q)\phi_k$$

이고, $r<0$에 대해서는

$$b\sum_{k=r+Q}^{Q-1}(k-r-2Q)\phi_k+b\sum_{k=r+2Q}^{\infty}(k-r-2Q)\phi_k$$

의 값을 갖는다.

마지막으로 $f_4(Y(t))$는 가외생산에 관련된 비용이다. $f_4(Y(t))$는 가외생산에 대한 수요가 시점 t에 발생했을 때 마침 설비가 가외생산 또는 주생산을 수행하고 있다면 기회상실비용 b_L이 되며, 설비가 유휴중이라면 설비를 대여해 줄 수 있으므로 설비대여이익 b_I가 된다. [0, t]까지 발생한 기회상실비용은 이 기간동안에 설비가 가외생산이나 주생산에 이용된 시간에 관련되며 설비대여이익은 이 기간 동안 가외생산에 대여된 횟수에 비례한다.

설비대여횟수는 주생산 시작점의 수와 유사하게 구할 수 있다. $T_n\leq t<T_{n+1}$인 t에 대해 $Z(t)=Y_n$이라 하자. 그러면, $\{Z(t):t\geq 0\}$는 semi-Markov process가 된다. $\{Z(t):t\geq 0\}$로 부터 [0,t] 동안 설비가 가외생산이나 주생산에 기여한 시간은

$$\sum_{i=0}^{Q-1}\int_0^t 1_i(Z(u))du+\sum_{i=2Q}^{\infty}\int_0^t 1_i(Z(u))du$$

이 된다. [0,t] 동안의 기회상실횟수를 LN(t)라 하면 LN(t)는 평균치

$$\lambda_s[\sum_{i=0}^{Q-1}\int_0^t 1_i(Z(u))du+\sum_{i=2Q}^{\infty}\int_0^t 1_i(Z(u))du]$$

인 Poisson 분포를 한다. 또한 설비대여의 발생횟수는

$$\sum_{k=0}^{Q-1}\sum_{n=0}^{\infty}1_k(Y_n)I_{[0,t]}(T_n)$$

이 된다. 따라서,

$$E_j[\int_0^t f_4(Y(u))du]=b_L E_j[LN(t)]-b_I\sum_{k=0}^{\infty}E_j[\sum_{n=0}^{\infty}1_k(Y_n)I_{[0,t]}(T_n)]$$
$$=b_L\lambda_s[\sum_{i=0}^{Q-1}\int_0^t 1_i(Z(u))du+\sum_{i=2Q}^{\infty}\int_0^t 1_i(Z(u))du]-b_I\sum_{k=0}^{Q-1}R_{jk}(t)$$

이며 $\{Z(t):t\geq 0\}$가 semi-Markov process이므로

$$\lim_{t\to\infty} E_j[\int_0^t 1_i(Z(u))du]/t=\pi_i m_i/\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k m_k$$

이기 때문에

$$\lim_{t\to\infty} E_j\left[\int_0^t f_4(Y(u))du\right]/t$$

$$=b_L\lambda_s\left[\sum_{i=0}^{Q-1}\pi_i m_i+\sum_{i=2Q}^{\infty}\pi_i m_i\right]/\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i m_i-b_I\sum_{k=0}^{Q-1}\pi_k/\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i m_i$$

$$=b_L\lambda_s\left[1-\sum_{i=Q}^{2Q-1}\pi_i m_i/\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i m_i\right]-b_I\sum_{k=0}^{Q-1}\pi_k/\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i m_i$$

가 된다. ■

4. 최적해 탐색 절차

다음에는 단위시간당 기대비용을 최소화하는 최적 r과 Q를 발견하기 위한 절차를 개발한다. 사실상 C(r,Q)는 너무 복잡해서 r과 Q의 최적해를 동시에 찾기는 불가능하다. 하지만 Q의 값이 고정되어 있을 때 C(r,Q)는 r의 볼록함수가 됨을 알 수 있다. 이것은 다음과 같이 증명된다.

[정리 3] 하나의 고정된 Q에 대해 비용함수 C(r,Q)는 순환관계(recursive relation)

$$C(r+1,Q)-C(r,Q)=\begin{cases}(h+b)\sum_{k=0}^{r+2Q}\phi_k-b, & r\ge 0\text{에 대해}\\(h+b)\left[\sum_{k=0}^{r+Q}\phi_k+\sum_{k=Q}^{r+2Q}\phi_k\right]-b, & r<0\text{에 대해,}\end{cases}\tag{27}$$

를 만족하며, r에 대해서 볼록(convex)이다.

증 명 : 정리 2의 결과로부터 $r\ge 0$일 때,

$$\begin{aligned}&C(r+1,\ Q)-C(r,Q)\\&=h\left[\sum_{k=0}^{Q-1}(r+Q+1-k)\phi_k+\sum_{k=Q}^{r+2Q}(r+2Q+1-k)\phi_k\right]\\&\quad+b\sum_{k=r+2Q+1}^{\infty}(k-r-2Q-1)\phi_k\\&\quad-h\left[\sum_{k=0}^{Q-1}(r+Q-k)\phi_k+\sum_{k=Q}^{r+2Q-1}(r+2Q-k)\phi_k\right]\\&\quad-b\sum_{k=r+2Q}^{\infty}(k-r-2Q)\phi_k\\&=(h+b)\sum_{k=0}^{r+2Q}\phi_k-b.\end{aligned}\tag{28}$$

$r<0$일 때도 같은 방법으로

$$C(r+1,Q)-C(r,Q)=(h+b)\left[\sum_{k=0}^{r+Q}\phi_k+\sum_{k=Q}^{r+2Q}\phi_k\right]-b\tag{29}$$

더욱이 $\phi_j\ge 0$이므로 식(28)과 (29)의 우변은 r에 대해 비감소(nondecreasing)하기 때문에 C(r,Q)는 r에 대해 볼록함수이다. ■

정리 3으로부터 Q가 주어졌다는 가정하에서는

$$C(r+1,Q)-C(r,Q)\ge 0\tag{30}$$

와

$$C(r,Q)-C(r-1,Q)\le 0\tag{31}$$

을 만족하는 r이 최적해가 됨을 알 수 있다. 따라서, r을 찾기 위한 순환탐색절차(recursive search procedure)는 다음 따름정리를 stopping rule로 이용할 수 있다.

[따름정리 1] Q가 주어졌을 때, C(r,Q)를 최소화하는 r은 부등식

$$\sum_{k=Q}^{r+2Q-1}\phi_k\le b/(h+b)\text{와 }\sum_{k=Q}^{r+2Q}\phi_k\ge b/(h+b),\tag{32}$$

$$\sum_{k=Q}^{2Q-1}\phi_k\ge b/(h+b)\text{와 }\sum_{k=0}^{Q-2}\phi_k+\sum_{k=Q}^{2Q-2}\phi_k\le b/(h+b),\tag{33}$$

$$\sum_{k=0}^{r+Q-1}\phi_k+\sum_{k=Q}^{r+2Q-1}\phi_k\le b/(h+b)\text{와 }\sum_{k=0}^{r+Q}\phi_k+\sum_{k=Q}^{r+2Q}\phi_k\ge b/(h+b),\tag{34}$$

또는

$$\phi_0+\phi_Q\ge b/(h+b),\tag{35}$$

중에 하나를 만족한다. 부등식 (32)를 만족하면 $r\ge 0$, (33)을 만족하면 $r=-1$, (34)를 만족하면 $-Q+1\le r\le -2$이며 (35)를 만족하면 $r=-Q$가 된다.

증 명 : 식 (30)과 (31)로 부터 쉽게 증명된다. ■

$r^*(Q)$를 Q가 주어졌을 때 r의 최적해라고 하자. 계산경험에 의하면 $C(r^*(Q),Q)$는 Q에 대해 unimodal이고, Q의 최적해는 아래와 같이 정의되는 Q_L과 Q_U 사이에 존재함을 알 수 있었으나 이 사실을 증명할 수는 없었다.

$$Q_L=\left\lceil\sqrt{\frac{2(K+cQ)\lambda\zeta}{h(1-\lambda\zeta/\mu)}}\right\rfloor^+, \tag{36}$$

$$Q_U=\left\lceil\sqrt{\frac{2K+2c\lambda\zeta(1-\lambda\zeta/\mu)}{hb(1-\lambda\zeta/\mu)^2/(h+b)}}\right\rfloor^+ +1.$$

여기서 $\lceil\cdot\rfloor^+$는 truncation을 의미하며, Q_L과 Q_U-1은 각각 재고부족을 허용치 않았을 때와 backorder가 허용되었을 때의 EPQ의 truncate된 값이다.

위 사실을 근거로 하여 다음과 같은 절차를 최적해 탐색에 사용하면 최적해를 찾는데 도움이 된다.

단계 1 : Q의 초기치로서 $Q_0=\lceil(Q_L+Q_U)/2\rfloor^+$를 선택한다.

단계 2 : $r^*(Q_0)$와 $C(r^*(Q_0), Q_0)$, $r^*(Q_0+1)$과 $C(r^*(Q_0+1), Q_0+1)$을 구한다.

단계 3 : (i) $C(r^*(Q_0), Q_0) > C(r^*(Q_0+1), Q_0+1)$일 때

Q의 값을 1씩 증가시켜 가면서 $r^*(Q)$와 $C(r^*(Q), Q)$를 구하다가 계속 감소되던 $C(r^*(Q),Q)$의 값이 증가될 때 멈춘다. $C(r^*(Q), Q)$의 값을 증가시키는 Q값 이전의 Q값이 Q의 최적해가 되며 이때의 $r^*(Q)$가 r의 최적해가 된다.

(ii) $C(r^*(Q_0), Q_0) < C(r^*(Q_0+1), Q_0+1)$일 때

Q의 값을 1씩 감소시켜 가면서 $r^*(Q)$와 $C(r^*(Q), Q)$를 구하다가 계속 감소되던 $C(r^*(Q), Q)$의 값이 증가될 때 멈춘다. $C(r^*(Q), Q)$의 값을 증가시키는 Q값 이전의 Q값이 Q의 최적해가 되며 이때의 $r^*(Q)$가 r의 최적해가 된다.

5. 수치예

주제품 수요는 수요의 크기가 1 또는 2인 compound Poisson 과정이고, 가외생산 수요는 Poisson 과정인 경우에 대해서 조건의 변화에 따라 총비용함수의 형태와 최적(r,Q)정책이 어떻게 변하는지 알아보자.

주제품에 대한 기본 조건으로 수요은 평균발생빈도 $\lambda=0.07$, 수요의 크기의 확률 $p_1=0.75$, $p_2=0.25$인 compound Poisson 과정을 따르고, 한 단위당 생산시간은 평균생산시간 $1/\mu=1$인 지수분포를 하며, 재고유지비용 $h=0.1$, 재고부족비용 $b=1$, 고정비 $K=5$, 변동비 $c=3$으로 주어지고, 가외생산에 대한 기본조건으로는 수요가 평균발생빈도 $\lambda_s=0.02$인 Poisson 과정, 한 건당 처리시간은 단위 당 평균처리시간 $1/\mu_s=1$인 지수분포, 한 건당 기회상실비용 $b_L=0.75$, 한 건당 이익 $b_I=3$으로 주어진 경우를 예로 들었다.

[그림 2]는 위와 같은 조건하에서 Q에 대해 $C(r^*(Q), Q)$가 unimodal임을 보여준다. 그림 3, 4, 5는 각각 주생산 고정비 K, 주제품 재고유지비용 h, 가외생산 한 건당 이익 b_I를 기본가정에서 변화시켰을 때 r과 Q의 최적치가 변화되는 모습을 보여준다. Q^*를 Q의 최적치, r^*를 r의 최적치라 할 때 각 그림에서 △, ∘, □는 각각 Q_0, Q^*, r^*를 의미하며, 점선은 Q_L과 Q_U를 나타내는

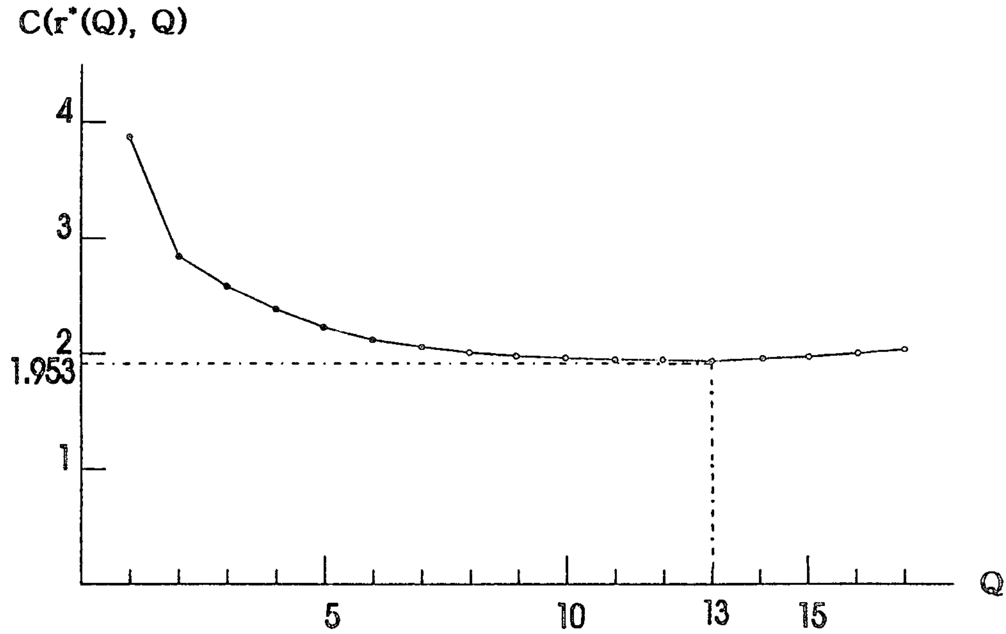
데, 대체로 모든 그림에서 Q*가 Q_L과 Q_U사이에 있고 Q_0와 큰 차이가 없음을 알 수 있다.

[그림 3]에서는 고정비 K가 증가함에 따라 Q*를 증가시켜 주제품 생산시작시점 간격을 넓힘으로써 고정비 K의 발생기회를 줄이고, 반면 r*를 감소시켜 평균재고량을 줄임으로써 Q의 증가에 따른 재고유지비를 줄이려고 함을 보여준다.

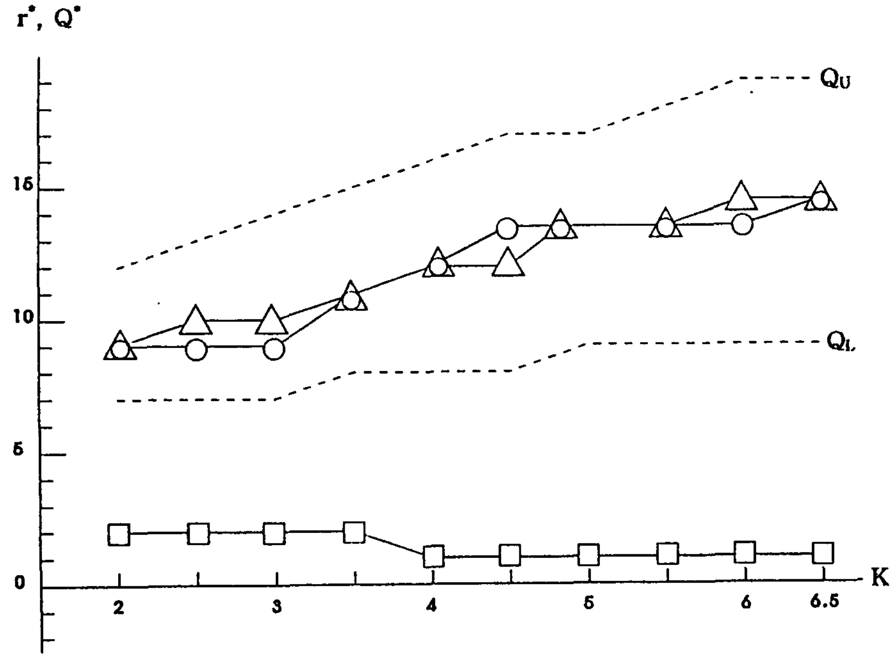
[그림 4]에서는 h를 증가시킴에 따라 Q*가 급격히 작아지다가 일정한 값에 이르고, r*는 거의 변화가 없음을 보여준다. 이는 재고유지비용 h가 어느 정도 커지면 Q*와 r*에 큰 영향을 미치지 못함을 예상케 한다.

[그림 5]에서는 b_1가 증가함에 따라 Q*가 약간 증가하고 r*는 약간 감소함을 보여준다. b_1가 증가하면서 상대적으로 b_L과 차이가 커질 때에는 이 방법이 다른 어떤 방법보다 주제품의 재고유지/부족비용을 크게 증가시키지 않으면서도 가외생산 수요를 많이 처리할 수 있게 하는 것으로 해석된다. 하지만, b_1가 어느 정도 커지면 Q*와 r*는 변화가 없는 데 이는 주제품의 생산비와 재고유지비용의 증가 때문에 Q*와 r*에 더 이상의 변화를 줄 수 없는 것으로 보인다.

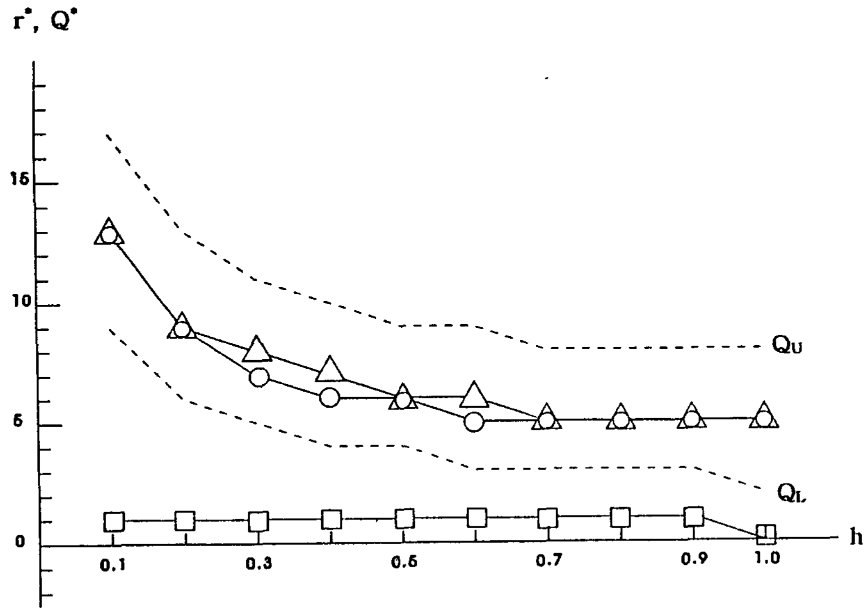
이 수치예의 분석에 사용된 컴퓨터 기종은 cyber 174이며, 특히 $\prod(z)=0$를 만족하는 Q개의 해(모두 복소수임)를 구하는 데는 IMSL의 Muller 알고리즘을 이용하였고, 이들 Q개의 해를 이용해서 식 (12), (14), (15)로 부터 연립방정식을 구성해 π_0, $\pi_1, \cdots, \pi_{2Q-1}$의 값을 계산할 때에도 IMSL을 이용했으며 모든 계산은 double-precision을 취하여 수행되었다.



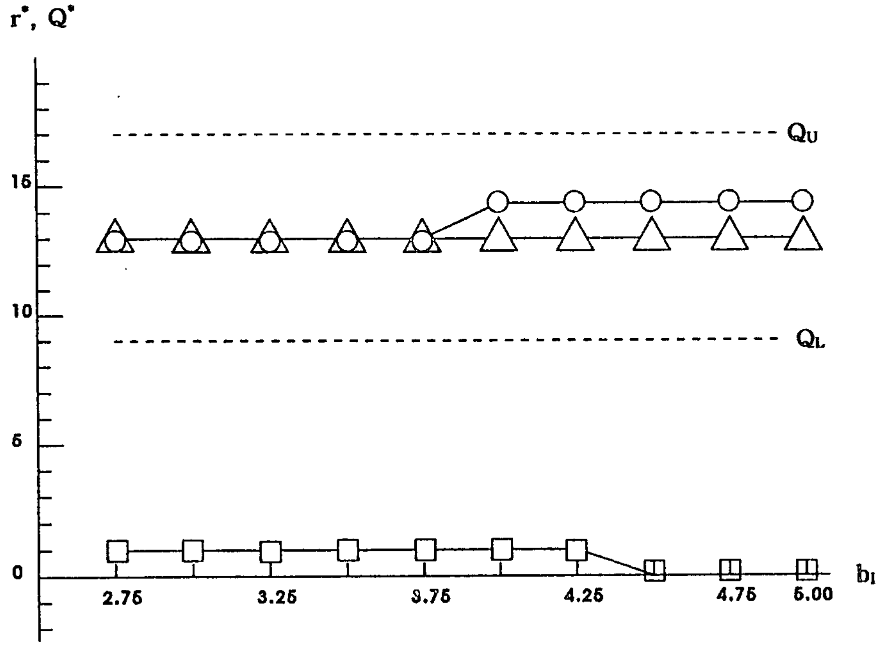
[그림 2] Q가 주어져 있을 때 C(r*(Q), Q)의 unimodality



[그림 3] K를 변화시켰을 때 r*와 Q*의 변화



[그림 4] h를 변화시켰을 때 r*와 Q*의 변화



[그림 5] b_l를 변화시켰을 때 r^*와 Q^*의 변화

6. 결 론

본 연구는 수요가 compound Poisson process일 때 단일 범용설비 생산/재고 시스템을 위한 (r,Q) 정책을 다루었다. 하나의 정책이 주어졌을 때, Markov renewal 이론을 응용하여 재고수준의 안정상태 확률분포를 해석적인 형태로 구하였고, 이를 이용하여 단위시간당 기대비용함수를 유도하였으며, Q가 주어졌을 때 기대비용함수를 r에 대한 순환식(recursive equation)으로 표현하였다. 순환식을 이용하여 Q가 주어졌을 때 기대비용함수가 r에 대해 볼록임을 증명하고, 안정상태분포만을 이용하여 간단히 최적 r, 즉 $r^*(Q)$를 구할 수 있는 방법도 제시하였다. 수치예를 통하여 기대비용함수가 unimodal함을 예상할 수 있었고, 이를 이용하여 최적 r과 Q를 찾는데 도움이 되는 탐색적 방법(heuristic method)을 제시하였다.

그러나, 이 논문에서 제시한 기법의 문제점은 Q가 조금만 커져도 최적해를 구하는 데 많은 시간이 소요된다는 점이다. 계산시간의 대부분은 π와 ϕ의 계산에 소요되는 데, 특히 $\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_{2Q-1}$의 값을 구하기 위해서는 Q가 커짐에 따라 복소수를 포함한 상당한 크기의 역행렬 계산을 하여야 하는데 라운드-오프(round-off error) 때문에 double-precision으로 행하여야 하고, ϕ의 값도 정확성 유지를 위해서 역시 double-precision으로 계산하기 때문에 Q의 값이 클 때에는 많은 시간이 걸릴 수 밖에 없다. Q의

값이 12 정도일 때 cyber 174 컴퓨터에서 π와 ϕ의 계산에만 실행시간이 20초 내외가 걸리기 때문에 일반 PC를 이용하여 최적해를 탐색할 때에는 상당히 긴 시간이 소요되리라 예상된다.

앞으로 이러한 문제를 해결해 줄 수 있는 방법이 제시된다면 이 모형은 주생산을 하기 위해 준비시간이 필요한 경우나 재고수준이 r 이하로 떨어질 경우에는 가외생산이 진행되고 있더라도 중지시키고 주생산을 할 수 있는 경우로도 확장될 수 있을 것이다. 바라건데, 이 모형이 하나의 설비에서 복수의 제품을 생산하는 경우로 확장될 수 있다면, 그 원리가 생산라인의 PLC와 같은 것에 적용되어 큰 실용성을 갖게 되리라 생각된다.

부 록

Markov chain $\{Y_n; n \geq 0\}$가 invariant distribution을 갖음을 보이기 위해서 다음 정리가 필요하다.

[정리] $K_r(z)$를 $\sum_{j=0}^{\infty} r_j z^j$라 하고 $B(z)=z^Q-K_r(z)$라 하면 다항식 $B(z)$는 $|z|\leq 1$에서 Q개의 서로 다른 해를 갖는다.

증　명 : 먼저 $B(z)=0$을 만족하는 해가 Q개 존재함을 Rouche의 이론을 응용하여 보인다. $f(z)=z^Q$, $g(z)=K_r(z)=\sum_{j=0}^{\infty} r_j z^j$라 하자. 그러면, 임의의 작은 $\delta>0$에 대해 boundary $|z|=1+\delta$상에서 $|f(z)|>|g(z)|$임을 증명하면 된다.

$\delta \sum_{j=0}^{\infty} r_j \sum_{j=0}^{j} \binom{j}{n} \delta^{n-2} \leq \varepsilon < Q-\mu_r$를 만족하는 ε이 주어졌을 때

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{j=0}^{\infty} r_j z^j\right| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} r_j |z|^j \\
&= r_j(1+\delta)^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} r_j \left[(1+j\delta)+\delta^2 \sum_{n=2}^{j} \binom{j}{n} \delta^{n-2}\right] \\
&= 1+\mu_r\delta+\delta^2 \sum_{j=0}^{\infty} r_j \sum_{n=2}^{j} \binom{j}{n} \delta^{n-2} \\
&\leq 1+\mu_r\delta+\varepsilon\delta \\
&< 1+Q\delta \\
&< (1+\delta)^Q=|z|^Q
\end{aligned}
$$

가 된다. 따라서 $f(z)=0$는 Q개의 해를 가질 수 있으므로 $B(z)$도 Q개의 해를 갖는다.

다음에 위의 Q개의 해 중에서 중근은 하나도 없음을 보여야 한다. 이는 한 다항식이 m차의 중근을 갖고 있다면 그 다항식의 $m-1$번째 도함수까지의 모든 도함수가 그 중근을 해로 갖는다는 특성을 이용하여 증명된다.

$B(z)$가 $|z|\leq 1$에서 중근을 갖고 있다고 하자. $\hat{z}$ 을 이 중근들 중의 하나라고 하자. 그러면 $\hat{z}$은 최소한

$$\hat{z}^Q = \sum_{j=0}^{\infty} r_j \hat{z}^j$$

$$Q\hat{z}^Q = \sum_{j=0}^{\infty} j r_j \hat{z}^{j-1}$$

을 만족한다.

위 두식으로부터 다음과 같은 관계식이 성립된다.

$$Q \sum_{j=0}^{\infty} r_j \hat{z}^j = \sum_{j=0}^{\infty} j r_j \hat{z}^j$$

그러나 이 등식이 성립하기 위해서는 모든 j에 대해 $Q=j$가 성립하여야 하므로 $\hat{z}$는 중근이 될 수 없다. 따라서, $B(z)$는 $|z|\leq 1$에서 서로 다른 Q개의 해를 갖는다. ■

참 고 문 헌

[1] Bailey, N.T.J., "On Queueing Process with Bulk Service," *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, Vol. 16(1954), pp.80-87.

[2] Bell, C.E., "Characterization and Computation of Optimal Policies for Operating an M/G/1 Queueing System with Removable Server," *Operations Research*, Vol.19(1971), pp.208-218.

[3] Cinlar, E., *Introduction to Stochastic Processes*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

[4] De Kok, A.G., H.C. Tijms, and F.A. Van Der Duyn Schouten, "Approximations for the Single-Product Production-Inventory Problem with Compound Poisson Demand and Service-Level Constraints," *Advances in Applied Probability*, Vol. 16(1984), pp.378-401.

[5] Doshi, B.T., F.A. Van Der Duyn Schouten, and A.J.J. Talman, "A Production-Inventory Control Model with a Mixture of Backorders and Lostsales," *Management Science*, Vol.24(1978), pp.1078-1086.

[6] Gavish, B. and S.C. Graves, "A One-Product Production/Inventory Problem under Continuous Review Policy," *Operations Research*, Vol.28(1980), pp.1228-1236.

[7] Gavish, B. and S.C. Graves, "Production/Inventory Systems with a Stochastic Production Rate under a Continuous Review Policy," *Computers and Operations Research*, Vol. 8(1981), pp.169-183.

[8] Graves, S.C. and J. Keilson, "The Compensation Method Applied to a One-Product Production/Inventory Problem," *Mathematics of Operations Research*, Vol.6(1981), pp.246-262.

[9] Gross, D. and C. Harris, *Fundamentals of Queueing Theory*, John Wiley and Sons, New York, 1985.

[10] Heyman, D., "Optimal Operating Policies for M/G/1 Queueing Systems," *Operations Research*, Vol.16(1968), pp.362-382.

[11] Lee, H.S. and M.M. Srinivasan, "The Continuous Review (s,S) Policy for Production/Inventory Systems with Poisson Demands and Arbitrary Processing Times," Technical Report 87-33, Department of Industrial and Operations Engineering, University of Michigan, December, 1987.

[12] Lee, H.S. and M.M Srinivasan, "The (s,S) Policy for the Production/Inventory System with Compound Poisson Demands," Technical Report 88-2, Department of Industrial and Operations Engineering, University of Michigan, April, 1988.

[13] Orkenyi, P., "Optimal Control of the M/G/1 Queueing System with Removable Server Linear and Non-Linear Holding Cost Function," Technical Report No. 65, Stanford O.R. Department, August, 1976.

[14] Puterman, M., "A Diffusion Process Model for a Storage System," In Logistics, ed. M. Geisler, TIMS Studies in the

Management Sciences, 1(1975), North -Holland Amsterdam, pp.143－159.

[15] Sobel, M.J., "Optimal Average Cost Policy for a Queue with Start-up and Shut-down Cost," *Operations Research*, Vol.17(1969), pp.145－162.

[16] Sung, C.S. and G.T. Oh, "(r,Q) Policy for a Single-Product Production/Inventory Problem with a Compound Poisson Demand Process," *Journal of Operations Research Society of Japan*, Vol.30(1987), pp.132－139.