

## 그루브를 한 유압 피스톤펌프의 피스톤에 작용하는 측력의 해석

박태조\* · 이정오\*\*

\*경상대학교 기계공학과, \*\*한국과학기술원 정밀공학과

### Analysis of Hydrodynamic Lateral Forces Acting on Grooved Pistons in Hydraulic Piston Pumps

Tae-Jo Park\* and Chung-Oh Lee\*\*

\*Dept. of Mech. Eng., Gyeongsang National Univ.

\*\*Dept. of Precision Eng. and Mechatronics, KAIST

**Abstract**—Hydrodynamic lateral forces acting on circumferentially grooved and tapered pistons in hydraulic piston pumps are analyzed for the case where the axis of piston and cylinder are tilted with each other. The effects of grooves and tilting on lateral force and leakage flowrate are discussed from the analytical solution of one-dimensional Reynolds equation. The analytical solution is in accordance with the numerical solution of two-dimensional Reynolds equation as the number of grooves increases.

#### 1. 서 론

고압의 유압장치에서 유압원으로 주로 사용되는 피스톤 펌프에서는 실린더와 고속으로 직선운동을 하는 피스톤 사이의 좁은 간극(clearance)을 흐르는 유압유(hydraulic oil)의 박막유동(thin film flow)에 의해서 피스톤의 원주방향으로 비대칭의 압력분포가 형성되며, 그 결과 피스톤을 실린더의 내벽(inner surface)쪽으로 미는 유체역학적인 측력(hydrodynamic lateral force)이 발생한다. 이러한 측력은 피스톤과 실린더 사이의 마찰을 증대시켜 피스톤이나 실린더의 내벽에 과도한 마모를 일으키게 하거나 피스톤과 실린더가 직접 접촉하게 되어 펌프를 사용불가능 상태에 이르게 하는 록킹현상(locking phenomenon)을 유발시키기도 한다. 또한, 피스톤과 실린더의 마모로 인한 작동유체의 누설유량(leakage flowrate)의 증가는 결과적으로 펌프의 용적효율(volumetric efficiency)을 크게 저하시키게 된다. 그러므로, 피스톤과 실린더 사이의 박막유동에 관한 연구는 펌프의 수명과 효율 향상을 위해서 연구의 필요성이 제기되고 있다[1, 2]. 한편, 유압밸브에서는 록킹현상을 방지하기 위한 수단으로서 밸브 스푸울(valve spool) 둘레에 여러 개의

그루브(groove)를 두는 방법이 알려져 있으며[3-5], 이에 관한 해석적인 연구가 발표된 바 있다[6]. 피스톤 펌프에서는 제작회사에 따라서 경험적인 결과로부터 그루브를 둔 피스톤을 사용하고 있다. 그러나, 그루브의 효과와 이것의 영향에 대한 이론적인 결과는 아직 제시되지 않고 있다.

본 연구에서는 원주방향으로 그루브가 있는 테이퍼가 진(tapered piston) 피스톤이 편심되고 틸팅(tilting)된 상태로 실린더내에서 운동하는 경우 그루브의 위치와 수, 편심율, 틸팅에 따른 측력과 누설유량을 해석적으로 구하고 이를 수치해석결과와 비교하고자 한다. 이 결과, 그루브가 있는 피스톤 펌프를 간단하게 해석할 수 있는 방법을 제공하여 펌프의 설계 및 수명과 성능향상에 기여함을 목적으로 한다.

#### 2. 기본방정식

Fig. 1은 이론모델을 나타낸 것으로서 테이퍼가 진 피스톤이 일정속도  $U$ 로 저압측(압력,  $p_0$ )으로부터 고압측(압력,  $p_1$ )으로 실린더내를 직선운동하는 경우를 생각한다. 이때 피스톤의 축은 실린더의 축과 평행하게  $e$ 만큼 편심되어 있는 상태에서 이 축들을 포함

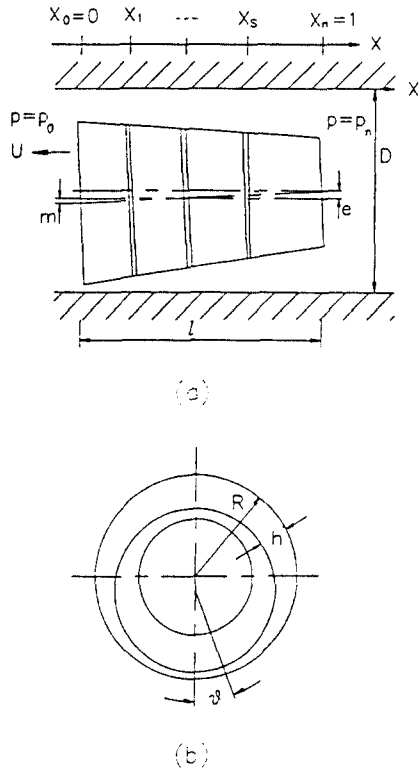


Fig. 1. Geometry of tapered piston

하는 평면내에서 피스톤의 양단이 피스톤의 길이방향 중앙에 대하여 m만큼 서로 틸팅되어 있다. 유체의 점성계수는 일정하다고 가정하면 정상상태의 비압축성 박막유동에 관한 유체의 운동방정식은 다음식과 같은 레이놀즈 방정식으로 주어진다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = 6 \mu U \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1)$$

이때, 경계조건은 다음과 같다.

$$x=0, p=p_0; \quad x=l, p=p_n \quad (2)$$

한편, 피스톤과 실린더 사이의 간극인 유막두께 h는 다음식과 같이 표현된다.

$$h = h_0 + (h_n - h_0) \frac{x}{l} = c_0 - (e - m) \cos \theta + \frac{x}{l} (c_n - c_0 + 2m \cos \theta) \quad (3)$$

여기서,  $c_0$ 와  $c_n$ 은 각각 피스톤과 실린더가 동심상태일 때  $x=0, x=l$ 에서의 간극이며, m은  $x=0$  위치에서의

피스톤이 틸팅된 양으로서 Fig. 1과 같이 피스톤의 선단이 피스톤의 편심방향과 같은 방향으로 기울어진 경우를 +m, 반대방향으로 기울어진 경우를 -m으로 정의한다. 본 연구에서는 피스톤의 전길이에 걸친 테이퍼량( $c_n - c_0$ )이 틸팅량의 차이(2m)보다 큰 형태로 유막이 형성되는 경우에 대해서만 해석하고자 한다. 해석을 간단히 하기 위하여 다음과 같은 무차원변수를 도입한다.

$$X = x/l, \quad H = h/c_0, \quad P = p/p_0, \quad k_n = c_n/c_0, \quad \varepsilon = e/c_0, \quad M = m/c_0, \quad \lambda = 6 \mu U l / p_0 c_0^2 \quad (4)$$

여기서  $p_0 = p_0 - p_n$ 이다.

식 (1), (2) 및 (3)을 무차원화 하면 각각 다음의 식 (5)-(7)과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( H^3 \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \left( \frac{l}{R} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left( H^3 \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) = \lambda \frac{\partial H}{\partial X} \quad (5)$$

$$X=0, P=P_0; \quad X=1, P=P_n \quad (6)$$

$$H = 1 - (\varepsilon + M) \cos \theta + (k_n - 1 + 2M \cos \theta) X \quad (7)$$

원주방향으로의 비대칭적인 압력분포에 의해서 피스톤에 작용하는 반경방향의 힘인 축력 w와 피스톤과 실린더 사이를 흐르는 누설유량 q에 대한 무차원화된 표현식은 각각 다음과 같다.

$$W = \int_0^1 \int_0^{2\pi} P \cos \theta \, d\theta \, dX \quad (8)$$

$$Q = \frac{2}{\pi} \left[ (P_0 - P_n) \int_0^{2\pi} \frac{H_0^2 H_n^2}{H_0 + H_n} \, d\theta + \lambda \int_0^{2\pi} \frac{H_0 H_n}{H_0 + H_n} \, d\theta \right] \quad (9)$$

여기서  $H_0$  및  $H_n$ 은 각각  $X=0$  및  $X=1$ 에서의 무차원 유막두께이다.

주어진 조건에 대하여 식 (5)의 해석적인 결과는 구할 수가 없다. 만일,  $(l/R)^2$ 이 1보다 충분히 작은 경우에 대해서 압력을  $P = P' + (l/R)^2 P'$ , 축력을  $W = W' + (l/R)^2 W'$ 로 나타내고(여기서, 상첨자 '는 zeroth-order, '는 first-order의 크기) 이를 식 (5) 및 식 (8)에 대입하여 계산하면,  $(l/R)^2 \varepsilon$ 이 1보다 충분히 작은 경우에는 레이놀즈 방정식의 좌변의 둘째항은 첫째항에 비해 무시될 수 있다. 따라서  $(l/R)^2 \varepsilon \ll 1$ 인 경우에 식 (5)는 다음식과 같이 1차원 레이놀즈 방정식으로 간단히 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( H^3 \frac{\partial P}{\partial X} \right) = \lambda \frac{\partial H}{\partial X} \quad (10)$$

본 연구에서는 주어진 조건을 식 (10)에 적용하여 박막유동의 해를 해석적으로 구하고 식 (5)의 2차원 레이놀즈 방정식을 수치해석하여 해석해의 타당성을 검토하고자 한다.

### 3. 이론 및 수치해석 방법

피스톤의 원주방향으로  $s$ 개의 그루브가 Fig. 1에 나타낸 것과 같이 축방향으로  $X=X_1, X_2, \dots, X_s$ 에 각각 위치해 있다. 이때, 그루브의 폭과 깊이는 유막 두께  $h$ 에 비해서 충분히 크다고 하면 각 그루브내의 압력은 원주방향으로 일정하다고 가정할 수 있다. 만일,  $s$ 개의 그루브가 있는 경우에는 이를  $(s+1)$ 개의 길이가 짧은 피스톤(sub-piston)이 서로 연속되어 있는 것으로 생각할 수 있다. 이와 같은 경우, 실린더와 피스톤 사이를 흐르는 누설유량은 일정하므로 각 sub-piston에 대해서는 다음식으로 나타내어지는 유량의 연속조건을 만족해야 한다.

$$\begin{aligned} Q &= \frac{P_0 - P_1}{X_1} S_{01} + \lambda T_{01} & 0 \leq X \leq X_1 \\ &= \frac{P_1 - P_2}{X_2 - X_1} S_{12} + \lambda T_{12} & X_1 \leq X \leq X_2 \\ &\vdots \\ &= \frac{P_s - P_n}{1 - X_s} S_{sn} + \lambda T_{sn} & X_s \leq X \leq 1 \end{aligned} \quad (11)$$

여기서,

$$S_{ab} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{H_a^2 H_b^2}{H_a + H_b} d\theta \quad (12)$$

$$T_{ab} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{H_a H_b}{H_a + H_b} d\theta \quad (13)$$

이며,  $a=0, 1, 2, \dots, s$ 이고  $b=1, 2, \dots, n$ 이다. 따라서, 식 (11)에서 각 그루브에서의 압력  $P_1, P_2, \dots, P_s$ 를 구할 수 있다.

한편, 피스톤과 실린더 사이의 유막에서 발생하는 유체압력은 각 sub-piston에 대하여 그루브에서의 압력을 경계조건으로 하여 식 (10)으로부터 구하면 다음식과 같다.

$$\begin{aligned} P &= P_0 - (P_0 - P_1) \frac{H_1^2}{H_1^2 - H_0^2} \left( 1 - \frac{H_0^2}{H^2} \right) \\ &+ \frac{\lambda}{H_n - H_0} \left[ -\frac{1}{H} + \frac{H_0 H_1}{H^2 (H_0 + H_1)} + \frac{1}{H_0 + H_1} \right], \\ &0 \leq X \leq X_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ &= P_s - (P_s - P_n) \frac{H_n^2}{H_n^2 - H_s^2} \left( 1 - \frac{H_s^2}{H^2} \right) \\ &+ \frac{\lambda}{H_n - H_0} \left[ -\frac{1}{H} + \frac{H_s H_n}{H^2 (H_s + H_n)} + \frac{1}{H_s + H_n} \right], \\ &X_s \leq X \leq 1 \end{aligned} \quad (14)$$

따라서, 식 (14)를 식 (8)에 대입하여 적분하면  $s$ 개의 그루브를 가지고 틸팅되어 있는 피스톤에 작용하는 축력은 다음식과 같은 무차원식으로 나타내어진다.

$$\begin{aligned} \frac{W^{(s)}}{L} &= 4[\varepsilon(k_n - 1) + M(k_n + 1)] \\ &\left[ \sum_{i=1}^{s-1} \frac{(X_i - X_{i-1})^2 (P_{i-1} - P_i)}{(2\varepsilon + M_{i-1} + M_i)^2} (1 - A) \right] \\ &+ 4\lambda \left[ \frac{1}{\varepsilon(k_n - 1) + M(k_n + 1)} \right. \\ &\left. \left\{ (k_n - 1) \frac{\sqrt{1 - (\varepsilon + M)^2} - \sqrt{k_n^2 - (\varepsilon - M)^2}}{(k_n - 1)^2 - 4M^2} \right. \right. \\ &\left. \left. + \sum_{i=1}^{s-1} (X_i - X_{i-1}) A \right\} + \frac{2M}{\{(k_n - 1)^2 - 4M^2\}^{3/2}} B \right] \end{aligned} \quad (15)$$

여기서,  $M_i = M(1 - 2X_i)$ ,  $k_i = 1 + (k_n - 1)X_i$ ,  $L = l/D$ 이며,  $A, B$ 는 각각 다음식으로 표현된다.

$$A = \frac{k_{i-1} + k_i}{\sqrt{(k_{i-1} + k_i)^2 - (2\varepsilon + M_{i-1} + M_i)^2}} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} B &= \\ \ln &\left[ \frac{k_n(k_n - 1) + 2M(\varepsilon - M) + \sqrt{\{(k_n - 1)^2 - 4M^2\} \{k_n^2 - (\varepsilon - M)^2\}}}{k_n - 1 + 2M(\varepsilon + M) + \sqrt{\{(k_n - 1)^2 - 4M^2\} \{1 - (\varepsilon + M)^2\}}} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

한편, 식 (5)의 2차원 레이놀즈 방정식에 대한 수치해석은 유한차분법을 이용하여 구한다. Fig. 2와 같은 균일한 격자계를 사용하는 경우, 식 (5)의 절점( $i, j$ )에 대한 유한차분 형태는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &H_{i-1/2,j}^3 (P_{i-1,j} - P_{i,j}) - H_{i+1/2,j}^3 (P_{i,j} - P_{i+1,j}) \\ &+ \left[ \frac{l}{R} \right]^2 \left[ \frac{\Delta X}{\Delta \theta} \right]^2 \left[ H_{i,j-1/2}^3 (P_{i,j-1} - P_{i,j}) - H_{i,j+1/2}^3 (P_{i,j} - P_{i,j+1}) \right] \\ &= \lambda \Delta X (H_{i-1/2,j} - H_{i+1/2,j}) \end{aligned} \quad (18)$$

윗식은 SOR 방법과 같은 계산방법을 사용하여 쉽게 계산할 수 있다. 각 절점에서의 압력에 대한 수렴해가 구해지면 이를 원주방향과 길이방향에 대하여 수치적분하여 피스톤에 작용하는 축력의 크기를 계산한다.

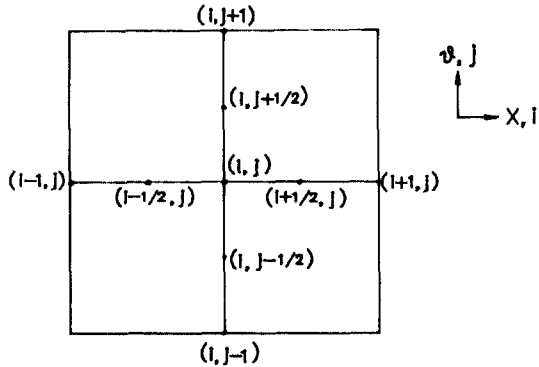


Fig. 2. Grid for numerical analysis

#### 4. 결과 및 고찰

본 논문에서는 그루브의 위치와 수, 편심율, 틸팅에 따른 측력과 누설유량의 변화를 조사하기 위하여 피스톤의 테이퍼비는  $k_n=5.2$ , 속도변수는  $\lambda=1$ 로서 일정하게 두었으며, 그루브를 한 경우의 측력은 주어진 그루브수에서 측력의 크기가 최소로 되는 그루브의 위치에서 구한 결과이다. Fig. 3과 Fig. 4는 1개의 그루브를 가진 피스톤에서 틸팅과 그루브의 위치에 따라서 피스톤에 작용하는 측력과 누설유량의 변화를 각각 나타낸 것이다. Fig. 3은 측력의 변화를 틸팅되지 않고 편심만 된 그루브가 없는 피스톤에 작용하는 측력  $W_0$ 와의 비로서 나타낸 것이다. 그루브의 위치에 따라 측력의 크기가 크게 달라지며, 각 운전조건에 따라서 이것이 최소로 되는 그루브의 위치가 존재함을 보이고 있다. 특히, 피스톤 선단의 틸팅된 방향이 편심된 방향과 일치할 경우(+M)가 반대방향일 경우(-M)에 비하여 측력의 크기가 훨씬 크게 나타나며, 틸팅의 방향에 따라서 최소측력이 발생하는 그루브 위치도 변화한다. Fig. 4는 그루브의 위치에 따른 누설유량의 변화를 동심상태에서 틸팅되지 않고 그루브를 하지 않은 피스톤인 경우의 누설유량  $Q_0$ 와의 비로서 나타낸 것이다. 누설유량도 측력의 경우와 마찬가지로 그루브의 위치와 틸팅의 방향에 따라서 그 양이 달라진다. 특히, 그루브를 뒀으로써 측력의 크기는 감소시킬 수가 있지만 이와는 반대로 누설유량은 증대되며, 측력이 최소로 되는 그루브 위치부근에서 누설유량은 최대로 되는 점이 특징적이다. Fig. 5는 그루브의 수에 따른 측력의 변화를  $W_0$ 와의 비로서 나타낸 것이다. 피스톤의 틸팅방향에 관계없이 그루브의 수가 많아질수록 측력은 급격히 작아지므로 결과적으로 틸팅의 방향에 의한

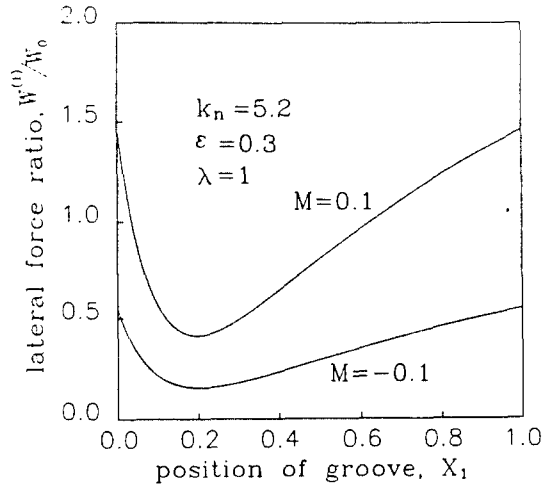


Fig. 3. Variation of lateral force ratio with groove position for 1-grooved piston

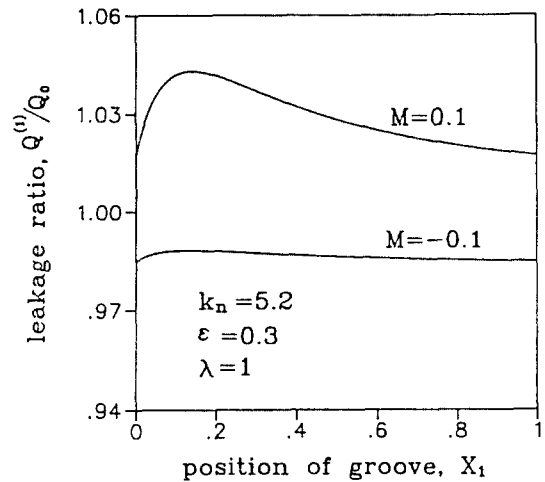


Fig. 4. Variation of leakage ratio with groove position for 1-grooved piston

영향은 작아짐을 알 수 있다. Fig. 6은 틸팅의 변화에 따른 측력의 변화를 나타낸 것이다. 측력은 편심율과 그루브 수의 변화에 거의 직선적으로 변화하며, Fig. 5의 결과와 같이 그루브를 함으로서 틸팅의 영향을 크게 줄일 수가 있음을 보이고 있다. Fig. 7은 편심율의 변화에 대해서 틸팅이 다른 경우에 대한 누설유량을  $Q_0$ 와의 비로서 나타낸 것이다. 피스톤 선단에서의 틸팅이 피스톤의 편심방향과 같은 방향(+M)일 경우가 반대방향일 경우에 비하여 누설유량이 증대되며 일반적으로 그루브의 수가 증가할수록 누설유량은 증가하

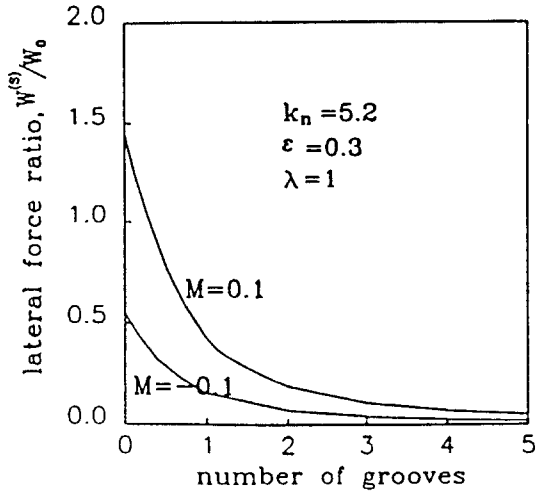


Fig. 5. Variation of lateral force ratio with number of grooves

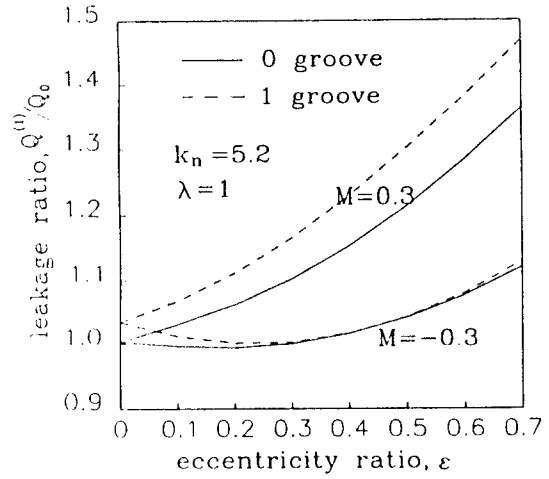


Fig. 7. Effect of eccentricity ratio and tilting on leakage ratio

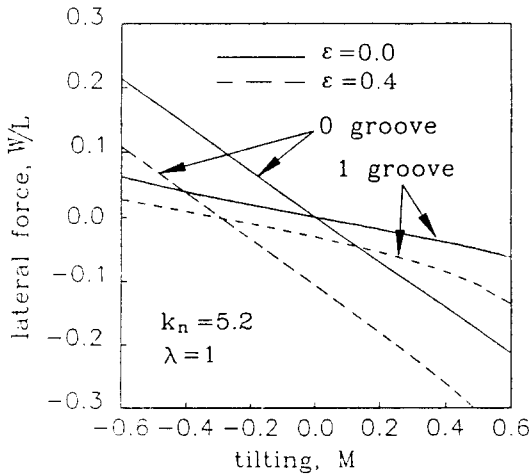


Fig. 6. Effect of tilting on lateral force

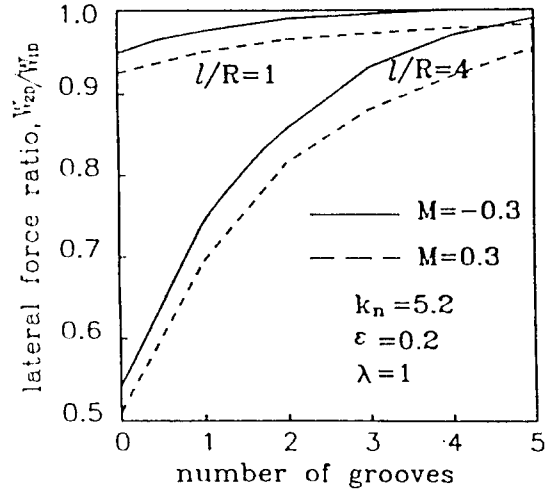


Fig. 8. The ratio of lateral force obtained from 1-D Reynolds equation to that from 2-D numerical solution vs. tilting and number of grooves for finite values of  $l/R$  ratio

는 경향을 나타낸다. Fig. 8은 여러개의 그루브를 가진 피스톤 펌프에 대한 이론해석결과의 타당성을 조사하기 위한 그림으로서 그루브의 수에 따라서 1차원 해석결과의 축력( $W_{1D}$ )에 대한 2차원 수치해석결과의 축력( $W_{2D}$ )과의 비를 나타낸 것이다. 이때, 1차원해석과 2차원해석에서의 그루브의 위치는 서로 동일하다. 피스톤의 반경에 대한 길이의 비  $l/R$ 이 1보다 작은 경우에는 1차원 해석결과와 2차원 해석결과가 그루브의 수가 작은 경우에도 거의 일치하며,  $l/R$ 이 1보다 큰 경우에도 그루브의 수가 많아질수록 두 결과가 급격하게 일치하려는 경향을 보인다. 또한, 선단에서의 틸

팅이 편심방향과 반대로 작용하는 경우에 보다 잘 일치한다. 이와 같은 결과는 앞서서의 해석적인 이론해석이 타당함을 의미한다. 즉, 그루브의 수가 많아지면 결과적으로 피스톤의 길이가 짧아지는 것과 동일한 효과이며 편심된 방향과 반대로 틸팅되는 것은 편심율이 작아지는 것과 같은 효과를 나타내기 때문이다. 따라서, 본 논문에서 제시한 해석적인 결과는 시간이 많이 소요되는 수치해석방법과 비교하여 그루브를 한 피스톤 펌프의 설계 및 성능향상에 유용한 수단을

제공할 것으로 생각된다.

### 5. 결 론

본 연구에서는 원주방향으로 그루브가 있는 테이퍼가 진 피스톤이 편심되고 틸팅된 상태로 실린더내에서 운동하는 경우, 피스톤에 작용하는 축력과 누설유량을 해석적으로 구하고 이를 수치해석 결과와 비교하였다. 그 결과, 그루브의 수가 많아질수록 1차원 레이놀즈 방정식에 대한 이론해석으로도 충분히 타당한 결과를 구할 수 있다는 것이 입증되었다. 그루브는 피스톤에 작용하는 축력의 크기는 크게 줄이는 바람직한 효과를 보이지만 반대로 누설유량은 증대시킨다. 또한, 축력의 크기가 최소로 되거나 누설유량이 최대로 되는 그루브의 위치가 각 그루브의 수에 대하여 존재한다. 한편, 피스톤의 틸팅은 축력의 크기에 큰 영향을 미치지만 그루브의 수가 많아지면 이것에 의한 영향은 급격히 감소한다. 결과적으로 본 연구에서 제시한 해석적인 결과는 그루브를 한 피스톤 펌프 및 이와 유사한 유압기계요소의 설계 및 성능향상에 유용하게 이용될 수 있을 것으로 생각된다.

### 후 기

본 연구는 한국과학재단의 국제공동연구비 지원에 의해 수행중인 연구의 일부 결과이며 이에 감사한다.

### 기호설명

- $C_n$  : 동심상태에서의 실린더와 피스톤 사이의 최대 간극
- $C_o$  : 동심상태에서의 실린더와 피스톤 사이의 최소 간극
- $D$  : 실린더의 직경,  $2R$
- $e$  : 편심량
- $h$  : 유막두께
- $H$  : 무차원 유막두께,  $h/c_o$
- $k_n$  : 피스톤의 테이퍼 비,  $c_n/c_o$
- $l$  : 피스톤의 길이
- $m$  : 피스톤의 길이방향 중앙에 대한 양단에서의 틸팅량(Fig. 1 참조)
- $M$  : 무차원화된 틸팅량,  $m/c_o$
- $p$  : 압력
- $P$  : 무차원 압력,  $p/p_d$

- $p_d$  : 기준압력,  $p_o - p_n$
- $q$  : 누설유량
- $Q$  : 무차원 누설유량,  $12 q\mu/\pi DC_o^3 Pd$
- $Q_o$  : 그루브를 하지 않은 피스톤의  $\varepsilon=0, M=0$  상태에서의 무차원 누설유량
- $U$  : 피스톤의 속도
- $x$  : 피스톤의 길이방향 좌표계
- $X$  : 무차원 좌표계,  $x/l$
- $w$  : 축력
- $W$  : 무차원 축력,  $4w/\pi D^2 p_d$
- $W_o$  :  $M=0$ 이고 그루브를 하지 않은 피스톤에 작용하는 축력
- $\varepsilon$  : 편심율,  $e/c_o$
- $\theta$  : 원주방향 좌표계
- $\lambda$  : 무차원 속도변수,  $6\mu U/l p_d c_o^2$
- $\mu$  : 점도
- 상첨자 : (s) ; 그루브의 수가 s개인 경우
- 하첨자 : o ; 고압측( $x=0$ ), n ; 저압측( $x=l$ )  
1, 2, ..., a, b, ... ; 피스톤 길이방향으로의 무차원 그루브 위치

### 참 고 문 헌

1. Backé, W. and Rinck, S., "Analyse der Schadensmechanismen an einer Radial Kolbenpumpe und Berechnung der durch Konstruktive Verbesserungen erzielbaren Kolbenkräfte-verringerung", Research Report, Inst. für Hydraulische und Pneumatische Antriebe und Steuerungen der RWTH Aachen, 1990.
2. Ivantysynová, M., "Theoretische und Experimentelle Untersuchungen zu einem neuen Kolbentyp bei Axko-Maschinen", Fachtagung Hydraulik und Pneumatik, Magdeburg, 1985.
3. Manhajm, J. and Sweeney, D.C., "An Investigation of Hydraulic Lock", *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, Vol. 169, pp. 865-879, 1955.
4. Meritt, H.E., "Hydraulic Control Systems", John Wiley Sons Inc., 1967.
5. Backé, W., "Grundlagen der Ölhydraulik", IHP, RWTH Aachen, 1988.
6. Lee, C.O. und Park, T.J., "Querkräfte an hydraulischen Ventilen mit mehreren Umfangsnuten", *Ölhydraulik und Pneumatik*, Vol. 34, pp. 269-274, 1990.
7. Etsion, L. and Pinkus, O., "The Hydrodynamics of a Plug Bearing", *ASME, J. of Lub. Tech.*, Vol. 98, pp. 433-440, 1976.
8. Meikandan, N., Raman, R., Singaperumal, M. and Seetharamu, K.N., "Theoretical Analysis of Tapered Pistons in High Speed Hydraulic Actuators", *WEAR*, Vol. 137, pp. 299-321, 1990.