

유한 요소법을 이용한 피스톤 링의 윤활 해석

심현해 · 권오관

한국과학기술연구원

Piston-Ring Lubrication Analysis Using Finite Element Method

Hyun Hae Shim, Oh Kwan Kwon

Korea Institute of Science and Technology

Abstract—In solving the Reynolds equation in dynamically loaded bearing problem, it is almost impossible to find the squeeze velocity and the cavitation region by analytical method. Finite Element Method was applied to the piston-ring lubrication analysis to solve the complementary problem. The method was very efficient and any convergence problem was not encountered.

1. 서 론

왕복동 내연 기관의 마찰 손실 중 가장 큰 비중을 차지하는 것이 실린더 벽과 피스톤 링 사이의 마찰이며, 따라서 이부분의 윤활 최적화는 매우 중요하다[1-5].

실린더 벽과 마찰하는 피스톤 링의 면은 곡면 형상을 가짐으로써, 두 마찰면 사이에는 유체 역학적으로 윤활 유막이 형성되고, 따라서 마찰 계수가 낮고, 마모가 저지된다. 윤활이론에 의하면, 실린더 벽과 피스톤 링 사이의 윤활은 Fig. 1에 나타난 바와 같이 나타낼 수 있으며 이에 적용할 수 있는 윤활 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 6U \times \frac{\partial h}{\partial x} + 12 \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1)$$

Fig. 1의 P_1 와 P_2 는 피스톤 링 유막의 입구와 출구에서의 압력으로서 유막 내 압력 분포의 경계 조건이 되며, P_g 는 피스톤 링 홈 안쪽 공간의 압력으로서 유막에 대한 부하로 작용한다.

한편, 윤활유는 음의 압력을 지탱할 수 없으므로 유막이 깨지는 기공(cavitation)이 형성될 수 있다. 피스톤 링의 윤활에서는 유막과 기공의 영역 위치가 미지수일 뿐만 아니라 동하중을 받으므로, 단순한 수식으로 해를 구하기 불가능하다. 본 논문에서는 이를 극복하기 위하여, 유한 요소법을 적용하였다[6, 7]. 또한, 본 해석에서는 두 가지의 수치적 기법이 사용되었다. 이 기법들의 장

점은 전통적인 Gauss-Seidel과 Newton 법을 대체함으로써 계산 효율이 향상되는 것이다[8, 9].

2. 해 석

비압축성 윤활 유막에서의 실제의 압력 분포는 다음의 범함수(functional)를 최소화 한다[6, 7].

$$I = \frac{1}{2} \int_A \frac{h^3}{12\eta} \nabla p \cdot \nabla p \, dA - \int_A h \bar{U} \nabla p \, dA + \int_A \dot{h} p \, dA + \int_{S_q} Q p \, ds \quad (2)$$

여기서, 우변 마지막 항의 S_q 는 유량을 아는 경계이고, 나머지 경계에서는 압력이 주어진다. 이 식의 적분 구간을 유한 요소들로 나누어 불연속 유한 요소법의 식으로 나타내면

$$I = \sum_e I^e \quad (3)$$

$$I^e = -\frac{1}{2} \langle p \rangle^e [K_p]^e \{p\}^e - \langle p \rangle^e \left([K_U]^e \{\bar{U}\}^e + [K_h]^e \{\dot{h}\}^e - \{q\}^e \right) \quad (4)$$

여기서, \sum_e 는 모든 요소들에 대한 합을 나타내며,

$$K_{ij}^e = - \int_A \frac{h^3}{12\eta} \nabla N_i \cdot \nabla N_j \, dA$$

$$K_{U_j}^e = \int_A h \nabla N_j \, dA$$

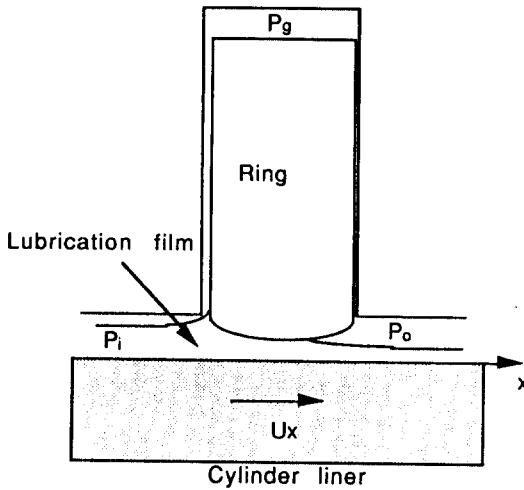


Fig. 1. Film formation between piston ring and cylinder liner.

$$K_{ij} = - \int_A N_i N_j dA$$

$$q_i = \int_{S_q} h \bar{u}^n N_i dS \quad (5)$$

식 (2)를 최소화하는 실제의 {p}는 전체 시스템 뿐만 아니라 각 요소에 대하여도 다음식을 만족시킨다.

$$\frac{\partial L^e}{\partial p_i} = 0 \quad (6)$$

따라서, 식 (4)를 식 (6)에 대입하면

$$- [K_p]^e \{p\}^e - (\{Q_{\bar{c}}\}^e + \{Q_i\}^e - \{q\}^e) = 0 \quad (7)$$

여기서,

$$Q_{\bar{c}_i} = [K_{\bar{c}_i}] \{\bar{U}\}^e$$

$$Q_{i_i} = [K_{i_i}] \{h\}^e$$

유한 요소법에서는 전체 시스템 유동률 매트릭스와 유량 벡터가 요소 매트릭스와 벡터들로부터 수치적으로 결합 될 수 있다.

이 불연속 형태의 문제는 아래의 비음압(non-negative) 구속 조건을 만족시키면서 전체 범함수를 최소화시키는 노우드 압력들을 구하는 것이다.

$$P_i \geq 0 \quad (8)$$

이 구속 조건에 의하여 $p > 0$ 이 되는 영역은 유막이 형성되는 부분이고, $p = 0$ 이 되는 부분은 기공(cavitation)

이 형성되는 부분이다. 이와 같이 유막과 기공의 영역 위치자재가 미지수인 경우는 단순한 수식으로 해를 구하기 불가능하다.

그러하여 윤활 문제는 구속조건을 갖는 2차 방정식 (quadratic equation)으로 귀착된다. 이와 같은 문제는 변형된 Gauss-Seidel 반복법으로 풀릴 수 있으나, 이 해법은 수렴성이 좋지 않고, 수렴 속도가 느린 경우가 있다. 그러므로, 본 연구에서는 전통적인 Gauss-Seidel 법을 대체하는 Chandrasekharan법을 사용하였다[9]. 이 방법에서는 구속 조건 (8)이 작용하여 압력이 영인 영역이 가정된다. 나머지 영역의 압력은 일반적인 해법으로써 얻는다. 가정된 경계는 반복적으로 수정된다. 이 기법을 간략히 기술하면 다음과 같다.

시스템 방정식에서 매트릭스 [K]와 벡터 {p}와 {Q}는 다음과 같이 나누어진다.

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}; \{p\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}; \{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}$$

여기서, 밀수 1은 구속 조건이 작용하지 않는 노우드들이고, 밀수 2는 구속 조건이 작용하는 노우드들이다. 이 방법은 두 영역이 옮겨 설정된 경우 다음의 사항들이 성립한다는 사실에 기초한다.

$$(i) \{p_2\} = 0 \quad (9)$$

$$(ii) [K_{11}] \{p_1\} = \{Q_1\} \quad (10)$$

$$(iii) [K_{21}] \{p_1\} < \{Q_2\} \quad (11)$$

$$(iv) \{p_1\} > 0 \quad (12)$$

문제는 곧 식 (9~12)들이 동시에 만족되도록 두 영역을 찾는 것으로 귀착된다. 이 영역 분리는 유일해를 가짐이 밝혀져 있으며, 다음의 연산 방식이 사용될 수 있다.

1. 임의로 각 노우드를 영역 1 또는 영역 2로 지정한다. 동하중 문제의 경우는 앞 시간 스텝에서 지정된 영역이 사용될 수 있다.

2. 식 (9)와 (10)을 사용하여 압력 {p}를 푼다.

3. 영역 1에 있는 노우드들에 대하여 구속 조건 (12)를 점검한다. 구속 조건을 만족시키지 않는 노우드들을 영역 2로 전환시킨다.

4. 영역 2에 있는 노우드들에 대하여 구속 조건 (11)을 점검한다. 구속 조건을 만족시키지 않는 노우드들을 영역 1로 전환시킨다.

5. 모든 구속 조건들이 만족되면 해가 얻어진 것이며, 그렇지 않으면 2단계에서 다시 반복하여 시작한다.

동하중 해석에서는 계산 초기에 어떠한 임의의 영역 지정도 가능하다. 첫 시간 스텝에서는 옳은 경계를 얻기 위해 수 회의 반복 계산이 소요될 것이다. 하지만, 뒤

따르는 시간 스텝들에서는 새로운 영역 지정이 앞 시간 스텝으로부터 단지 몇 개의 노우드들이 벗어날 것이다. 그러므로, 단지 몇 번의 반복 계산이 소요될 것이다. 평균적으로, 이 방법은 Gauss-Seidel 반복법보다 빠르며, 정확하다.

일단 노우드 압력들이 계산되면, 피스톤 링 유막에서 작용하는 전압력은 다음의 식으로 얻을 수 있다.

$$F = \langle B \rangle [p] \quad (13)$$

여기서 F는 하중이고, $\langle B \rangle$ 는 요소 면적 벡터이다. 여기까지 기술된 것은 슬라이더의 위치가 정해져 있고 압력과 하중이 계산되어지는 경우에 해당한다.

두번째의 계산 기법은 압착 속도를 찾기 위한 뉴우튼의 반복법을 대체한다. 이 방법에서는 평형 방정식 (13)과 최소화 문제 (4)가 결합함으로써 압착 속도가 양함수적으로 풀어진다.

하중 또는 속도 등이 시간에 따라 변하는 동하중 문제의 경우, 시간 $t + \Delta t$ 에서의 피스톤 링 유막 두께는 시간 t 에서 계산된 압착 속도를 사용하여 시간 t 에서의 유막 두께를 외삽법에 의하여 얻는다. 이 과정은 전체 사이클에 대하여 결과의 반복성이 얻어질때까지 반복된다. Goenka와 Booker[10]는 시간 t 에서의 압착 속도를 얻기위하여 뉴우튼법을 이용하는 반복 음함수적 방법 (iterative implicit scheme)을 사용하였지만, 이 방법은 수렴성이 좋지 않고, 계산 시간이 매우 길다. 따라서, 본 논문에서는 압착 속도를 양함수적(explicit) 방법으로 압력과 함께 동시에 푸는 방법을 사용하였다. 이 방법에서는 n 개의 미지 압력을 푸는 대신에, $n+1$ 개의 미지수 (n 개의 압력과 압착 속도)가 구속 조건을 갖는 연립 방정식으로서 풀린다. 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} K_{11} \cdots K_{1n} K_{1n} \\ \vdots \\ K_{n1} \cdots K_{nn} K_{nn} \\ C_1 \cdots C_2 \ 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \\ \dot{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \\ F \end{pmatrix} \quad (14)$$

이 방법에서는 뉴우튼의 반복법이 배제되어 있으므로, 다음과 같은 세 가지의 장점을 갖는다.

- (i) 계산이 훨씬 더 효율적이다.
- (ii) 수렴성의 문제가 없다.
- (iii) 양함수적 해법을 사용하므로 해의 정확도가 증가한다.

3. 피스톤 링에의 적용

피스톤 링의 윤활은 x 방향으로 대한 일차원으로 해석할

수 있다. 유한 요소는 Δx 이고, 형상 함수(shape function) N_i 는 일차원 식으로 하였다. 이 들을 식 (4)와 (5)에 적용하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} K_{ij}^e &= -\frac{h^3}{12 \eta B} b_i b_j \\ Q_{ij}^e &= [K_{ij}^e] \{U\}^e = h U_i b_j \\ Q_{i_i}^e &= [K_{i_i}^e] \{\dot{h}\}^e = -\dot{h} \frac{B}{2} \end{aligned} \quad (15)$$

여기서,

$$\begin{aligned} b_1 &= 1 \\ b_2 &= -1 \\ U_x &= \frac{U_1 + U_2}{2} \end{aligned}$$

B = 유한요소의 x 방향의 길이

식 (7)에 식 (15)를 대입하면,

$$\begin{aligned} &-\frac{h^3}{12 \eta B} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}^e - h U_x \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}^e - \dot{h} \frac{B}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}^e \\ &+ \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}^e \end{aligned} \quad (16)$$

식 (16)의 요소 방정식들을 전체 요소들에 대해 합하면 같은 모양의 시스템 방정식으로 나타낼 수 있다. 시스템 방정식에서는 내부 노우드들에서의 q_i 들이 0이 되고 입구와 출구에서의 q_i 즉, q_1 와 q_n 만이 미지수가 된다. 반면, 내부 노우드들에서의 p_i 들은 미지수가 되고 입구와 출구에서의 p_i 즉, p_1 와 p_n 는 경계 조건으로 주어진다. 이 시스템 방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$[K_{11}] \{P_1\} + [B_1] \dot{h} = \{Q_1\} \quad (17)$$

$$[K_{21}] \{P_1\} + [B_2] \dot{h} = \{Q_2\} \quad (18)$$

식 (13)에서 $\{P_2\} = 0$ 이므로,

$$\langle B_1 \rangle \{P_1\} = F \quad (19)$$

여기서,

$$\langle B_1 \rangle = \left\langle \frac{B}{2}, B, B, \dots, B, B, \frac{B}{2} \right\rangle$$

$$F = p_n L$$

p_B = 링 장력에 의한 평균 압력과 링 홈 안쪽 공간에서의 압력의 합.

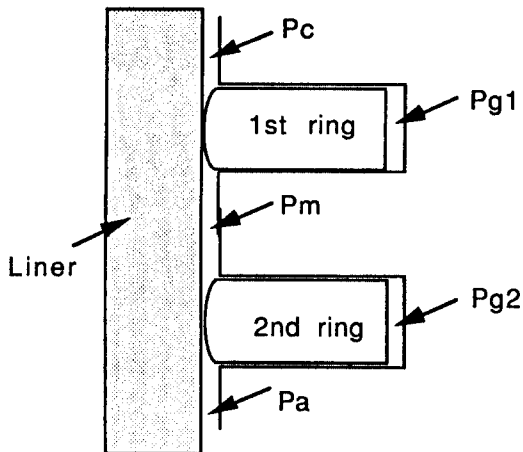


Fig. 2. Pressure distribution around piston rings.

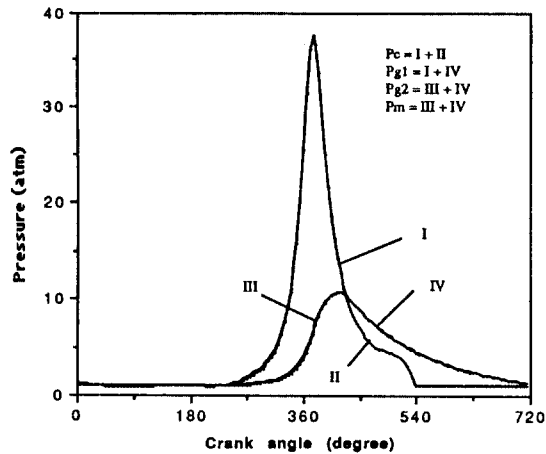


Fig. 3. Pressure change in the ring pack (engine rpm = 2000).

L=링의 마찰 방향 길이.

식 (17)과 (19)는 미지수인 압력과 입찰 속도의 수와 식의 수가 같으므로 풀 수 있다. 본 논문에서는 Gauss-Jordan 소거법 등을 사용하여 압력과 입찰 속도를 동시에 풀었다. 그 다음은 가정된 두 영역이 맞는지를 대조하는 반복적 연산 과정을 통해 두 영역을 분리해 낸다.

4. 계산 결과 및 고찰

Fig. 2는 피스톤의 제 1압축링과 제 2압축링 그리고 이들 주위에 작용하는 가스 압력들을 나타내고 있으며, 본 계산에 입력 데이터로 사용된 압력값들은 Fig. 3에 나타난 바와 같다. 그 밖에 피스톤 링 윤활 관련 주요

Table 1. Data used in the piston ring lubrication program

Piston ring axial length	1.5 mm
Piston ring face radius of curvature	0.1-5 m
Piston ring free gap	12 mm
Elasticity modulus of piston ring material	103 kPa
Piston diameter	73 mm
Engine crank radius	43 mm
Connecting rod length	155 mm
Wall temperature at TDC	200°C
Wall temperature at BDC	150°C

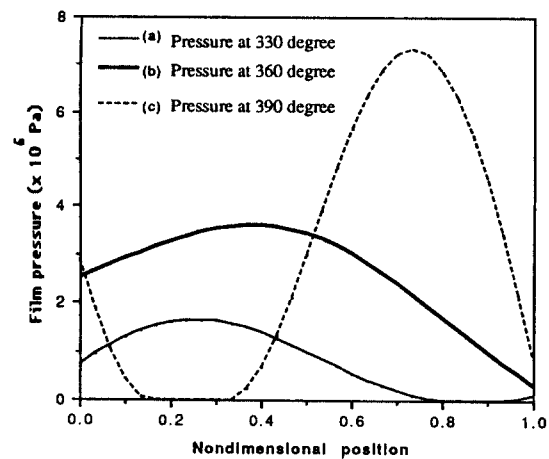


Fig. 4. Pressure distribution in the 1st piston ring lubrication film at the crank angle of (a) 300°C, (b) 360°C, and (c) 390°C (engine rpm = 2000, radius of curvature of ring face = 1 m).

제원은 Table 1과 같다.

Fig. 4의 (a), (b), (c)는 각각 크랭크 각도 330도, 360도, 390도에서의 유막내의 압력 분포를 나타낸다. 이들 중 (a)와 (c)에서는 유막 중간에 기공이 존재함을 알 수 있다. (b)는 상사점에서의 유막 내 압력 분포를 나타내며 마찰 속도가 없으므로 압착 현상만이 일어남을 알 수 있다.

Fig. 5는 크랭크 각도에 따른 피스톤 링 유막 두께의 변화를 나타낸다. 마찰 속도가 낮아 췌기 효과가 없는 상사점과 하사점 부근에서 유막 두께가 낮음을 볼 수 있고, 이들 중에서도 가스 압력과 윤활유 온도가 가장 높은 상사점 부근에서 유막 두께가 가장 낮음을 알 수 있다.

Fig. 6은 피스톤 링 윤활면의 곡률 반경 변화에 따른 상사점 부근에서의 최소 유막 두께의 변화를 나타낸다. 곡률 반경이 너무 크면 췌기 작용이 적어 최소 유막

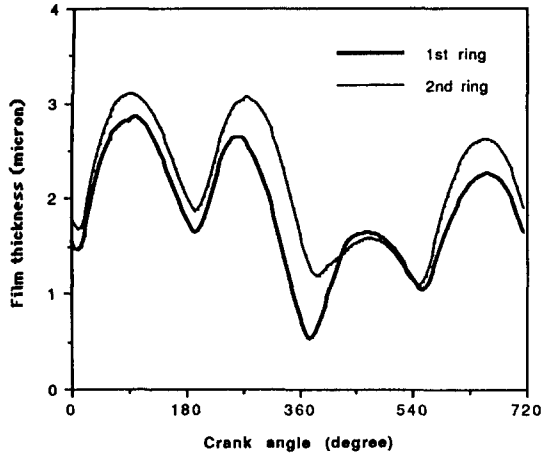


Fig. 5. change of piston ring film thickness around the cycle (engine rpm=2000, radius of curvature of ring face=1 m).

두께가 낮아지고, 곡률 반경이 너무 작으면 상하사점 부근에서의 압착 속도가 높아 급격히 유막 두께가 감소한다. 그러므로, 최소 유막 두께를 최대로 하는 최적의 곡률 반경을 찾아 낼 수 있다.

5. 결 론

피스톤 링의 윤활에서 유막과 기공의 영역 위치가 미지수일 뿐만 아니라 동하중을 받으므로, 단순한 수식으로 해를 구하기 불가능하다. 본 논문에서는 이를 극복하기 위하여, 유한 요소법을 적용하였다. 또한, 본 해석에서는 두 가지의 수치적 기법이 사용되었다. 이 기법들의 장점은 전통적인 Gauss-Seidel과 Newton법을 대체함으로써 계산 효율이 향상되는 것이다.

(1) 유한 요소법을 사용함으로써 미지수인 기공 영역 위치를 쉽게 찾을 수 있었다.

(2) Gauss-Seidel 수렴법을 Chandrasekharan법으로 대체함으로써 유막과 기공의 영역 위치를 더 효과적으로 찾을 수 있었다.

(3) 유한 요소에 의한 시스템 방정식과 평형 방정식으로부터 압력과 압착 속도를 동시에 풀므로써, 수렴성의 문제가 있는 Newton 반복 수렴법을 배제하였고, 계산 시간이 단축되었다.

(4) 유한 요소법을 피스톤 링 윤활에 적용함으로써, 계산 시간을 단축하고 정확한 해를 얻을 수 있었으며, 피스톤 링 윤활면의 곡률 반경 등 피스톤 링의 윤활 최적 설계에 사용될 수 있음을 보였다.

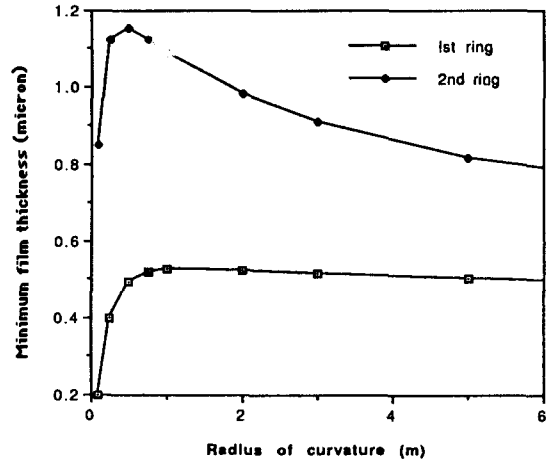


Fig. 6. Change of piston ring minimum film thicknesses with variation of radius of curvature of ring face (engine rpm=2000).

기호 설명

- p : 압력
- h : 유막 두께
- η : 윤활유 점도
- x : 마찰 방향 좌표
- \bar{U} : 마찰 속도 벡터(U_x, U_y)
- U_1, U_2 : 양 마찰면의 마찰 방향 속도
- t : 시간
- I : 범함수(functional)
- e : 유한 요소
- K_{ij} : 유동률(fluidity) 매트릭스
- q, Q_i : 질량 흐름
- N_i : 형상 함수(shape function)
- F : 하중
- B_i : 유한 요소의 x방향의 길이
- b_i : 형상 함수의 기울기
- n : 시스템 노우드의 수

후 기

본 연구는 과학기술처에서 시행한 특정연구사업 연구 결과의 일부로서 이의 지원에 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. 권오관 외, 엔진 마모 및 윤활 최적화를 통한 엔진

- 요소 효율 향상 기술 개발, 한국과학기술원 연구 보고서, N309-3035-2, 1988.
2. O. Pinkus and D.F. Wilcock, "Reduction of Tribological Energy Losses in Automotive Vehicles," Proceeding of the JSLE International Tribology Conference, July 8-10, 1985, pp.289-295.
 3. R.C. Rosenberg, "General Friction Considerations for Engine Design," SAE Paper No. 821576, Feb. 1982.
 4. J.T. Kovach, et al., "Engine Friction Reduction for Improved Fuel Economy," SAE Paper 820085, Feb. 1982.
 5. M. Hoshi and Y. Baba, "A Study of Piston Friction Force in an Internal Combustion Engine," ASLE Transactions, Vol.30, 4, 1986, pp.444-451.
 6. J.F. Booker and K.H. Huebner, "Application of Finite Element Methods to Lubrication: An Engineering Approach," Journal of Lubrication Technology, Transactions of ASME, Series F, Vol. 94, No.4, Oct. 1972, pp.313-323.
 7. K.H. Huebner and E.A. Thornton, The Finite Element Method for Engineers, 2nd Ed., John Wiley & Sons, 1982.
 8. P.K. Goenka, "Dynamically Loaded Journal Bearing: Finite Element Method Analysis," Journal of Tribology, Transactions of ASME, Series F, Vol. 106, Oct. 1984, pp.429-439.
 9. R. Chandrasekaran, "A Special Case of the Complementary Pivot Problem," Opsearch, Vol.7, 1970, pp.263-268.
 10. P.K. Goenka and J.F. Booker, "Spherical Bearings: Finite Element Method of Analysis," Journal of Lubrication Technology, Transactions of ASME, Series F, Vol.102, July 1980, pp.308-319.