
 ◎ 研究論文

分枝를 갖는 構造物의 縱·굽힘 連成 自由振動解析

(傳達影響係數法에 의한 定式化)

문덕홍* · 최명수** · 공석조***

Axial and Flexural Coupled Free Vibration Analysis of a
Branched Structure
(Formulation by the Transfer Influence Coefficient Method)

D.H. Moon · M.S. Choi · S.J. Kong

Abstract

This paper describes the general formulation for the in-plane longitudinal and flexural coupled free vibration analysis of a branched structure. The branched structure, which is mainly found in machine tools, pipeline systems and so on, has some crooked parts and subsystems. And it modeled as a distributed mass system.

The superiority of the present method to the transfer matrix method in the computation accuracy and speed was confirmed by the numerical computation results. Moreover, we confirmed that boundary and intermediate conditions have been controlled by the spring constants.

I. 서 론

저자들은 既報^{1)~7)}에 있어, 動的影響係數의 逐次傳達에 그 기본개념을 둔 傳達影響係數法을 제안하고, 여러가지 構造物에 대한 自由振動解析 알고리즘을 定式化 했다. 퍼스널컴퓨터로 數值實驗을 행하고, 傳達매트릭스법에 의한 결과와 비교·검토함으로써 計算速度 및 計算精度 모두 우수한 解析技法임을 확인했다.

본 연구의 해석대상 構造物은, 工作機械의

기본형태인 Γ 形 構造物, 多關節 매뉴플레이터, 配管系 등에서 많이 찾아볼 수 있는 系내에 分枝나 屈曲部를 갖는 工學上 중요한 構造物이다. 이들 構造物에 대한 振動의 制御를 위해서는 高速 또는 信賴性이 높은 振動解析技法을 開發하는 것이 절실히 필요하다⁸⁾.

따라서 본 研究에서는 系내에 다수의 分枝系나 屈曲部가 있는 構造物을 解析대상으로, 이미 제안된 傳達影響係數法의 개념을 적용해서, 縱·굽힘 連成 自由振動解析을 위한 알고리즘

* 釜山水產大學校

** 釜山水產大學校 大學院

*** 釜山水產大學校 產業大學院

을 定式化한다. 간단한 數值計算 모델을 통해 서 퍼스널 컴퓨터로 數值實驗을 행하고, 傳達매트릭스법과 본 연구의 技法을 計算精度 및 計算速度의 兩面에서 比較·檢討한다.

2. 傳達影響係數法에 의한 解析 알고리즘

2-1. 해석대상 系의 모델링

解析 알고리즘의 定式化에 앞서 다음의 가정을 한다.

(1) 해석대상의 系는, Fig. 1과 같이 한개의 主系 (main system)와 主系에 결합된 다수의 分支系로 구성되어 있다.

(2) 主系는 모든 屈曲點, 分支系와의 結合點 및 힘벡터가 불연속인 점에서는 반드시 분할한다.

(3) 分支系 자체가 屈曲部나 다른 分支系를 가질 수도 있다.

(4) 主系 및 分支系의 각 분할점(절점)간의 部材要素는 직선형의 等分布質量으로 간주하고, 이들을 각각 主部材(main member) 및 分支部材(sub member)라 한다.

(5) 主系의 양끝과 分支系의 主系와 결합되어 있지 않는 끝은 서로 직교하는 두 방향의 전단 및 회전스프링으로 구성되는 순스프링만으로 기초에 지지되어 있고, 이 순스프링系로 分支部材로 간주한다. 그리고 양끝 이외의 分支系가 순스프링만일 경우도 있다.

(6) 主系와 分支系의 結合부 및 屈曲部는 단단하게 결합되어 있어, 變位가 연속이라는 조건이 성립한다.

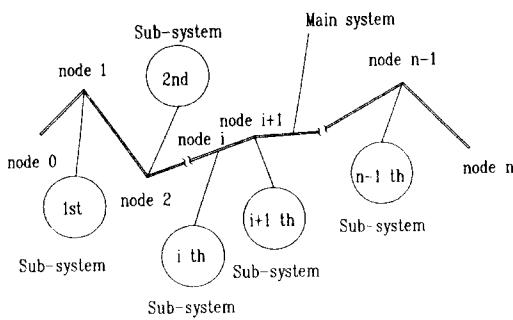
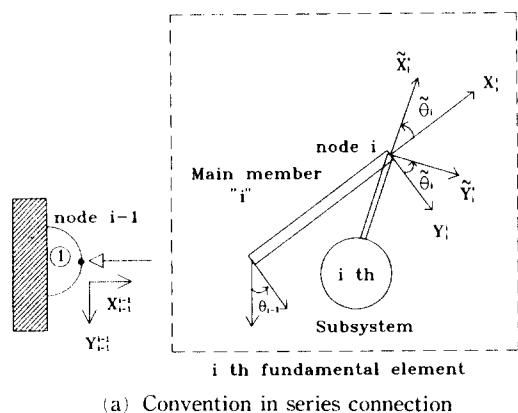


Fig. 1 Analytical model.

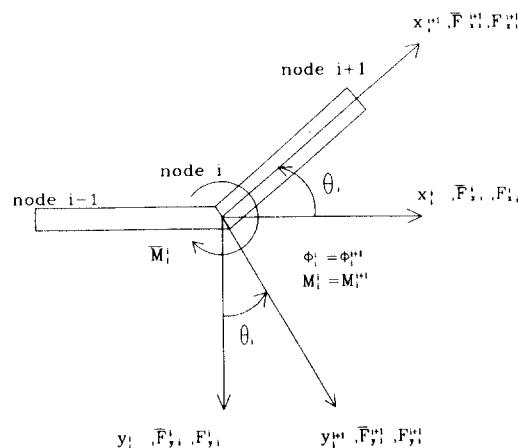
主系는 가정(2)에 따라서 n 개의 主部材로 분할된다. Fig. 1과 같이 主系의 좌단에서부터 우단으로, 차례로 절점 $0, 1, \dots, n$ 이라 하고, 임의의 절점 i 에 있어서 절점 0 및 절점 n 에 연결되는 쪽을 절점 i 의 左측 및 右측이라 부른다. 分支系에서는 主系와 결합되어 있지 않는 쪽의 끝을 좌단, 결합되어 있는 쪽의 끝을 우단으로 간주한다.

본 논문에는 동일 기호에 여러 가지 기호 또는 첨자를 사용하고 있는데, 이들은 다음과 같은 의미를 갖는다(Fig. 2 참조).

(1) 동일 기호의 위에 「-」기호의 유무에 따라 각각 主系의 절점의 左측과 右측의 물리량



(a) Convention in series connection



(b) Definition of positive direction of state variables

Fig. 2 Fundamental concept of the transfer influence coefficient method.

을 나타낸다.

(2) 동일기호에 「～」가 붙어있는 경우는 分枝系에 관한 물리량을 나타낸다.

(3) 상첨자i는 i번째 기본요소인 主部材에 축을 일치시킨 직교 좌표계 X_i , Y_i 로 나타낸 물리량이다.

(4) 하첨자i는, 절점i내지 i번째 기본요소의 主部材 및 分枝系에 관한 물리량이다.

(5) 「*」가 붙어있는 경우는 主系에 직접 결합하고 있는 分枝部材에 한 축을 일치시킨 分枝部材 座標系 \hat{X}_i^* , \hat{Y}_i^* 로 나타낸 물리량이다.

2-2. 動的影響係數

Fig. 2(a)는 傳達影響係數法을 적용할 경우의 기본개념도를 나타낸다. Fig. 2(a)의 ①은 主系의 좌단에서 임의의 절점 i-1의 우측까지의 構造物을 나타내고, 이 우단에 主部材와 分枝系로 구성된 i번째 기본요소를 단단하게 결합한다. 각 部材 座標系로 표시한 절점i의 상태변수, 즉, 종변위(x), 횡변위(y), 각변위(ϕ), 축력(F_x), 전단력(F_y) 및 모우멘트(M)의 정방향을 Fig. 2 (b)와 같이 정의하고, i번째와 i+1번째의 두개의 主部材 座標系로 나타낸 각각 절점i의 변위벡터(\mathbf{d}_i , \mathbf{d}_i^{i+1})와 힘벡터(\mathbf{f}_i , \mathbf{f}_{i+1})의 관계를 다음 식으로 정의한다.

$$\mathbf{d}_i^i = \bar{\mathbf{T}}_i \bar{\mathbf{f}}_i, \quad \bar{\mathbf{T}}_i^i = {}^t \bar{\mathbf{T}}_i^i \quad (1)$$

$$\mathbf{d}_i^i = \mathbf{T}_i \mathbf{f}_i, \quad \mathbf{T}_i^i = {}^t \mathbf{T}_i^i \quad (2)$$

$$\mathbf{d}_i^{i+1} = \mathbf{T}_i^{i+1} \mathbf{f}_i^{i+1}, \quad \mathbf{T}_i^{i+1} = {}^t \mathbf{T}_i^{i+1} \quad (3)$$

여기서,

$$\mathbf{d}_i^i = {}^t (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \phi)_i^i \quad \mathbf{d}_i^{i+1} = {}^t (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \phi)_i^{i+1} \quad (4)$$

$$\mathbf{d}_i^i = {}^t (\bar{\mathbf{F}}_x, \bar{\mathbf{F}}_y, \bar{\mathbf{M}})_i^i \quad \mathbf{d}_i^i = {}^t (\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y, \mathbf{M})_i^i$$

$$\mathbf{d}_i^{i+1} = {}^t (\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y, \mathbf{M})_i^{i+1}$$

또한, $\bar{\mathbf{T}}_i^i$, \mathbf{T}_i^i 및 \mathbf{T}_i^{i+1} 은 절점i에서의 動的影響係數매트릭스이고, 3×3 의 對稱이다. 動的影響係數의 對稱性은 문현(3)과 동일한 방법으로 증명할 수 있으므로 여기서는 생략한다. 그리고 첨자「t」는 매트릭스의 전치를 나타낸다. Fig. 2(b)에 나타낸 바와 같이, i+1번째 主部材 座標系가 i번째 主部材 座標系로부터 반시

계방향으로 θ_i 만큼 회전한 위치에 있다고 하면, 두개의 主部材 座標系로 표시한 절점i의 상태벡터간에는 다음의 관계가 성립한다.

$$\mathbf{d}_i^i = \mathbf{R}(\theta_i) \mathbf{d}_i^{i+1} \quad \mathbf{f}_i^i = \mathbf{R}(\theta_i) \mathbf{f}_i^{i+1} \quad (5)$$

여기서, $\mathbf{R}(\theta_i)$ 는 座標變換매트릭스이고, 다음과으로 정의된다.

$$\mathbf{R}(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i & 0 \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

식(6)에서 알 수 있듯이, $\mathbf{R}(\theta_i)$ 는 다음의 성질을 갖는다.

$$[\mathbf{R}(\theta_i)]^{-1} = {}^t \mathbf{R}(\theta_i) = \mathbf{R}(-\theta_i) \quad (7)$$

따라서, 절점i에서 i 및 i+1번째 主部材 座標系로 표시된 動的影響係數매트릭스의 관계는 다음식으로 주어진다.

$$\mathbf{T}_i^{i+1} = {}^t \mathbf{R}(\theta_i) \quad \mathbf{T}_i^i = \mathbf{R}(\theta_i) \quad (8)$$

2-3. 動的影響係數의 傳達

傳達影響係數法은 構造物의 한쪽 경계에서 반대쪽 경계까지 動的影響係數를 차례로 전달시키는 개념을 가지고 있으므로 인접의 각 절점간의 필드전달식과 절점 좌우측간의 포인트전달식을 유도한다. 또한 數值計算量을 줄이기 위해 두개의 식을 결합한 필드-포인트전달식을 구한다. 이를 식은 主系 또는 分枝系에 동일하게 적용할 수 있으므로 여기서는 主系에 대해서만 기술한다.

2-3-1. 필드전달식의 유도

動的影響係數매트릭스의 필드전달식은 종래의 傳達매트릭스법⁹⁾에 사용되는 필드전달매트릭스로부터 변형해서 유도한다. 傳達매트릭스법에 의하면, i번째 主部材 座標系로 나타낸 i번째 主部材 양단 사이의 상태벡터간의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{f} \end{pmatrix}_i^i = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}_i^i \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{f} \end{pmatrix}_{i-1}^i \quad (9)$$

여기서, \mathbf{A}_i^i , \mathbf{B}_i^i , \mathbf{C}_i^i 및 \mathbf{D}_i^i 는 일정한 等分布質

量을 갖는 보要素의 필드전달매트릭스(6×6)를 본 논문의 상태변수의 정방향과 일치하도록 要素의 부호를 조정하고 (3×3)의 부분매트릭스로 분리해서 나타낸 것이다. 이들 要素는 보要素를 오일러보(Euler's beam)로 간주할 경우 다음식으로 주어진다.

$$\mathbf{A} = \text{Diag}(\cos\gamma, \mathbf{A}')$$

$$\mathbf{B} = \text{Diag}(l \sin\gamma / (\gamma EA), \mathbf{B}')$$

$$\mathbf{C} = \text{Diag}(-\mu / w^2 \sin\gamma / \gamma, \mathbf{C}')$$

$$\mathbf{D} = \text{Diag}(\cos\gamma, \mathbf{D}')$$

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_0 & l\mathbf{C}_1 \\ \beta^* \mathbf{C}_1 / l & \mathbf{C}_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}' = \begin{pmatrix} -al\mathbf{C}_0 & a\mathbf{C}_1 \\ -a\mathbf{C}_1 & a\mathbf{C}_0 / l \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} -\beta^* \mathbf{C}_1 / al & -\beta^* \mathbf{C}_1 / a \\ \beta^* \mathbf{C}_1 / a & \beta^* l\mathbf{C}_0 / a \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}' = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_0 & -\beta^* \mathbf{C}_1 / l \\ -l\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_0 = (\cosh\beta + \cos\beta) / 2$$

$$\mathbf{C}_1 = (\sinh\beta + \sin\beta) / 2\beta$$

$$\mathbf{C}_2 = (\sinh\beta + \sin\beta) / 2\beta^2$$

$$\mathbf{C}_3 = (\sinh\beta - \sin\beta) / 2\beta^3$$

$$a = l^* / EA,$$

$$\beta^* = \mu l^* \omega^2 / EI$$

$$\gamma = l\omega(\mu / EA)^{1/2}$$

(10)

또한 EA는 인장강성, EI는 굽힘강성, μ 는 선밀도, ω 는 固有角振動數이다. 본 논문의 알고리즘은 보要素를 티모셴코보로 간주할 경우에는, 상기의 부분매트릭스의 要素가 다른 것을 제외하고는 똑같이 성립하므로 티모셴코보(Timoshenko's beam)인 경우의 부분매트릭스 요소를 부록에 나타냈다. 식(9)에 있어 逆의 관계, 즉, ${}^t(\mathbf{d}, \mathbf{f})_{i-1}$ 에 관해서 정리하면,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{F} \end{pmatrix}_{i-1}^t = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{D} & {}^t\mathbf{B} \\ -{}^t\mathbf{C} & {}^t\mathbf{A} \end{pmatrix}_i \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{F} \end{pmatrix}_i^t \quad (11)$$

식(3)의 첨자 i 대신에 $i-1$ 을 대입한 식과 식(1) 및 (11)로부터, i번째 主部材要素의 양 끝사이에 있어 動的影響係數매트릭스의 필드전달식을 유도하면 다음과 같다.

$$\mathbf{U}_i^t \bar{\mathbf{T}}_i^t = \mathbf{H}_i^t \quad (12)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^t &= \mathbf{T}_{i-1}^t \mathbf{C}_i^t + {}^t\mathbf{D}_i^t \\ \mathbf{H}_i^t &= \mathbf{T}_{i-1}^t \mathbf{A}_i^t + {}^t\mathbf{B}_i^t \end{aligned} \quad (13)$$

2-3-2. 포인트전달식의 유도

動的影響係數매트릭스의 포인트전달식은 절점i의 좌우의 힘 및 모멘트의 평형관계로부터 구한다. Fig. 2 (a)에 나타낸 바와 같이 절점i에 한개의 分枝部材가 결합되어 있고, 分枝部材 座標는 i번째 主部材 座標系로부터 반시계 방향으로 임의의 각 θ_i 만큼 회전해 있다고 가정한다. 우선, 절점i에 결합되어 있는 分枝系를 主系로 간주해서 필드전달식과 다음에 유도되는 포인트전달식을 적용하고, 分枝系의 좌단에서부터 우단으로 전달시킨 動的影響係數매트릭스가 $\tilde{\mathbf{T}}_i^*$ 로 구해졌다고 한다. 이 경우 分枝系의 우단에서 변위벡터와 힘벡터의 관계를 i번째 主部材 座標系로 나타내면 다음과 같다.

$$\tilde{\mathbf{f}}_i^t = (\tilde{\mathbf{T}}_i^*)^{-1} \mathbf{d}_i^t = \tilde{\mathbf{P}}_i^t \mathbf{d}_i^t \quad (14)$$

여기서, $\tilde{\mathbf{P}}_i^t$ 와 $\tilde{\mathbf{T}}_i^*$ 는 각각 절점i에 결합된 分枝系 전체를 한개의 동가스토밍계로 간주했을 때의 포인트강성 혹은 影響係數매트릭스에 상당하고 다음식으로 주어진다.

$$\tilde{\mathbf{P}}_i^t = (\tilde{\mathbf{T}}_i^*)^{-1} = \mathbf{R}(\tilde{\theta}_i) (\tilde{\mathbf{T}}_i^*)^{-1} {}^t\mathbf{R}(\tilde{\theta}_i) \quad (15)$$

또한, 分枝部材와 主部材 座標系로 표시한 변위벡터 및 힘벡터사이에는, 식(5)와 같이 각각 다음의 관계가 성립한다.

$$\tilde{\mathbf{d}}_i^t = {}^t\mathbf{R}(\tilde{\theta}_i) \mathbf{d}_i^t, \quad \tilde{\mathbf{f}}_i^t = {}^t\mathbf{R}(\tilde{\theta}_i) \mathbf{f}_i^t \quad (16)$$

한편, i번째 主部材 座標系로 나타낸 절점i 좌우측의 힘 및 모멘트의 평형관계로부터,

$$\tilde{\mathbf{f}}_i^t = \mathbf{f}_i^t - \tilde{\mathbf{f}}_i^t = \mathbf{f}_i^t - \tilde{\mathbf{P}}_i^t \mathbf{d}_i^t \quad (17)$$

식(17)에 $\tilde{\mathbf{T}}_i^*$ 를 곱하고, 식(1)과 (2)의 관계를 이용해서 변형하면, 절점i 좌우측간의 動的影響係數매트릭스의 포인트전달식(i번째 主部材 座標系로 표시)을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$(\mathbf{I}_3 + \tilde{\mathbf{T}}_i^* \tilde{\mathbf{P}}_i^t) \mathbf{T}_i^t = \tilde{\mathbf{T}}_i^* \quad (18)$$

여기서, \mathbf{I}_3 는 3×3 의 단위매트릭스이다.

만약, 절점 i 에 分枝系나 순스프링계가 여러 개 결합되어 있는 경우에는, i 번째 主部材 座標系로 표시한 포인트강성매트릭스를 독립적으로 구하고, 이들을 더한것을 $\tilde{\mathbf{P}}_i$ 로 간주하면 된다. 한편, 分枝系가 전혀 없는 경우는, $\tilde{\mathbf{P}}_i = \mathbf{O}_3$ 이므로 포인트전달식(18)은 생략할 수 있고, $\mathbf{T}_i = \bar{\mathbf{T}}_i$ 가 된다.

2-3-3. 필드-포인트전달식의 유도

식(12)의 필드전달식과 식(18)의 포인트전달식에 의한 動的影響係數매트릭스의 計算을 위해선는 2회의 연립방정식을 풀어야 하나, 필드 및 포인트전달식을 통합하므로써, 계산량을 현저하게 줄일 수가 있다. 즉, 절점 $i-1$ 우측의 動的影響係數매트릭스 \mathbf{T}_{i-1}^1 로부터 절점 i 우측의 動的影響係수매트릭스 \mathbf{T}_i^1 를 직접 계산하는 필드-포인트전달식을 다음과 같이 유도한다. 식 (18)의 양변에 \mathbf{U}_i^1 를 곱하고, 식(12)를 대입해서 \mathbf{T}_i^1 를 소거하면

$$\mathbf{G}_i^1 \mathbf{T}_i^1 = \mathbf{H}_i^1 \quad (19)$$

여기서,

$$\mathbf{G}_i^1 = \mathbf{U}_i^1 + \mathbf{H}_i^1 \tilde{\mathbf{P}}_i^1 \quad (20)$$

식(19)를 사용하면, 연립방정식을 한번 풀므로서, 한개의 기본요소에 대한 動的影響係수의 傳達計算을 완료할 수 있다.

2-4. 系의 시작단의 처리

主系 및 각 分枝系의 動的影響係수의 傳達式은 점화식으로 되어 있으므로, 傳達計算의 시작점, 즉, 절점 0(主系 및 分枝系의 左端)의 動的影響係수를 구하지 않으면 안된다. 우선, Fig. 3에 나타낸 바와 같이, 절점 0의 分枝部材(순스프링계) 座標系가 첫번째 主部材 座標系에서 반시계방향으로 임의의 각 $\tilde{\theta}_0$ 만큼 회전한 경우에 대해서 검토하면, 절점 0에서의 힘의 평형관계로부터 다음식이 성립한다.

$$\mathbf{f}_0^1 = \tilde{\mathbf{P}}_0^1 \mathbf{d}_0^1 \quad (21)$$

여기서,

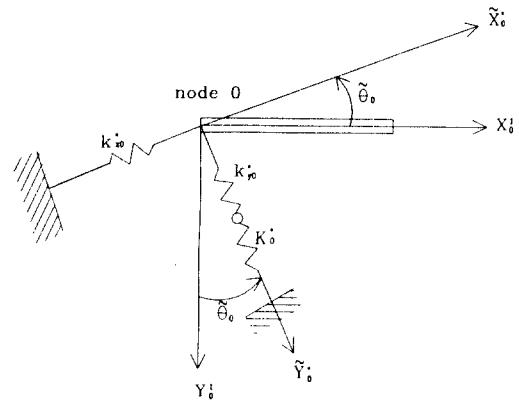


Fig. 3 The left end of system.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_0^1 &= \mathbf{R}(\tilde{\theta}_0) \tilde{\mathbf{P}}_0^* \mathbf{R}(\tilde{\theta}_0) \\ \tilde{\mathbf{P}}_0^* &= \text{diag}(\tilde{k}_x^*, \tilde{k}_y^*, \tilde{K}^*) \end{aligned} \quad (22)$$

또한, \tilde{k}_{x0}^* , \tilde{k}_{y0}^* 및 \tilde{K}_0^* 는 각각 절점 0의 分枝部材 座標系로 나타낸 두방향의 전단스프링 상수 및 회전스프링 상수를 나타낸다. 만약, \tilde{k}_{x0}^* , \tilde{k}_{y0}^* 및 \tilde{K}_0^* 모두가 0이 아닌 경우는 절점 0 우측의 動的影響係수매트릭스 \mathbf{T}_0^1 는,

$$\mathbf{T}_0^1 = (\tilde{\mathbf{P}}_0^1)^{-1} = \mathbf{R}(\tilde{\theta}_0) (\tilde{\mathbf{P}}_0^*)^{-1} \mathbf{R}(\tilde{\theta}_0) \quad (23)$$

한편, \tilde{k}_{x0}^* , \tilde{k}_{y0}^* 및 \tilde{K}_0^* 중에 하나라도 0인 경우는 $\tilde{\mathbf{P}}_0^1$ 은 특이매트릭스가 되어 \mathbf{T}_0^1 를 구할 수가 없다. 따라서, 어떠한 경계조건이라도 문제없이 적용할 수 있도록 식 (19)에 $i=1$ 을 대입하고, 양변에 $\tilde{\mathbf{P}}_0^1$ 을 곱해서 다음식을 유도 하므로서, 절점 1 우측의 動的影響係수 \mathbf{T}_1^1 부터 계산을 시작한다.

$$\mathbf{G}_1^1 \mathbf{T}_1^1 = \mathbf{H}_1^1 \quad (24)$$

여기서

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1^1 &= \mathbf{C}_1^1 + \tilde{\mathbf{P}}_0^1 \tilde{\mathbf{D}}_1^1 + \mathbf{H}_1^1 \tilde{\mathbf{P}}_1^1 \\ \mathbf{H}_1^1 &= \mathbf{A}_1^1 + \tilde{\mathbf{P}}_0^1 \mathbf{B}_1^1 \end{aligned} \quad (25)$$

일반적으로 $\tilde{\mathbf{P}}_0^1$ 가 특이매트릭스일지라도 \mathbf{G}_1^1 은 특이매트릭스가 되지 않는다. 따라서, 식 (24)를 이용하면, 스프링상수 \tilde{k}_{x0}^* , \tilde{k}_{y0}^* 및 \tilde{K}_0^* 와 分枝部材 座標系의 회전각 $\tilde{\theta}_0$ 를 적절히

조절하므로서, 자유단($\tilde{\mathbf{k}}_{x0}^* = \tilde{\mathbf{k}}_{y0}^* = 0, \tilde{\mathbf{K}}_0^* = 0$), 고정단($\tilde{\mathbf{k}}_{x0}^*, \tilde{\mathbf{k}}_{y0}^* \rightarrow \infty, \tilde{\mathbf{K}}_0^* \rightarrow \infty$) 등의 모든 경계조건에 대응시킬 수 있다.

이상에 의하면, 主系에 대한 動的影響係數의 傳達計算은 먼저 식(24)에 의해 \mathbf{T}_i 를 구하고, 식(8)과 (19)를 $i=1, 2, \dots, n$ 에 대해서 차례로 적용하므로서 각 절점의 動的影響係數 \mathbf{T}_i^* 를 얻는다. 계산과정에 필요한 $\tilde{\mathbf{P}}_i^*$ 는 分枝系를 主系로 간주하면, 主系와 동일한 傳達計算式과 같은 순서로 $\tilde{\mathbf{T}}_i^*$ 를 구하고, 식(15)을 적용하므로서 얻어진다. 그리고 分枝系가 分枝系를 갖는 경우도 동일한 방법으로 계산을 수행할 수 있다.

3. 振動數方程式 및 거짓根의 解消

3-1. 振動數方程式

振動數方程式은 절점n(주계의 끝단)에서, 힘의 평형관계식에 경계조건을 적용하므로서 얻을 수 있다. 다만, 이 경우 모든 경계조건에 대해 절점n의 우측은 자유로 간주할 수 있으므로 $\mathbf{f}_n^n = 0$ 가 된다^{1)~4)}.

Fig. 4에 나타낸 바와 같이, 절점n의 순스프링에 대한 分枝部材 座標系가 n번째 主部材 座標系로 부터 반시계방향을 (+)로해서 $\hat{\theta}_n$ 만큼 회전해있다고 하면, 절점n에서의 힘의 평형관계로 부터,

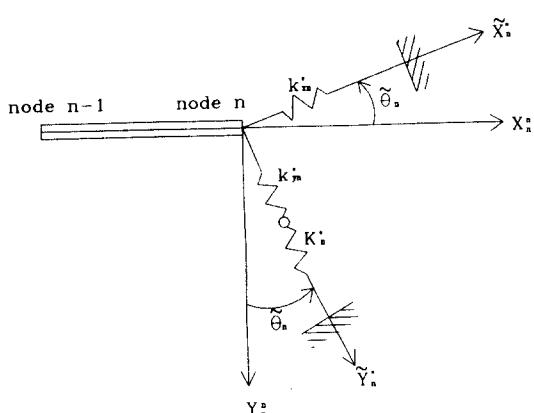


Fig. 4 The right end of system.

$$\bar{\mathbf{f}}_n^n = -\tilde{\mathbf{P}}_n^n \mathbf{d}_n^n \quad (26)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_n^n &= \mathbf{R}(\hat{\theta}_n) \tilde{\mathbf{P}}_n^{*n} \mathbf{R}(\hat{\theta}_n) \\ \tilde{\mathbf{P}}_n^{*n} &= \text{diag}(\tilde{k}_x^*, \tilde{k}_y^*, \tilde{K}_n^*)_n \end{aligned} \quad (27)$$

이고, $\tilde{\mathbf{k}}_{xn}^*$, $\tilde{\mathbf{k}}_{yn}^*$ 및 $\tilde{\mathbf{K}}_n^*$ 는 절점n에 있어서의, 分枝部材座標로 나타낸 두 방향의 전단스프링 상수 및 회전스프링 상수를 의미한다.

$\tilde{\mathbf{T}}_i^*$ 는 대칭매트릭스이므로 식(12)로 부터

$$\tilde{\mathbf{T}}_i^* = (\mathbf{U}_i^*)^{-1} \mathbf{H}_i^* {}^t \mathbf{H}_i^* (\mathbf{U}_i^*)^{-1} \quad (28)$$

또한, 식(1), (20) 및 (26)으로부터,

$$\begin{aligned} [\mathbf{I}_3 + \tilde{\mathbf{P}}_n^n \tilde{\mathbf{T}}_n^n] \bar{\mathbf{f}}_n^n &= {}^t \mathbf{G}_n^n (\mathbf{U}_n^n)^{-1} \bar{\mathbf{f}}_n^n \\ &= {}^t \mathbf{G}_n^n \mathbf{f}_{n-1}^n = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (29)$$

로 된다. 식(3), (9) 및 (13)에 의해

$$\bar{\mathbf{f}}_n^n = {}^t \mathbf{U}_n^n \mathbf{f}_{n-1}^n, \quad \mathbf{d}_n^n = {}^t \mathbf{H}_n^n \mathbf{f}_{n-1}^n \quad (30)$$

일반적으로 $\mathbf{f}_{n-1}^n \neq \mathbf{0}$ 이므로, 절점n이 스프링 지지된 경우의 振動數方程式은

$$\mathbf{Z}_n^n = \det({}^t \mathbf{G}_n^n) = \det(\mathbf{G}_n^n) = \mathbf{0} \quad (31)$$

다음에 특별한 경계조건들에 대한 振動數方程式을 구하기 위해 식(1) 및 (12)로 부터

$$\mathbf{U}_n^n \mathbf{d}_n^n = \mathbf{H}_n^n \bar{\mathbf{f}}_n^n \quad (32)$$

가 성립하고, 경계조건별로 振動數方程式을 구하면, 다음과 같다.

(1) 자유단 [$\mathbf{d}_n^n \neq \mathbf{0}, \bar{\mathbf{f}}_n^n = \mathbf{0}$]

$$\det \mathbf{U}_n^n = 0 \quad (33)$$

(2) 고정단 [$\mathbf{d}_n^n = \mathbf{0}, \bar{\mathbf{f}}_n^n \neq \mathbf{0}$]

$$\det \mathbf{H}_n^n = 0 \quad (34)$$

(3) 편지지단 [$x_n^* \neq y_n^* = 0, \phi_n^* \neq 0, F_{n*}^* \neq 0, M_{n*}^* = 0$]

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \mathbf{U}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} & \mathbf{U}_{22} \\ \mathbf{H}_{31} & \mathbf{H}_{32} & \mathbf{U}_{32} \end{pmatrix} = 0 \quad (35)$$

스프링지지단에 대한 振動數方程式(31)에 있어서 스프링상수 $\tilde{\mathbf{k}}_{xn}^*$, $\tilde{\mathbf{k}}_{yn}^*$ 및 $\tilde{\mathbf{K}}_n^*$ 의 값을 적절히 조정하므로서, 振動數方程式(33)~(35)를

대응시킬 수 있으므로^{2)~4)}, 振動數方程式은 식(31)로 單一化할 수 있다.

3-2. 거짓根의 解消

振動數方程式(31)의 解法으로 二分法을 사용할 경우 ω 의 함수 Z_n^n 의 부호변화를 이용해 解를 구한다. 이때, 함수 Z_n^n 에는 함수치의 부호가 변하는 極(反對稱極)이 존재할 수 있고, 따라서 참根은 물론 이런 反對稱極(거짓根)도 解로서 구해버린다. 이런 反對稱極은 ω 의 변화에 따른 Z_m 값이 부호가 변하지 않는 極(對稱極)으로 바꾸어줌으로써 제거할 수 있다. 그러나 이 反對稱極은 Z_m 이외에도 $Z_i^i (= \det(G_i))$, 즉, 動的影響係數의 전달계산과정에서 생길수 있고, 이들도 제거하지 않으면 안된다. 이들의 발생기구와 解消法은 既報^{1)~6)}와 동일한 개념이므로 여기서는 생략한다. 이렇게 해서 얻어진 함수를 W_n^n 이라고 하면, W_n^n 은 다음식과 같이 Z_n^n 의 零點(참근)만에서 부호가 변하는 함수가 된다.

$$W_n^n = \prod_{i=1}^n [\operatorname{sgn}(\tilde{H}_i^i) \operatorname{sgn}(Z_i^i)] \operatorname{sgn}(Z_n^n) \quad (36)$$

여기서 $\operatorname{sgn}(\tilde{H}_i^i)$ 는 절점 i 의 分枝系 要素에 의한 거짓根을 해소하기 위한 것으로, $\det(\tilde{T}_i^i)$ 의 기수의 영점만에서 부호가 변하는 함수이다. 식(36)을 사용하면, 系의 시작단과 끝단의 境界條件 및 여러 가지 中間支持條件도 스프링 상수의 값만을 조정하므로서 간단히 대응시킬 수 있고, 거짓根이 제거된 참根 즉, 固有振動數만이 구해진다.

4. 固有모드의 計算

固有振動數가 구해지면, 식(29)로 부터 $f_{n-1}^n (\neq 0)$ 을 계산하고, 식(30)에서 d_n^n 및 \tilde{f}_n^n 을 계산한다. 절점 $n-1$ 에서 절점 0까지의 상태변수는 식(3), (5), (11) 및 (17)을 사용해서 순차적으로 계산한다. 여기서 主系의 시작단의 T_0^0 를 구할 수 없는 경우는 f_0^0 까지만 위의 순서로 구하고, d_0^0 에 대해서는 식(11)의 제 1식 및 식(5)를 써서 계산한다.

分枝系의 固有모드도, 각각의 分枝系를 主系로 간주하면 위와 동일한 순서로 구할 수 있다. 이때 分枝系의 우단의 상태변수는, 결합점에서의 变位ベクトル가 연속이므로 식(14), (16)으로부터 계산된다.

5. 數值計算結果 및 考察

다수의 屈曲部나 分枝系를 갖는 構造物을 對象으로, 傳達影響計數法(TICM)에 의해 定式化한 縱·굽힘 連成自由振動解析 알고리즘의 計算精度 및 計算速度를 數值實驗에 의해 검討했다. 사용 계산기는 32bit 퍼스널컴퓨터, 사용언어는 Fortran, 單精度變數(相對誤差 $\epsilon = 10^{-6}$)와 倍精度變數($\epsilon = 10^{-9}$)를 사용해서 계산했다. 傳達매트릭스법(TMM)에 의해서도 동일조건에서 계산을 수행하고 양 방법을 비교했다.

5-1. 計算精度

Fig. 5 및 Fig. 6는 각각 數值實驗모델 I,

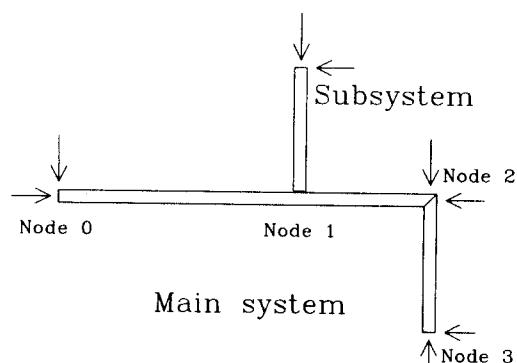


Fig. 5 Numerical computation model 1.

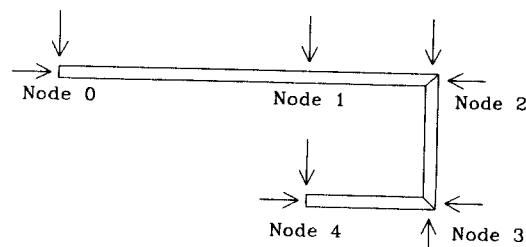


Fig. 6 Numerical computation model 2.

II를 나타낸다. 두 모델 모두 각 部材는 직경 20mm의 鋼製中實軸이고, 길이는 1번 主部材가 800mm, 그외의 部材는 400mm의 일정한 分布質量을 갖는 軸으로 간주했다. 또한 主部材의 屈曲部 및 分枝部材와 主部材 사이의 角은 90°이고, 그림중에 화살표는 스프링상수 k (N/m)의 전단스프링이 기초에 지지되어 있는 위치와 방향을 나타낸다.

Table 1은 모델1에 대한 固有振動數의 計算結果를 나타낸다. 主部材 및 分枝部材 모두 等分布質量의 오일러보로 간주하고, 스프링상수 k (N/m)가 각각 10^2 , 10^5 및 10^8 인 경우에 대해, 5次까지의 固有振動數를 두 방법(TICM, TMM)으로 계산한 결과이다. Table 1에 있어서, TICM과 TMM 모두 單精度(single) 및 倍精度(double) 變數를 사용해서 계산을 수행한 결과를 비교해 보면, 스프링상수 k 가 비교적 작은 값, 즉, 10^2 및 10^5 의 경우는, TICM과 TMM에 의한 계산값이 전부 일치하고 있음을 알 수 있다. 그러나 $k=10^8$ 인 경우에는 TMM에 있어 single일때만 解가 달라지고 있음을 알 수 있다. 또한, 2次의 固有振動數 즉 250(Hz) 근방에서 振動數方程式의 부호가 불규칙적으로 변동해서, 비슷한 解가 다수 존재하

는 불안정한 현상을 나타내고 있음을 알 수 있다. 이는 전달매트릭스법의 취약점인 中間支持條件 즉 중간스프링상수의 값이 커짐에 따라, 매트릭스의 연산과정에서, 매트릭스 요소내에 상대적으로 큰 값과 작은 값들이 혼재해 있음으로써 발생하는, 사칙연산과정의 誤差문이라 생각된다⁹⁾. 한편, 傳達影響係數法은 중간에 輕彈性支持가 존재하더라도 解析 알고리즘 상에 문제가 없음을 확인할 수 있다. 따라서, 이하에서는 TICM의 double의 값을 正解로 간주했다.

Table 2는, 모델2에 대해서, $k=0$, $k=10^4$, $k=10^8$ 및 $k=10^{20}$ 일 때의 18次까지의 固有振動數를 倍精度 變數로 계산한 결과이다. Table 속의 [*] 표시는 강체모드인 경우를 나타내고, 밑줄친 수치는 TICM과 TMM의 결과가 완전히 일치할 경우를 나타낸다. 그리고 밑줄이 없는 수치는 TMM에 의해서는 正解가 구해지지 않을 경우를 나타낸다. TMM에서 $k=0$ 인 경우도 위에서 기술한 正解가 존재하는 근방에서 다수의 解가 존재하는데, 그 이유는 高次의 固有振動數가 되면, 전달매트릭스要素내의 雙曲線函數와 三角函數의 加減演算에 따른 誤差가 발생하기 때문이라 생각된다⁹⁾

Table 1. Natural frequency of model 1(Hz)

No.	TICM		TMM		k
	Single	Double	Single	Double	
1	1.4251	1.4251381	1.4251	1.4251381	10^2
2	1.4319	1.4318642	1.4319	1.4318642	
3	2.1174	2.1174457	2.1174	2.1174457	
4	34.173	34.172637	34.173	34.172637	
5	66.815	66.814666	6.6815	66.814666	
1	37.021	37.021096	37.021	37.021096	10^5
2	39.697	39.697227	39.697	39.697227	
3	59.995	59.994491	59.995	59.994491	
4	81.486	81.486323	81.486	81.486323	
5	111.28	111.27889	111.28	111.27889	
1	86.720	86.719937	86.727	86.719937	10^8
2	250.47	250.46987	250.45	250.46987	
3	298.17	298.16576	251.72	298.16576	
4	351.90	351.89532	252.00	351.89532	
5	466.18	466.17911	294.00	466.17911	

Table 2. Natural frequency of model 2(Hz)

No.	$k=0$	$k=10^4$	$k=10^8$	$k=10^{20}$
1	*	13.648240	81.796280	81.944942
2	*	15.587851	250.81412	251.29985
3	*	18.636845	280.64918	282.11139
4	21.767645	31.503219	367.00501	371.22548
5	52.418568	57.663807	483.05189	487.87520
6	90.715088	94.111812	620.60555	629.66091
7	169.59083	171.20556	989.17588	1005.1994
8	305.48681	306.10138	1044.7964	1068.6990
9	395.67982	396.24495	1124.6056	1233.5964
10	540.07421	540.70454	1197.7154	1435.2082
11	577.22691	577.62372	1382.0442	1675.7888
12	815.48146	815.76326	1608.2220	2133.0994
13	1104.4724	1104.6108	1956.9359	2261.6987
14	1231.8615	1232.0345	2048.2520	2356.2864
15	1468.4672	1468.6881	2244.1865	2598.4478
16	1601.6299	1601.7865	2272.0695	2887.8881
17	1966.6518	1966.7715	2578.9851	3225.0167
18	2064.1255	2064.2005	2613.9027	4020.7978

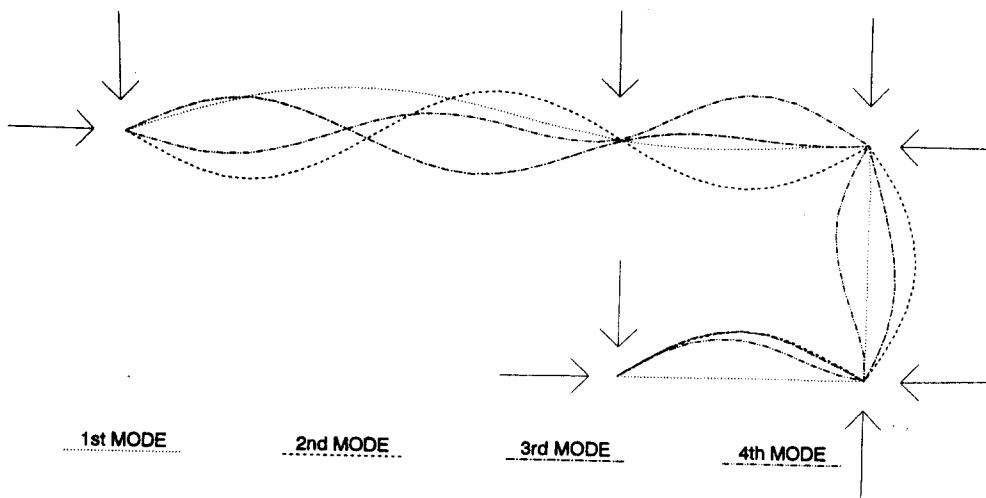


Fig. 7 Characteristic modes of model 2.

또한, 스프링 상수값이 커지면, 倍精度 變數를 사용해서 계산해도 正解를 구할 수 없음을 알 수 있다.

5-2. 固有모드

Fig. 7에 TICM에 의한 모델2의 고유모드(1차~4차)의 계산결과를 나타냈다. 고유진동수를 구한 다음 각 부재를 10등분(1번 주부재에 대해서는 20등분)하고, 전단스프링상수 $k = 10^8$ (N/m)로 해서 계산했다. 그림중의 화살표는 전단스프링의 위치를 나타낸다. 고유모드도 문제없이 계산될 수 있음을 보여주고 있다.

Table 3. Comparison of CPU time

(unit: sec)

Model	TICM	TMM	Roots
1	120	133	12
2	88	92	11

5-3. 計算時間

Table 3은 모델 1에 대해서는 1~800 Hz, 모델 2에 대해서는 1~600 Hz 범위의 Table 내의 근(고유진동수)의 수를 구하는데 걸린 시간(sec)을 나타낸다. 이때, 모델 1, 2 모두 스프링상수 $k = 10^8$ N/m로 했다. 또한, 진동수 방정식에 이분법을 적용할 때, 고유진동수의 초기증분은 $\Delta\omega = 0.01$ Hz로 했고, 상대오차

$\epsilon = 10^{-9}$ 으로 했다. 계산에 대한 속도도 TICM에 의한 알고리즘이 TMM보다 빠르다는 것을 알 수 있다.

6. 要 約

傳達影響係數法에 의해 分枝를 갖는 構造物의 縱・굽힘 自由振動解析 알고리즘을 定式化 했다. 간단한 數值實驗모델을 통해, 종래의 傳達매트릭스법과 비교하고, 본 논문의 技法의 有用性을 검토한 결과 다음과 같이 요약할 수 있다.

(1) 屈曲部나 分枝系를 갖는 構造物의 自由振動解析에 대한 본 논문의 技法이 종래의 傳達매트릭스법 보다 計算精度 및 計算速度의 兩面에서 우수성을 확인했다.

(2) 본 논문의 技法은 모든 境界條件 및 中間支持條件를 解析알고리즘의 변화없이 스프링 상수의 값만을 조절하므로서 처리할 수 있어, 프로그래밍이 간편하다.

부 록

군일 분포질량 티모셴코보(Timoshenko's beam)에 대한 필드전달 부분매트릭스의 요소는 다음과 같다.

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_0 - \sigma \mathbf{C}_1 & l[\mathbf{C}_1 - (\sigma + \tau) \mathbf{C}_2] \\ \beta^4 \mathbf{C}_2 / l & \mathbf{C}_0 - \tau \mathbf{C}_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} -al[(\beta^4 + \sigma^2) \mathbf{C}_2 - \sigma \mathbf{C}_1] / \beta^4 & a \mathbf{C}_1 \\ -a \mathbf{C}_1 & a(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2) / l \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} \beta^4 (\sigma \mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1) / al & -\beta^4 \mathbf{C}_2 / a \\ \beta^4 \mathbf{C}_1 / a & l[\beta^4 + \tau^2] \mathbf{C}_2 - \tau \mathbf{C}_1] / a \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}' = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_0 - \sigma \mathbf{C}_2 & -\beta^4 \mathbf{C}_3 / l \\ -l[\mathbf{C}_1 - (\sigma + \tau) \mathbf{C}_2] & \mathbf{C}_0 - \tau \mathbf{C}_2 \end{pmatrix}$$

여기서,

$$\mathbf{C}_0 = [(\lambda_1)^2 \cosh \lambda_1 + (\lambda_1)^2 \cos \lambda_1] / \Lambda$$

$$\mathbf{C}_1 = [(\lambda_1)^2 \sinh \lambda_1 / \lambda_1 + (\lambda_1)^2 \sin \lambda_1 / \lambda_1] / \Lambda$$

$$\mathbf{C}_2 = (\cosh \lambda_1 - \cos \lambda_1) / \Lambda$$

$$\mathbf{C}_3 = (\sinh \lambda_1 / \lambda_1 - \sin \lambda_1 / \lambda_1) / \Lambda$$

$$\sigma = \mu \omega^2 l^4 / (kGA)$$

$$\tau = a \mu j^2 \omega^2$$

$$\Lambda = (\lambda_1)^2 + (\lambda_2)^2, a = l^4 / (EI)$$

$$\beta^4 = \mu l^4 \omega^2 / (EI)$$

$$(\lambda_{1,1})^2 = \sqrt{\beta^4 + (\sigma - \tau)^2}^{2/(4-(\sigma-\tau)/2)}$$

kGA: 전단강성

j : 회전반경.

참고문헌

- 1) A. SUEOKA, T. KONDOW, D.H. MOON and K. YAMASHITA, "A Method of Vibrational Analysis Using a Personal Computer - A Suggested Transfer Influence Coefficient Method -", Memoirs of Eng., Kyushu Uni.,

Vol. 48(1), P. 31~46, 1988.

- 2) 末岡・近藤・文・山河・田村, "傳達影響係數法による多層構造物の自由振動解析(第1報, 集中系に對する定式化)", 日本機械學會論文集(C) 54卷 504號, P. 1724~1731, 1988.
- 3) 末岡・近藤・文・山下・河村, "傳達影響係數法による多層構造物の自由振動解析(第3報, 分布系に對する定式化)", 日本機械學會論文集(C) 55卷 516號, P. 1948~1956, 1989.
- 4) 末岡・近藤・文・山河・安田, "傳達影響係數法による多層構造物の自由振動解析(第5報, 二層構造物の考察 Ⅰ, Ⅱ)", 日本機械學會論文集(C) 56卷 523號, P. 555~560, 1990.
- 5) 近藤・末岡・文・綾部, "變形傳達影響係數法による叮變パラメータ系の自由振動解析 (變斷面ばかりに對する定式化)", 日本機械學會論文集(C) 56卷 522號, P. 284~291, 1990.
- 6) 末岡・文・近藤・綾部, "變形傳達影響係數法による叮變パラメータ系の自由振動解析 (變厚圓板に對する定式化)", 日本機械學會論文集(C), 57卷 535號, P. 686~693, 1991.
- 7) 文・末岡・近藤・呂, "傳達影響係數法에 의한 원판구조물의 自由振動解析", 大韓機械學會論文集, 15卷 5號, P. 1439~1446, 1991.
- 8) 長南・青島, "多リンク彈性ロボットアームの三次元振動解析", 日本機械學會論文集(C) 54卷 502號, 1988.
- 9) Pestel, E.C. and Leckie, F.A., "Matrix Method in Elastomechanics", McGraw-Hill, P. 192~194, 1963.