

〈論 文〉

회전체 베어링계의 불균형응답 간접추정과 베어링 매개변수 규명

Estimation of the Unmeasured Unbalance Responses and Identification of Bearing Parameters in Flexible Rotor-Bearing Systems

홍 성 욱* · 이 종 원**

Seong-Wook Hong and Chong-Won Lee

(1992년 6월 30일 접수; 1992년 8월 12일 심사완료)

ABSTRACT

The unbalance response analysis is one of the essential area in the forced vibration analysis of rotor bearing systems because of its usefulness in balancing and diagnosis as well as identification of parameters involved in rotor bearing systems. However some unbalance responses are not measurable due to the fact that rotor bearing systems are often encapsulated by fixtures or safety protectors. In the present paper, an efficient estimation scheme for unmeasured unbalance responses in rotor bearing systems is developed. The fundamental feature of the proposed method is characterized by the linear formulae to estimate the unbalance responses from the measured unbalance responses and the finite element auxiliary model equation which is constructed to be identical to the prototype excluding the uncertain parameters such as bearing coefficients. The identification formulae for bearing parameters are also derived by using the unbalance responses and the finite elements auxiliary model. Simulation is provided to verify the effectiveness of the proposed method.

1. 서 론

회전체에 있어 불균형에 의한 진동응답(이하 불균형 응답)은 가장 보편적인 진동응답이며 회전체 진동을 측정하거나 분석함에 있어 중요한 비중을 차지하고 있다⁽¹⁾. 특히 회전체의 밸런싱^(2,3)이나 매개변수 규명⁽⁴⁻⁶⁾에 있어서는 정확한 불균형응답을 얻는 것이 결과에 큰 영향을 미친다. 그러나 회전체는 고정장치나 안전장치 등에 의해 둘러 싸여 불균형을 인가하거나 측정센서를 두기 곤란한 위치가 많기 때문에 불균형 응답을 여러위치에 대해 다양하게 측정하는 것이

극히 제한적인 형편이다. 따라서 일부의 측정가능한 위치에서의 불균형응답만을 이용하기 때문에 분석에 어려움이 따르는 경우가 많다.

기계진동 구조물에 대한 진동특성을 예측하기 위해서는 통상 이론적인 모델, 예컨대 유한요소모델 등을 이용한 계산에 의한 방법과 실험적인 모델링 방법이 많이 이용되어 오고 있다. 특히 유한요소모델은 회전체에 관한 대부분의 관련성분들을 포함하여 일반적인 동적 특성을 파악할 수 있는 방법을 제공하고 있으나⁽⁷⁾ 베어링의 동적 계수 등 관련매개변수의 부정확성에 의해 실험결과와의 오차를 피할 수 없다는 것이 잘 알려져 있다. 한편 실험적인 모델링 방법에 있어 가장 큰 어려움은 시스템의 동특성 변수(고유치 및 고유벡터)를 구해야 한다는 점인데 회전체에 있어서

* 정회원, 금오공과대학 정밀기계공학과

** 정회원, 한국과학기술원 기계공학과 NOVIC센터

는 회전중 진동특성을 파악해야 하므로 실험이 난해하고 비자기 수반(non-self adjoint)특성을 가지고 있으므로 실험에 더 많은 노력을 필요로 하기 때문에 실제 응용에 제한이 따르고 있다^(8,9). 또한 엄밀한 실험적 모델을 구하기 위해서는 회전자유도(rotational degrees of freedom)를 측정해야 하나 실제적인 측정이 대부분의 경우 어려운 실정이다.

이러한 어려움을 극복하기 위해 비접촉 방식의 가진을 통한 실험방법의 개선을 시도하고 있으며, 보다 정확한 매개변수추정을 위한 여러가지 알고리즘이 개발되고 있다⁽¹⁰⁾. 그리고 다른한편으로는 이론적 모델에 실험결과를 결합시키는 방법, 예컨대 유한요소 모델을 이용, 부분적인 고유치나 고유벡터에 부합하도록 매개변수들에 대한 최적화를 수행하여 유한요소 모델을 이용한 정확한 예측을 가능하게 하도록 하는 방법들이 개발되어 왔는데, 이 방법들은 비선형 식이거나⁽¹¹⁾, 매개변수에 대한 섭동만을 고려하기 때문에⁽¹²⁾ 초기모델링 상태가 우수하지 않으면 그 수렴성이 극히 나빠지므로 베어링이나 커플링 등, 매개변수를 추정하기 어려운 부분을 포함하는 회전체의 경우 실제 응용에 한계가 있을 수 밖에 없다.

본 연구에서는 회전체계에 있어 국부적으로 매개변수 추정이 어려운 불확정변수가 있는 경우, 유한요소 모델과 실측된 불균형응답을 결합하여 측정이 어려운 위치에서의 불균형응답을 추정하는 방법을 개발하였다. 최근 유한요소방법은 회전체의 진동특성을 계산하기 위해 폭넓게 사용되고 있는 표준화된 도구로서 컴퓨터 관련기술이 획기적으로 발전되면서 응용범위가 확대되고 있다. 그러나 베어링 등 그 특성을 모델링하거나 매개변수를 규명하기 어려운 변수들로 인해 실제추정치와의 차이를 극복하기 위해 매개변수 규명방법이 보다 정확한 해석을 위한 선행과제로 남아 있다. 본 방법은 이와같은 측정이 어려운 국부적인 불확정변수들을 제외하고 실제 현상을 잘 반영하는 유한요소 모델을 이용하여 실측된 불균형응답과의 관련을 통해 불확정변수들에 무관하게 불균형응답을 추정할 수 있도록 하는 선행관계식을 유도하였다. 회전체 베어링계에 있어서는 특히 베어링의 특성들이 정확히 파악하기 곤란한 요소이므로 이들을 미지상태로 두고 관련식을 도출하였다. 불균형응답을 추정하기 위해 개발된 식은 선형식으로서 프로그램 구성이 간단하고 계산시간도 적어 실제 시스템에 적용이 용이하다.

한편 유도된 추정식은 불균형 응답을 이용한 베어링 매개변수 규명방법^(4,6)에 적용하였다. 베어링 매개변수를 규명하기 위해서는 베어링 위치에서의 불균형

응답을 필요로 하나 실제 회전체에서는 대부분 곤란하므로 본 연구에서 개발한 불균형응답 간접추정식이 매우 유용하다⁽⁶⁾. 논문의 마지막 부분에서는 개발된 추정식을 이용한 수치실험을 통해 불균형 응답추정과정을 보이고 베어링 매개변수의 규명방법에 활용되는 과정을 설명하였다.

2. 운동 방정식

전단변형을 무시할 경우 회전체 베어링계의 유한요소 운동방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다⁽¹⁾.

$$M^{s+d}\ddot{q}(t) + \{C^b(\Omega) + G^{s+d}(\Omega)\}\dot{q}(t) + \{K^s + K^b(\Omega)\}q(t) = f(t) \quad (1)$$

여기서 유한요소 좌표벡터 $q(t)$ 와 힘벡터 $f(t)$ 는 다음과 같다.

$$q = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_y \\ f_z \end{bmatrix} \quad (2)$$

그리고, y 와 z 는 각각 y 방향과 z 방향의 절점좌표를, 그리고 f_y 와 f_z 는 y 와 z 에 대응되는 힘벡터이다. 회전속도(Ω) 종속특성을 갖는 베어링 강성 및 감쇠행렬 $K^b(\Omega)$ 와 $C^b(\Omega)$ 는 모두 일반적으로 비대칭(nonsymmetric)이며 부정치(indefinite)이다. 대칭(symmetric)인 관성행렬 M^{s+d} 은 양정치(positive definite)이며 대칭인 축의 강성 행렬 K^s 는 반양정치(positive semi-definite), 그리고 자이로 행렬(gyroscopic matrix) G^{s+d} 은 반대칭(skew-symmetric)이다. 시스템 전체행렬은 모두 $2N \times 2N$ 이며 N 은 y 또는 z 좌표벡터의 차원이다($N=2 \times$ 유한요소모델 절점수). 관성과 자이로 행렬을 부분행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$M^{s+d} = \begin{bmatrix} M & O \\ O & M \end{bmatrix}, \quad G^{s+d} = \begin{bmatrix} O & G \\ -G & O \end{bmatrix} \quad (3a)$$

그리고 감쇠와 강성행렬은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$C^b = \begin{bmatrix} C_{vv} & C_{vz} \\ C_{zv} & C_{zz} \end{bmatrix}, \quad K^b = \begin{bmatrix} K_{vv} & K_{vz} \\ K_{zv} & K_{zz} \end{bmatrix}, \quad K^s = \begin{bmatrix} K & O \\ O & K \end{bmatrix} \quad (3b)$$

여기서 부분 행렬 M , G 및 K 는 대칭이다.

회전체의 동특성해석을 위해서는 복소좌표계를 이용하는 것이 편리하므로^(4,10) 아래와 같은 복소 변위, 복소 힘벡터를 정의하기로 하자.

$$p = y + jz, \quad F = f_y + jf_z \quad (4)$$

이때 운동방정식 (1)은 다음과 같이 복소운동방정식으로 쓸 수 있다.

$$M\ddot{p} - j\Omega G\dot{p} + C_f\dot{p} + C_b\dot{p} + Kp + K_f p + K_b \dot{p} = F \quad (5)$$

여기서 하첨자 f 와 b 는 각각 forward 및 backward를 그리고 ‘-’는 공액복소수를 의미한다. 대각인 복소 베어링 감쇠 및 강성 행렬은 다음과 같다.

$$C_f = \frac{1}{2} \{C_{vv} + C_{zz} - j(C_{vz} - C_{zv})\}$$

$$C_b = \frac{1}{2} \{C_{vv} - C_{zz} + j(C_{vz} + C_{zv})\}$$

$$K_f = \frac{1}{2} \{K_{vv} + K_{zz} - j(K_{vz} - K_{zv})\}$$

$$K_b = \frac{1}{2} \{K_{vv} - K_{zz} + j(K_{vz} + K_{zv})\}$$

다음절의 이론전개를 위하여 다음과 같은 변환행렬을 도입하는 것이 편리하다.

$$\begin{aligned} p_n &= T_n \quad p, & p_m &= T_m \quad p, \\ n \times 1 & \quad n \times N \quad N \times 1 & m \times 1 & \quad m \times N \quad N \times 1 \\ p_e &= T_e \quad p, \\ e \times 1 & \quad e \times N \quad N \times 1 \\ p_s &= T_s \quad p, & p_d &= T_d \quad p \\ s \times 1 & \quad s \times N \quad N \times 1 & d \times 1 & \quad d \times N \quad N \times 1 \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 p_n , p_m , p_e , p_s 및 p_d 는 각각 복소좌표벡터로서 베어링이나 밀봉등 불확정 변수들이 개입된 좌표벡터, 측정좌표(master)벡터, 불균형 가진위치 좌표벡터, 추정해야 할 좌표(slave)벡터, 그리고 불확정변수가 개입되지 않은 좌표벡터를 나타낸다. 변환행렬 T_n , T_m , T_e , T_s 및 T_d 의 계수는 각각 n , m , e , s , d 로서 불확정변수가 개입된 좌표의 개수, 센서쌍 개수, 불균형 평면 개수, 추정해야할 좌표수($s = N - m$), 그리고 불확정변수가 개입되지 않은 좌표의 개수($d = N - n$)를 의미한다.

3. 불균형 응답 해석

불균형응답해석은 회전체베어링계의 강제진동해석에 있어 가장 핵심적인 분야 중의 하나로서 진동의 진단이나 밸런싱 그리고 매개변수 규명 등에 유용하게 활용되고 있다⁽¹⁾. 본절에서는 복소운동방정식 (5)를 사용하여 불균형응답 간접추정을 위한 식유도시 사용할 수 있도록 불균형 응답을 구하도록 한다.

복소 불균형 벡터는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$W = \{w_{v1} + jw_{r1} \quad 0 \quad w_{v2} + jw_{r2} \quad 0 \quad \dots \quad w_{vn} + jw_{rn} \quad 0\}^T \quad (7)$$

여기서 nn 은 유한요소모델의 절점수(= $N/2$)를 의미한다. 일반적으로 불균형 응답은 다음과 같이 두 개의 동조진동(synchronous vibrations), 즉 전진(forward)과 후진(backward) 성분으로 나누어 쓸 수 있다.

$$p = p_f e^{j\Omega t} + \bar{p}_b e^{-j\Omega t} \quad (8)$$

여기서 p_f 와 p_b 는 각각 불균형응답의 전진과 후진 선회응답(whirl response)벡터를 의미한다. 이때 불균형응답 벡터는 식 (7), (8)을 식 (5)에 대입하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} D_{ff} & D_{fb} \\ D_{bf} & D_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_f \\ p_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W \\ 0 \end{bmatrix} \Omega^2 \quad (9)$$

식 (9)에서 도입한 부분강성행렬들은 다음과 같이 나타난다.

$$D_{ff} = -\Omega^2 M + \Omega^2 G + K + K_f + j\Omega C_f$$

$$D_{bb} = -\Omega^2 M - \Omega^2 G + K + \bar{K}_f + j\Omega \bar{C}_f$$

$$D_{bf} = \bar{K}_b + j\Omega \bar{C}_b, \quad D_{fb} = K_b + j\Omega C_b$$

식 (9)로부터 $p_b = 0$, 즉 후진불균형응답이 없지는 경우는 $D_{bf} = 0$ 또는 $p_f = 0$ 로서 첫번째 조건인 $D_{bf} = 0$ 은 시스템의 등방성(isotropy)을 의미하며 불균형에 의한 후진선회성분이 나타나지 않음을 의미한다⁽⁶⁾. 즉 등방성조건은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$D_{bf} = \bar{K}_b + j\Omega \bar{C}_b = 0 \quad (10)$$

이방성시스템의 경우에는 식 (9)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_f \\ \dot{p}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{ff} & H_{fb} \\ H_{bf} & H_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ O \end{bmatrix} \Omega^2 = \begin{bmatrix} H_{ff} \\ H_{bf} \end{bmatrix} W \Omega^2 \quad (11)$$

식 (11)에서 도입된 행렬, 즉 H_{ff} , H_{bf} , H_{fb} , H_{bb} 는 벨런싱에서 사용되는 영향계수(influence coefficients)를 회전속도의 제곱으로 나눈 형태로서 여기서는 편의상 이것들을 불균형응답함수라고 정의하도록 하며 다음과 같은 관계식을 갖는다.

$$H_{ff} = [D_{ff} - D_{fb} D_{bb}^{-1} D_{bf}]^{-1} \quad (12a)$$

$$H_{bf} = -D_{bb}^{-1} D_{fb} H_{ff} \quad (12b)$$

$$H_{fb} = -H_{ff} D_{fb} D_{bb}^{-1} \quad (12c)$$

$$H_{bb} = D_{bb}^{-1} - D_{bb}^{-1} D_{bf} H_{ff} \quad (12d)$$

불균형응답함수를 구하면 식 (11)로부터 불균형응답을 손쉽게 계산할 수 있으며 영향계수는 회전속도의 제곱을 곱하여 구할 수 있다. 불균형응답식에서 H_{fb} 와 H_{bb} 는 후진 가진(backward excitation)에 의한 응답으로서 불균형에 의한 가진은 전진가진이므로 영향을 미치지 못함을 알 수 있다. 베어링이 등방성 조건을 만족하는 경우는 식 (11)을 다음과 같이 간략화할 수 있다. 즉

$$p_f = H_{ff} W \Omega^2 = D_{ff}^{-1} W \Omega^2$$

이 경우에는 이미 언급한 바와 같이 후진 선회 응답이 나타나지 않게 된다.

4. 불균형 응답의 추정

불균형 응답에 대한 간접 추정식을 유도하기 위해 보조 유한요소 모델(auxiliary finite elements model)을 도입하기로 한다. 보조유한 요소모델은 실험 대상이 되는 회전체 베어링계에서 특성치를 알기 어려운 불확정 변수들을 제외한 다른 모든 특성을 정확히 묘사하고 있다고 가정한다. 상첨자 s 와 p 가 각각 보조 모델과 실제 시스템(prototype)을 의미한다고 하면 다음과 같은 관계식을 식 (6)을 이용하여 쓸 수 있다.

$$D_{ff}^s = -\Omega^2 M + \Omega^2 G + K : D_{ff}^p + K_{ff}^p + j\Omega C_{ff}^p \quad (13a)$$

$$D_{bb}^s = -\Omega^2 M - \Omega^2 G + K : D_{bb}^p + K_{bb}^p + j\Omega C_{bb}^p \quad (13b)$$

$$D_{fb}^s = O : D_{fb}^p = \bar{K}_{fb}^p + j\Omega \bar{C}_{fb}^p \quad (13c)$$

$$D_{bf}^s = O : D_{bf}^p = K_{bf}^p + j\Omega C_{bf}^p \quad (13d)$$

식 (11)에 의하면 불균형 응답은 전진성분과 후진 성분으로 나눌 수 있으며 각각 독립적으로 관계식을 유도할 수 있다.

4.1 전진 불균형 응답(Forward Unbalance Response) 추정식

먼저 식 (12a)로부터 아래와 같은 등식을 얻을 수 있다.

$$[D_{ff}^p - D_{fb}^p [D_{bb}^p]^{-1} D_{bf}^p] H_{ff}^p = I \quad (14)$$

식 (14)는 식 (12b)와 (13a)를 이용하면

$$D_{ff}^s H_{ff}^p + [K_{ff}^p + j\Omega C_{ff}^p] H_{ff}^p + [K_{fb}^p + j\Omega C_{fb}^p] H_{bf}^p = I \quad (15)$$

와 같이 변형할 수 있으며 식 (15)에서 부분적으로 알기 어려운 불확정 변수를 포함한 행렬의 요소를 제거하면 다음과 같은 압축된 형태의 식을 얻을 수 있다.

$$T_d D_{ff}^p H_{ff}^p T_d^t = T_d T_e^t \quad (16)$$

여기서 T_d 는 불확정 변수들을 행렬식에서 제거하기 위해 이용하였다. 식 (16)은 측정이 된 응답(measured ; master dofs)과 추정해야 할 응답(unmeasured ; slave dofs)으로 다시 다음과 같이 재정돈할 수 있다.

$$T_d D_{ff}^s \begin{bmatrix} T_s^t \\ T_d^t \end{bmatrix} [T_s \ T_d] H_{ff}^p T_e^t = T_d T_e^t$$

또는

$$\begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ d \times xm & d \times m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{ffse}^p \\ H_{ffme}^p \end{bmatrix} = T_d T_e^t \quad (17)$$

이때, H_{ffse}^p 는 측정이 어려운 불균형 응답함수로서 $s \times e$ 의 차수를 가지며 E_1 , E_2 는 부분행렬로서 아래와 같다.

$$E_1 = T_d D_{ff}^s T_s^t, \quad E_2 = T_d D_{ff}^s T_m^t \quad (18)$$

결국 측정이 어려운 전진 선회 불균형 응답함수를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$H_{ffse}^p = E^L [T_d T_e^t - E_2 H_{ffme}^p] \quad (19)$$

여기서 E^L 은 일반화된 역행렬(generalized inverse matrix)로서 $[E^L E]^L E^L$ 로 정의된다.

4.2 후진 불균형 응답(Backward Unbalance Response) 추정식

식 (13b)으로 주어진 관계를 생각하면 식 (20)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$D_{bb}^p H_{bf}^p + [K_{bf}^p + j\Omega C_{bf}^p] H_{bf}^p + [K_b^p + j\Omega C_b^p] H_{ff}^p = 0 \quad (21)$$

불확정변수들이 국부적으로만 존재하고 있다는 점에 착안하면 식 (16)에서와 마찬가지로 식 (21)을 다음과 같이 압축할 수 있다.

$$T_d D_{bb}^s H_{bf}^p T_v^t = 0 \quad (22)$$

그리고 식 (22)는 식 (17)과 마찬가지로 다음과 같이 재정리할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ d \times s & d \times m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{bfse}^p \\ H_{bfme}^p \end{bmatrix} = 0 \quad (23)$$

여기서 H_{bfse}^p 는 $s \times e$ 의 추정해야할 불균형응답함수 행렬이며 부분행렬 G_1, G_2 은 아래와 같다.

$$G_1 = T_d D_{bb}^s T_s^t, \quad G_2 = T_d D_{bb}^s T_m^t \quad (24)$$

따라서 H_{bfse}^p 은 식 (19)와 유사하게 다음과 같이 얻어진다.

$$H_{bfse}^p = -G_1^{-1} G_2 H_{bfme}^p \quad (25)$$

식 (25)는 이방성(anisotropy)인 회전체의 경우에 나타나는 후진 불균형 응답을 추정하기 위해 사용되며 등방성(isotropy)인 회전체에서는 의미가 없다. 결국 식 (19)에서는 전진 불균형 응답을, 식 (25)에서는 후진 불균형 응답을 결과로 주게되며 이 두식을

이용하면 일반적인 불균형응답을 모두 알아낼 수 있게 된다. 한편 식 (19)와 (25)가 존재하기 위해서는 E_1 과 G_1 에 대한 일반화된 역함수가 존재해야 하는데 일반적으로 $d \geq s$, 즉 불확정 변수를 포함한 좌표수를 제외한 좌표수가 추정해야 하는 좌표수보다 커야 한다. 마찬가지로 관점에서 불확정변수를 포함한 좌표수가 n 개 있다면 $m \geq n$ 이어야 한다.

5. 불균형 응답을 이용한 베어링 매개변수 규명

불균형 응답특성에는 베어링 매개변수의 영향이 내적으로(implicitly) 결합되어 나타나므로 불균형응답과 베어링 매개변수와의 직접관계식을 얻을 수 없다. 불균형응답으로부터 베어링 매개변수를 분리하기 위해서 Hong과 Lee^(6,13)는 보조유한요소모델을 이용한 시뮬레이션결과를 결합하는 방법을 제안하였다. 이방법은 선형식을 제공하므로 사용이 간편할 뿐만 아니라 회전속도에 대한 종속성을 쉽게 파악할 수 있는 장점을 갖는다. 이방법은 개념적으로는 주파수 응답함수를 이용한 구조동특성변경기술⁽¹⁴⁾과 그 맥을 같이 하므로 제안된 식을 역으로 활용하게 되면 회전체 베어링계의 동특성 재해석이나 재설계에도 유용하다. 베어링 매개변수 규명에 대한 자세한 내용은 참고문헌에 잘 기술되어 있으므로 자세한 유도과정은 생략하고, 결과식을 서술하면 다음과 같다⁽⁶⁾.

$$A = k_{ff}^p + j\Omega C_{ff}^p + (k_b^p + j\Omega C_b^p)U \quad (26)$$

$$B = \bar{k}_{bb}^p + j\Omega \bar{C}_{bb}^p + (\bar{k}_{ff}^p + j\Omega \bar{C}_{ff}^p)U \quad (27)$$

여기서 k_{ff}, C_{ff}, k_b 와 C_b 는 $n \times n$ 의 압축대각행렬로서 각각 K_{ff}, C_{ff}, K_b 및 C_b 에 대응되며 사용된 행렬들은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} A &= [H_{ffmn}^s]^{-1} [H_{ffme}^s - H_{ffme}^p] [H_{ffme}^p]^{-R} \\ B &= -[H_{bbmn}^s]^{-1} [H_{bfme}^p] [H_{bfme}^p]^{-R} [H_{ffme}^p]^{-R} \\ U &= [H_{bfme}^p] [H_{ffme}^p]^{-R} \end{aligned}$$

이때 $H_{\dots ij} = m, n, e$ 는 $T_i H_{\dots} T_j$ 로 정의되는 압축행렬이다. 그리고 $[H]^{-1}$ 과 $[H]^{-R}$ 은 H 의 일반화된 역행렬로서 각각 $[H^L H]^{-1} H^L$ 와 $H^L [H H^L]^{-1}$ 로 정의된다.

상첨자 p 로 표시되는 불균형응답함수는 실제회전체에서 측정된 응답, 상첨자 s 로 표시되는 불균형응답은 보조모델에서 계산된 응답을 나타낸다. 따라서 식 (26)과 (27)은 베어링 매개변수를 구하기 위해

서 회전체로부터 $H_{ffme}^p, H_{ffne}^p, H_{bfme}^p, H_{bfne}^p$ 를 측정해야 함을 의미한다. 그러나 실제로는 베어링 위치에 관련된 불균형 응답, 예컨대 H_{ffme}^p, H_{bfne}^p 는 베어링이 베어링 하우징에 의해 둘러 싸여 있으므로 실측이 곤란하다. 이와같은 어려움을 극복하기 위해서는 앞절에서 유도한 불균형응답간접 추정식이 필요하다. 한편 $H_{ffma}^s, H_{ffme}^s, H_{bbmn}^s$ 는 보조유한요소 모델에서 계산되어야하는 불균형응답함수로서 특히 H_{bbmn}^s 는 후진가진에 의한 응답으로부터 얻어진다. 식 (26)과 (27)의 해는 베어링의 갯수보다 측정위치와 가진위치의 갯수가 적어도 같아야 존재한다($m, e \geq n$). 두 식에 최소오차자승법을 적용하게 되면 부록에 나와 있는 것과 같이 베어링 매개변수 규명식을 얻을 수 있다.

6. 수치실험 예제

본절에서는 수치실험을 통해 앞절에서 유도하였던 불균형 응답 추정과정을 제시하고 그 유용성을 보이도록 한다. 먼저 회전체에서 베어링의 매개변수를 결정하기 어려울 때 불균형 응답을 간접추정하는 과정과 결과의 타당성 여부를 중심으로 설명하도록 하고, 다음으로 간접추정한 불균형 응답을 베어링 매개변수 규명에 적용하는 과정에서 본 연구 결과의 유용성을 보이도록 한다.

6.1 수치실험 대상 및 과정

본수치실험에서는 Fig. 1과 같은 회전체 베어링계를 대상으로 하였고 여기서 두개의 동일한 베어링의 특성을 불확정 매개변수로 가정하였다. 고려한 시스템은 좌우대칭이 되며 자세한 제원은 Table 1에 나타내었다. 유한요소모델은 등간격의 8개의 요소로 구성

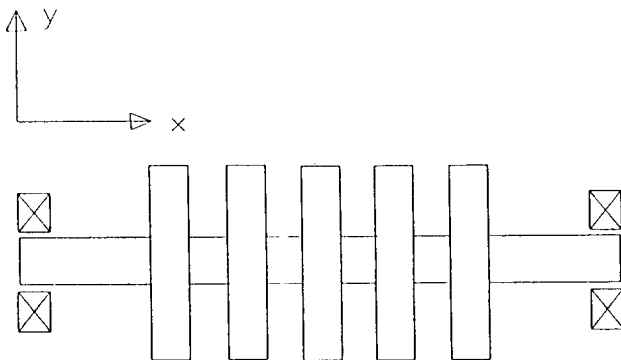


Fig. 1 Five disk rotor – bearing system

하였다. 불균형응답 간접추정 과정은 다음과 같이 요약할 수 있다.

i) 불확정 변수들을 제외한 회전체 베어링계의 나머지 부분에 대해 정확히 묘사할 수 있는 유한요소 보조 모델을 결정한다(필요할 경우 유한요소모델을 개선하기 위한 사전 실험이나 시뮬레이션을 수행한다).

ii) 불균형 가진위치와 센서의 위치를 결정한다(불확정 매개변수와 관련된 좌표수 이상의 가진과 측정위치 결정, $m, e \geq n$).

iii) 시험대상인 회전체 베어링계에서 측정 가능한 불균형응답을 측정하여 H_{ffme}^p, H_{bfme}^p 를 결정한다.

iv) 식 (19)와 (25)를 이용하여 H_{ffme}^p 와 H_{bfme}^p 로부터 H_{ffne}^p, H_{bfne}^p 를 추정한다.

실제적인 관점에서는 불균형을 부가한 실험을 수행하기 전에 원래 상태의 불균형응답을 구할 필요가 있다. 이것은 실제 시스템의 경우 일정 이상의 잔류 불균형과 회전속도에 무관한 형상오차(runout)가 항상 존재하고 있으므로 외부에서 부가한 불균형에 의한 응답성분을 추출하기 위해서는 잔류불균형과 형상오

Table 1 Specifications for the five disk rotor – bearing system

Shaft

- length 1.20m
- diameter 10cm
- density 7833 kg/m³
- Young's modulus 2.80×10^{11} N/m²
- number of finite elements 8(equal length)

Disks(5 identical)

- mass 20kg
- polar moment of inertia 0.163kg – m²
- diametral moment of inertia 0.085kg – m²
- locations 0.30m, 0.45m, 0.60m, 0.75m, 0.90m(from left)

Bearings(2 identical)

- stiffness coefficients(MN/m)
 $k_{yy} = 20, k_{yy} = -15, k_{zy} = 10, k_{zz} = 25$
- damping coefficients(KNs/m)
 $c_{yy} = 60, c_{yy} = -40, c_{zy} = -40, c_{zz} = 80$

차에 의한 응답을 제외해야 하기 때문이다. 한편 불균형응답을 이용한 베어링 매개변수 규명을 위해서는 다음과 같은 과정을 추가하여 가능하다.

v) 보조유한요소모델로부터 불균형응답을 계산하여 $H_{ffme}^s, H_{ffmn}^s, H_{bbmn}^s$ 를 구한다.

vi) 식 (26), (27)의 행렬 A, B 와 U 를 계산한다.

vii) 부록에 주어진 매개변수 규명식을 이용하여 베어링매개변수를 매회전수별로 계산한다.

본 예제에서는 불확정매개변수인 베어링에 관련된 좌표가 2개이므로 최소 2개의 가진점과 측정점을 선정해야 한다. 여기서는 측정이 가능한 불균형 응답은 불균형과 센서의 위치를 축상의 1번, 5번 disk에 두고 계산하였고 추정하고자 하는 불균형응답은 베어링 위치를 포함, 측정하지 않은 절점에서의 응답을 고려하였다. 측정잡음에 다른 효과를 검토하기 위해 인위적으로 랜덤 잡음 $1\mu\text{m}/\text{KN}$ (in root mean squares)를 시스템에서 계산된 불균형응답에 첨가하였다.

6.2 수치실험 결과 및 검토

Figs. 2, 3은 실제시스템으로부터 계산된 불균형응답함수의 절대값을 보여주고 있다. 계산된 불균형 응답은 회전속도의 제곱으로 나누어 표준화시키고 랜덤 잡음신호를 첨가하였다. Figs. 4, 5에서는 Figs. 2,

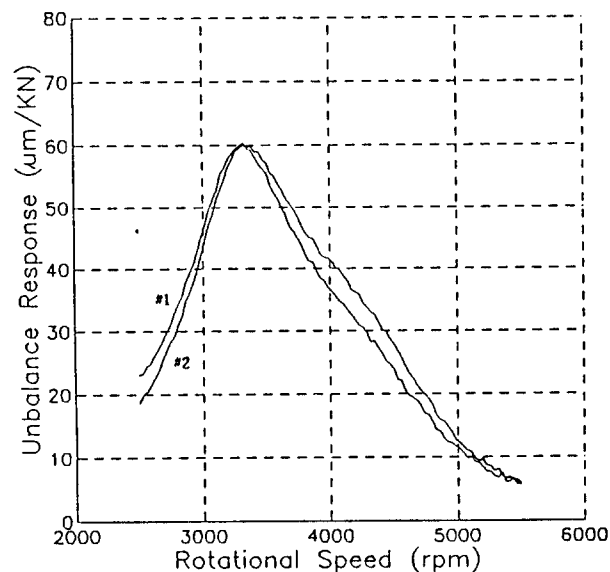


Fig. 2 Forward unbalance responses(magnitude)
unbalance : 3rd nodal point(1st disk)
sensors : #1-1st disk, #2-5th disk

3의 불균형응답함수를 이용해 추정된 불균형응답함수결과를 보여주고 있는데 추정된 불균형응답이 원래 시스템의 불균형응답을 잘 표현해주고 있음을 알 수 있다. 추정된 불균형응답에도 전체적으로 실제 시스템에서 계산된 불균형 응답 정도의 잡음이 나타나고 있는데 불균형응답을 추정하기 위한 식들이 근본적으로 잡음효과를 배제하기 못하는 Equation error 형태⁽¹⁵⁾를 갖기 때문에 측정점을 늘려도 잡음에 의한 효과가 감소하지는 않는다. 측정점이 불확정매개변수 관련좌표수보다 많을 때 잡음의 효과를 개선하는 방법으로는 불확정 매개변수의 값을 이미 언급한 매개변수 규명법을 이용하여 결정, 매개변수 값을 보조유한요소모델에 적용하여 원하는 불균형응답을 다시 추정하는 과정을 반복하는 과정에서 IV(instrumental variable)방법⁽¹⁵⁾을 이용하면 가능하다. 그러나 일반적으로 정확한 불균형 응답을 얻기 위해서는 측정 불균형 응답의 신뢰도를 높여야 하는데, 회전체의 불균형 응답은 정상상태 응답으로부터 Tracking filter 등을 이용하여 회전속도에 동조되는 성분만을 추출하므로 비교적 잡음이 적기 때문에 실용상으로는 여기서 제안한 식을 직접 적용하여도 문제가 없을 것으로 생각된다.

Figs. 6, 7은 제시한 수식을 이용하여 규명된 베어링 매개변수를 보여주고 있다. 임계속도(본예제에서는 첫번째 전진, 후진 임계속도)근처에서는 규명상태

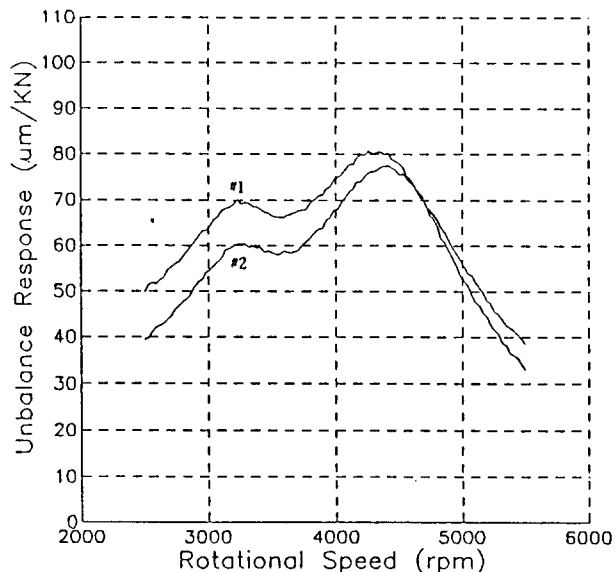


Fig. 3 Backward unbalance responses(magnitude)
unbalance : 3rd nodal point(1st disk)
sensors : #1-1st disk, #2-5th disk

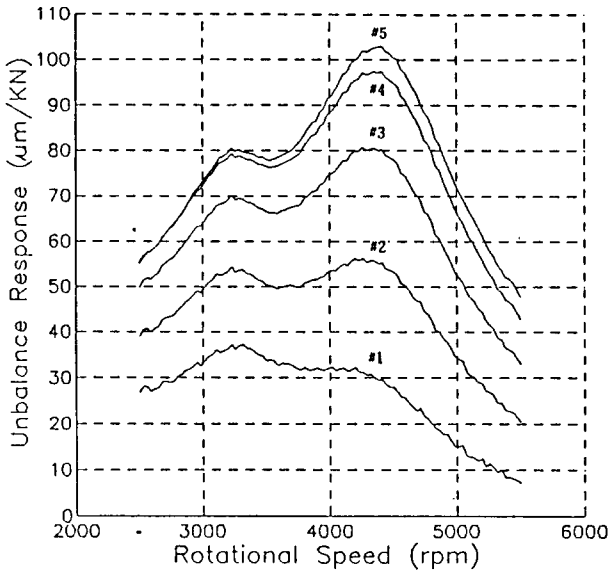


Fig. 4 Estimated forward unbalance responses
 unbalance : 1st disk
 sensors : #1 - 1st nodal point (bearing 1),
 #2 - 2nd nodal point
 #3 - 3rd nodal point (1st disk),
 #4 - 4th nodal point
 #5 - 5th nodal point (2nd disk)

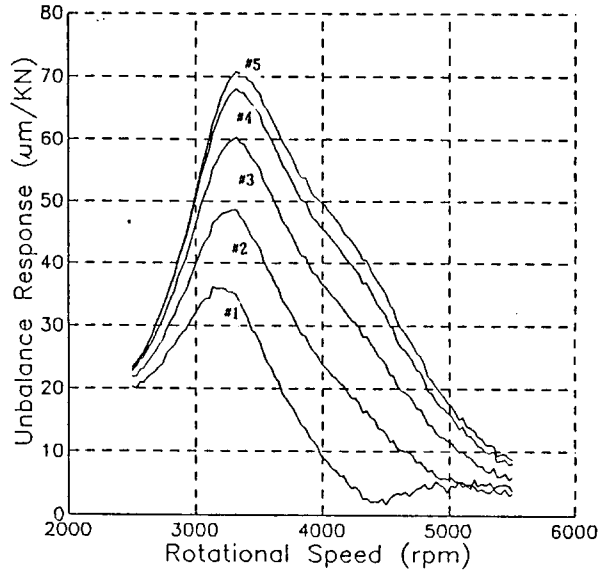


Fig. 5 Estimated backward unbalance responses
 unbalance : #1st disk
 sensors : #1 - 1st nodal point (bearing 1),
 #2 - 2nd nodal point,
 #3 - 3rd nodal point (1st disk),
 #4 - 4th nodal point
 #5 - 5th nodal point (2nd disk)

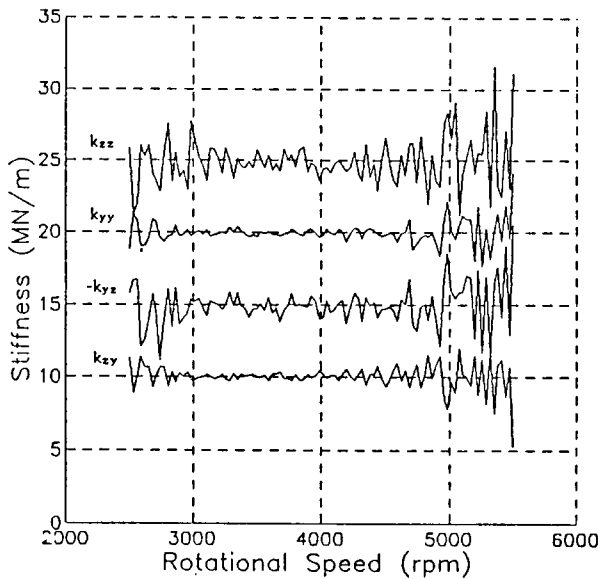


Fig. 6 Identified bearing stiffness coefficients

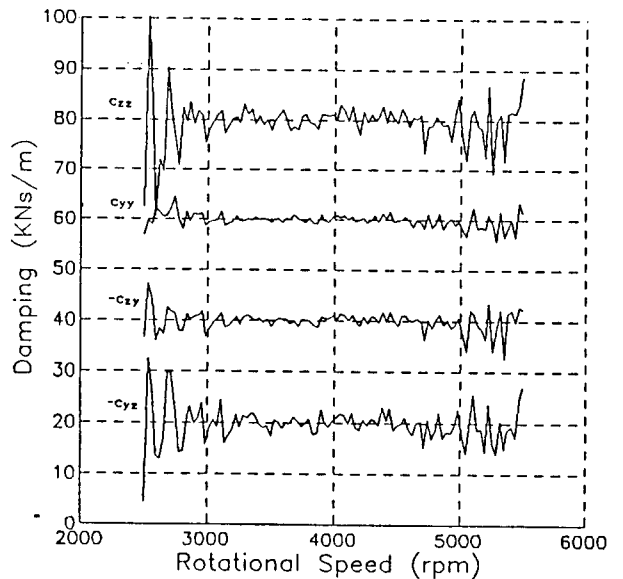


Fig. 7 Identified bearing damping coefficients

가 양호하나 임계속도에서 벗어날수록 신호잡음비(S/N ratio)가 나빠지므로 결과가 실제값으로부터 많이 변동함을 확인할 수 있다. 그러나 본 예제를 통해 잡음이 많이 개입되지 않으면 우수한 규명 결과를 얻을 수 있을 것으로 기대할 수 있으며 회전체의 전 회전속도 영역에서의 베어링 매개변수를 알아낼 수 있다. 베어링의 특성을 보다 정확히 추출하기 위해서는 불균형응답을 측정할 때 응답이 큰 영역, 즉 공진회전속도근처에서 측정하거나 비공진 영역에서는 부가시키는 불균형을 크게하여 S/N비를 좋게하는 것이 바람직하다. 또한 베어링 매개변수가 회전속도에 무관하다고 가정하면 전체영역에 대해 최소오차자승법을 적용하여 보다 신뢰성있는 결과를 얻을 수 있다.

7. 결 론

본 논문에서는 측정이 어려운 불균형 응답을 측정이 가능한 불균형 응답과 유한요소모델식을 이용하여 간접적으로 추정할 수 있는 방법을 개발하였고 수치실험을 통하여 그 타당성을 입증하였다. 유한요소모델은 회전체계에 있어 매개변수를 결정하기 어려운 불확정변수가 국부적으로 있는 경우를 고려하였고 이러한 불확정변수에 무관하게 불균형응답을 추정할 수 있도록하는 관련수식을 유도하였다. 한편 본연구에서 수행하였던 불균형응답 추정 과정을 베어링 매개변수 규명에 적용하면 매우 유용함을 보였다.

본 논문에서 제시한 간접추정식은 실험을 통해 회전체 베어링계에 대한 제한적인 정보만을 접할 수 있었던 어려움을 극복할 수 있도록 하는데 중요한 의미가 있으며 결과식을 이용하여 밸런싱이나 매개변수 규명등에 보다 적극적으로 활용할 수 있다. 또한 선형식이므로 실제적인 적용시 프로그램이 간단하고 계산시간이 적으므로 적용이 수월하다. 한편 제시한 간접추정방법이 보다 유용하게 활용되기 위해서는 측정된 불균형응답에 잡음이 개입되어 있는 경우 추정결과의 오차정도에 대한 평가 또는 개선하는 방안에 대한 연구가 필요할 것으로 생각된다. 본 연구를 통해 제시한 제반 결과는 일반 구조물에 대한 주파수응답 함수 추정방법과 매개변수 규명방법으로 그대로 적용이 가능하며, 측정가능한 일부신호를 이용한 진동감시나 불확정 매개변수가 있는 구조물의 실험적 모드 해석 등에 활용이 가능할 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

- (1) 홍성욱, 이종원 1988, "회전속도 의존 매개변수를 가진 회전체-베어링계의 동적해석", 대한기계학회논문집, 제12권 제5호, pp. 976~983.
- (2) Saito, S. and Azuma, T., 1983, "Balancing of Flexible Rotors by the Complex Modal Method", Trans. ASME, Journal of Vibrations, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 105, pp. 94~100.
- (3) Darlow, M. S., 1987, Balancing of High Speed Machinery : Theory, Method, and Experimental Results", Journal of Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 1, No. 1, pp. 105~134.
- (4) Lee, C. W. and Hong, S. W., 1988, "Identification of Bearing Dynamic Coefficients by Unbalance Response Measurements", Proceedings of Institution of Mechanical Engineers, Vol. 203C, pp. 93~101.
- (5) Stanway, R., 1983, "Identification of Linearized Squeezed Film Dynamics Using Synchronous Excitation", Proceedings of Institution of Mechanical Engineers, Vol. 197C, pp. 199~204.
- (6) Hong, S. W. and Lee, C. W., 1990, "Determination of Bearing Dynamic Coefficients From Unbalance Response in Flexible Rotor-Bearing Systems", Proceeding of the Third International Symposium on the Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery (Hawaii, USA).
- (7) Nelson, H. D. and McVaugh, J. M. 1976, "The Dynamics of Rotor Bearing Systems Using Finite Elements", Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, Stress, and Reliability in Design, Vol. 106, pp. 107~112.
- (8) Muszynska, A., 1986, "Modal Testing of Rotor Bearing Systems", International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, Vol. 1, pp. 15~34.
- (9) Lee, C. W. and Joh, Y. D., 1992, "Theory of Excitation Methods and Estimation of Frequency Response Functions in Complex Modal Testing of Rotating Machinery", Journal of

Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 6, No. 4(to appear).

(11) Steinwender, F. and Nordmann, R., 1986, "Parameter Adjustment of Finite Element Model by Means of Measured Natural Frequencies", Proceedings of the Fourth International Modal Analysis Conference, California, USA.

(12) Chen, J. C. and Garba, J. A., 1984, "Analytical Model Improvement Using Modal Test Results", American Institution of Aeronautics and Astronautics Journal, Vol. 18, No. 6, pp. 684~690.

(13) Hong, S. W. and Lee, C. W., 1991, "Identification of Linearised joint Structural Parameters by Combined use of Measured and Computed Frequency Responses", Journal of Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 5, No. 4, pp. 267~277.

(14) Özgüven, H. N., 1990. "Structural Modifications Using Frequency Response Functions", Journal of Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 4, No. 1, pp. 53~63.

(15) Fritzen, C. R., 1986, "Identification of Mass, Damping and Stiffness Matrices of Mechanical Systems", Trans. ASME, Journal of Vibrations, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Vol. 108, pp. 9~16.

부 록

● 베어링 매개변수 규명식

식 (26)과 (27)에 최소오차자승법을 적용하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 k_{fi} + j\Omega c_{fi} &= \frac{1}{De_i} \{ A_{ii} \sum_{j=1}^n (U_{ij})^2 - U_{ii} \sum_{j=1}^n U_{ij} A_{ij} \} \\
 &= Q_{i1} \\
 k_{fi} + j\Omega c_{fi} &= \frac{1}{De_i} \sum_{j=1}^n U_{ij} B_{ij} = Q_{i2} \\
 k_{bi} + j\Omega c_{bi} &= \frac{1}{De_i} \sum_{j=1}^n U_{ij} A_{ij} = Q_{i3} \\
 k_{bi} + j\Omega c_{bi} &= \frac{1}{De_i} \{ B_{ii} \sum_{j=1}^n (U_{ij})^2 - U_{ii} \sum_{j=1}^n U_{ij} B_{ij} \} \\
 &= Q_{i4} \\
 i &= 1 \cdots \cdots n
 \end{aligned} \tag{A1}$$

여기서

$$De_i = \sum_{j=1}^n (U_{ij})^2 \quad i = 1 \cdots \cdots n$$

이며 프라임(') 기호는 합산시 $j=i$ 를 제외함을 의미한다. 결과적으로 여덟개의 베어링 매개변수는 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned}
 2k_{vvi} &= Re[Q_{i1} + Q_{i2} + Q_{i3} + Q_{i4}], \\
 2k_{zzi} &= Re[Q_{i1} + Q_{i2} - Q_{i3} - Q_{i4}], \\
 2k_{vzi} &= Im[Q_{i2} + Q_{i3} - Q_{i1} - Q_{i4}], \\
 2k_{zvi} &= Im[Q_{i1} + Q_{i3} - Q_{i2} - Q_{i4}] \\
 2\Omega k_{vvi} &= Im[Q_{i1} + Q_{i2} + Q_{i3} + Q_{i4}], \\
 2\Omega k_{zzi} &= Im[Q_{i1} + Q_{i2} - Q_{i3} - Q_{i4}] \\
 2\Omega c_{vvi} &= Re[Q_{i1} + Q_{i4} - Q_{i3} - Q_{i3}], \\
 2\Omega c_{zvi} &= Re[Q_{i2} + Q_{i4} - Q_{i1} - Q_{i3}] \\
 i &= 1 \cdots \cdots n
 \end{aligned} \tag{A2}$$