

적응 입출력선형화 제어기의 안정성 해석에 관한 연구

이 만 형*, 백 운 보**

Stability Analysis of the Adaptive Input-Output Linearizing Controller

Man-Hyung Lee*, Woon-Bo Baek**

ABSTRACT

In this study, the technique of adaptive control based on certainty equivalence for the input-output linearization of nonlinear system is investigated. It is shown that the upper bound of the parameter estimation error can be represented more explicitly than Teel et al's works. Another direct approach, which shows that the adaptive input-output linearizing control laws using the normalized identifier yield bounded tracing, is also presented.

1. 서 론

고속운전이나 빈번한 부하하중의 변동 그리고 광범위한 속도범위 및 보다 넓은 작업영역에서는 비선형성의 영향, 매개변수 변동 및 모델링오차 등의 불확실성이 강하게 나타나게 되어 시스템의 성능에 미치는 영향이 커지게 된다. 이러한 조건에서 고정도 제어의 실현에 대한 필요가 증대됨에 따라 비선형 제어시스템 설계의 요구가 대두되었다.

그리고 선형제어 이론을 사용하여 비선형성이 강한 시스템 제어설계 문제에 적용하기 위해서는 여러가지 환경에 대해 선형화 모델을 만들어야 하는 어려움이 따르게 된다. 비선형제어에서는 이러한 여러 개의 선형화 모형을 사용하지 않고 제어기를 설계하는데 관심을 갖고 있다. 이러한 비선형 시스템의 제어를 위한 많은 방식 중에 활발하게 연구되고 있는 접근방법으로서의 입출력 선형화(input-output linearization) 기법은 비선형궤환

과 비선형 상태변환을 통하여 주어진 비선형시스템을 선형시스템과 같은 입출력 관계를 갖도록 하는 기법이다. 최근 여러 분야에서 입출력선형화 방식의 적용 사례를 찾아 볼 수 있다⁽¹⁻⁶⁾.

제어시스템을 설계하기 위해서는 우선 제어하고자 하는 시스템에 대한 수학적 모델링이 선행되어야 한다. 그러나 실제 시스템의 상황에서는 측정 불가능하거나 모호화 되지 않은 운동, 잡음 및 외란 등으로 인해 완전한 모델링을 얻는 것은 거의 불가능하므로 어떠한 형태로든지 불확실성이 존재하게 된다. 복잡한 비선형성 및 불확실성을 가지는 실제시스템을 정확하게 수학적으로 모델링하는 것은 극히 어려우므로 이러한 불확실성을 보상할 수 있는 비선형제어기를 설계하는 것이 필수적이라 할 수 있다⁽⁷⁾. 이러한 불확실한 시스템의 제어방식으로, 추계학적 제어이론에서 잡음을 통계처리하여 시스템을 해석하는 확률적인 접근방법 이외에, 시스템내에 존재하는 불확실한 매개변수, 시스템내로 들어오는 외

* 부산대학교 제어기계공학과 (정회원)

** 부산대학교 기계기술연구소 전임연구원 (정회원)

란, 그리고 측정시 불확실한 변수인 측정치 오차의 유계(boundedness)를 고려하여 시스템을 해석하는 확실적인 방법이 있으며, 이와 같은 접근방식으로 Lyapunov식 접근방법, 가변구조제어방법 등이 사용되고 있다.

근래에 매개변수 불확실성을 갖는 비선형시스템에 대해서는 입출력 선형화를 응용한 적응제어방법⁽⁸⁻¹³⁾이 제시되었으며, Teel 등⁽¹³⁾은 상태추정오차를 이용하여 불확실한 함수의 매개변수를 추정하고, 이 매개변수 추정기의 수렴성과 제약적인 가정하에 구성된 제어기의 안정성을 보였다.

본 연구에서는 불확실한 시스템에 대해 적응입출력 선형화 제어기의 안정성을 논한다. 먼저 매개변수 불확실성이 존재하지 않는 경우에 관측불가능한 상태변수와 기준제적 및 그 도함수들의 유계와의 안정성을 해석하고, 불확실이 존재하는 경우에 기존의 간접적인 접근방법⁽¹³⁾에서 매개변수 추정오차의 명시적인 상한값을 보였다. 그리고 직접적인 접근방법으로서 신호 성장속도(growth rate)⁽¹⁴⁾의 개념을 응용하여 적응 입출력 선형화 제어기의 안정성을 보였다.

2. 적응 입출력 선형화 제어기

상태변수 $x(t) \in R^n$, 제어입력 $u(t) \in R^m$, 측정된 상태변수 $y(t)$ 로 구성된 비선형 시스템은 다음과 같다. 연속 미분가능한 $f(x), g(x), h(x)$ 는 다음 식(2)-(4)와 같고 매개변수 $\theta^* \in R^p$ 이다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서

$$f(x) = \sum_{i=1}^p \theta_{1i}^* f_i(x) \quad (2)$$

$$g(x) = \sum_{j=1}^p \theta_{2j}^* g_j(x) \quad (3)$$

$$h(x) = \sum_{j=1}^p \theta_{3j}^* h_j(x) \quad (4)$$

위 식에서 $f(x), g(x), h(x)$ 의 추정자는 다음과 같다.

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^p \hat{\theta}_{1i} f_i(x) \quad (5)$$

$$\hat{g}(x) = \sum_{j=1}^p \hat{\theta}_{2j} g_j(x) \quad (6)$$

$$\hat{h}(x) = \sum_{j=1}^p \hat{\theta}_{3j} h_j(x) \quad (7)$$

이때 $L_{g(x)\theta} L_{f(x)\theta}^{r-1} h(x, \theta) \neq 0$ 이면 적응 선형화를 위한 비선형 변환, $\Phi(\xi, \eta)$ 은 다음과 같다. 여기서 $L_f h, L_g h$ 는 각각 f 와 g 에 대한 h 의 Lie 미분을 표시한다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_r &= \theta_{jr}^* \cdots \theta_{jo}^* L_{f_{jr}} \cdots L_{f_{j1}} h_{jo}(x) \\ &\quad + \theta_{jr}^* \cdots \theta_{jo}^* L_{g_{jr}} L_{f_{j(r-1)}} \cdots L_{f_{j1}} h_{jo}(x) u \\ \dot{\eta} &= q_{0*}(\xi, \eta) \\ y &= \xi_1 \end{aligned} \quad (8)$$

여기서,

$$q_{i0*}(\xi, \eta) = L_{f(x, \theta^*)} \xi_i(x, \theta^*), r+1 \leq i \leq n \quad (9)$$

그리고 영점동학(zero dynamics)⁽¹¹⁾, $\eta = q_{0*}(0, \eta)$ 이 지수적으로(exponentially)안정하면, 제어칙은 다음과 같이 구성된다.

$$u = \frac{1}{(L_g L_f^{r-1} h)_e} [-(L_f h)_e + \hat{v}] \quad (10)$$

여기서,

$$(L_f h)_e = \sum_{i=1}^p \hat{\theta}_{1i}(t) L_{f_i} h \quad (11)$$

$$(L_g L_f^{r-1} h)_e = \sum_{j=1}^p \hat{\theta}_{2j}(t) L_{g_j} L_{f_j} h \quad (12)$$

$$\hat{v} = y_m^{r+k_1} (y_m^{r-1} - \hat{y}^{r-1}) + \cdots + k_r (y_m - \hat{y}) \quad (13)$$

식(13)에서 k_i 는 $s^r + k_1 s^{r-1} + \cdots + k_r$ 이 Hurwitz 다항식이 되도록 선정된다. 그리고 페루프시스템 및 적응칙은 다음과 같다⁽¹³⁾.

$$\dot{e} = \Omega e + W(x, u)^T \phi \quad (14)$$

$$\dot{\phi} = -W(x, u) P e \quad (15)$$

여기서,

$$e_i := \xi_i - y_m^{i-1}, \quad 1 \leq i \leq r, \\ \phi := \hat{\theta}_{j_r} \cdots \hat{\theta}_{j_0}^* - \theta_{j_r}^* \cdots \theta_{j_0}^* \quad (16)$$

$$\Omega^T P + P \Omega = -Q, \quad Q > 0 \\ W(x, u)^T = L_{f_{j_r}} \cdots L_{f_{j_1}} h_{j_0}(x) \\ + L_{g_{j_r}} L_{f_{j_1}} h_{j_0}(x) \quad (17) \\ \cdots L_{f_{j_1}} h_{j_0}(x) u$$

기준계 및 그 도함수 y_1, \dots, y_m^{r-1} 이 유계이고, 영점 동역학이 지수적으로 안정한 시스템에서 위의 식(17)에서 Ω 가 Hurwitz 행렬로 선정되고, $q(\xi, \eta)$ 이 ξ 와 η 에 대해 globally Lipschitz 일때, 매개변수 추정기의 수렴성과 $\|W(x, u)\| \leq 1, \|x\|$ 의 조건하에서, 제어식 (10)을 시스템 (1)에 적용한 결과를 표현되는 페루프 시스템 (14)는 $\phi(0)$ 의 제한된 범위에서 지수적으로 안정된 시스템이 된다.⁽¹³⁾

3. 안정성 해석 및 이론적 고찰

3.1 간접 적응제어방법

제2장에서와 같이 영점동역학이 지수적으로 안정한 시스템에 대해 구성된 적응 입출력 제어기의 안정성 해석에 대해 고찰해 보자. 먼저 기준계 및 그 도함수들의 유계를 b_d 라 하면 $\|\xi\| \leq \|e\| + b_d$ 이다. 그리고 x 는 (ξ, η) 와 미분동형(diffeomorphism)이므로 $\|x\| \leq 1, (\|\xi\| + \|\eta\|), 1, \mathbb{R}^*$ 이다.

그리고 $\|W(x, u)^T\| \leq 1, \|x\| \in \mathbb{R}^*, Au \in \mathbb{R}$ 을 가정하면 $A^T P + PA = -I$ 의 P 에 대해 $\|2P W(x, u)^T\| \leq 2L$, $\|g\|$ 가 된다⁽¹³⁾. 그리고 영점동역학이 지수적으로 안정하므로 역 리아프노프 정리(converse Lyapunov theorems)⁽¹⁷⁾를 이용하면 $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}^*$ 에 대해 다음의 리아프노프 함수 $V_2(\eta)$ 가 존재한다.

$$k_1 \|\eta\|^2 \leq V_2(\eta) \leq k_2 \|\eta\|^2 \\ \partial V_2 / \partial \eta q(0, \eta) \leq -k_3 \|\eta\|^2 \quad (18)$$

$$\|\partial V_2 / \partial \eta\| \leq k_4 \|\eta\|$$

$q(\xi, \eta)$ 가 globally Lipschitz 함수이므로

$$\|q(\xi, \eta) - q(0, \eta)\| \leq l_q \|\xi\| \leq l_q (\|e\| + b_d) \quad (19)$$

따라서

$$\partial V_2 / \partial \eta q(\xi, \eta) = \partial V_2 / \partial \eta q(0, \eta) \\ + \partial V_2 / \partial \eta (q(\xi, \eta) - q(0, \eta)) \\ \leq -k_3 \|\eta\|^2 + k_4 \|\eta\| l_q \\ (\|e\| + b_d) \quad (20)$$

여기서 리아프노프 함수를 다음 식(21)과 같이 두고, 불확실성이 없는 경우를 먼저 고려해 보자.

$$V(e, \eta) = e^T P e + \mu V_2(\eta), \quad \mu > 0 \quad (21)$$

$$\dot{V} = e^T (A^T P + P A) e + \mu \partial V_2 / \partial \eta q(\xi, \eta) \\ \leq -\|e\|^2 + \mu (-k_3 \|\eta\|^2 + k_4 l_q \|\eta\| (\|e\| + b_d)) \\ \leq -3/4 \|e\|^2 - 3/4 \mu k_3 \|\eta\|^2 - (1/2 \|e\| - \mu k_4 l_q \|\eta\|)^2 \\ + (\mu k_4 l_q)^2 \|\eta\|^2 - \mu k_3 (1/2 + \|\eta\| - k_4 l_q b_d / k_3)^2 \\ + \mu (k_4 l_q b_d)^2 / k_3 \quad (22)$$

여기서 $\mu = k_3 / (4k_4^2 l_q^2)$ 로 두면

$$\dot{V} \leq -3/4 \|e\|^2 - k_3^2 / 8 k_4^2 l_q^2 \|\eta\|^2 \\ + b_d^2 / 4 \quad (23)$$

따라서 큰 $\|\eta\|$ 는 $\|e\|$ 에 대해 $\dot{V} < 0$ 이다.

즉, $\|\eta\| \geq \delta, \delta = b_d (2/\sqrt{k_4}) / k_3$ 이면 $\dot{V} < 0$ 이다. 또한 식 (18)에 의해 η 가 유계됨을 쉽게 보일 수 있다. 따라서 영점동역학의 상태변수 η 즉, 관측불가능한 상태변수⁽¹⁾와 바람직한 기준계 및 그 도함수들의 유계 b_d 와의 관계를 보여준다.

이제 불확실성을 포함한 경우를 보자. 이 경우 식 (22)에서 $2e^T P W(x, u)^T \phi$ 이 추가로 포함된다.

$$\dot{V}(e, \eta) = e^T (A^T P + P A) e + 2e^T P W(x, u)^T \phi \\ + \mu \partial V_2 / \partial \eta q(\xi, \eta) \\ \leq -\|e\|^2 + 2l_z l_x \|e\| (\|e\| + b_d + \|\eta\|) \|\phi\| \\ + \mu (-k_3 \|\eta\|^2 + k_4 l_q \|\eta\| (\|e\| + b_d)) \\ \leq -(1/2 \|e\| - l_z l_x b_d \|\phi\|)^2 - (1/2 \|e\| \\ - (l_z l_x \|\phi\| + \mu k_4 l_q) \|\eta\|)^2 \\ - \mu k_3 (1/2 \|\eta\| - k_4 l_q b_d / k_3)^2 \\ + \mu (k_4 l_q b_d)^2 / k_3 + (l_z l_x b_d \|\phi\|)^2 \\ - (1/2 - l_z l_x \|\phi\|) \|e\|^2 + (l_z l_x \|\phi\| \\ + \mu k_4 l_q)^2 \|\eta\|^2 - 3/4 \mu k_3 \|\eta\|^2 \quad (24)$$

식(24)를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \eta) \leq & -(1/2 - 1z1x\|\phi\|)\|e\|^2 \\ & - (3/4\mu k_3 - (1z1x\|\phi\| + \mu k_4 1q)^2)\|\eta\|^2 \\ & + (1z1xb_d\|\phi\|)^2 + \mu(k_4 1q b_d)^2/k_3 \end{aligned} \quad (25)$$

여기서, 다음과 같이 μ_0 를 정의하자.

$$\mu_0 = k_3 / (4(1z1x + k_4 1q)^2) \quad (26)$$

$$\mu \leq \mu_0 \quad (27)$$

$$\|\phi\| \leq \min[\mu, 1/(41z1x)] \quad (28)$$

그러면 식(27), (28)의 영역에 대해서 식(25)는 다음과 같다⁽¹³⁾.

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \eta) \leq & -1/4\|e\|^2 - 1/2\mu k_3\|\eta\|^2 \\ & + \mu(k_4 1q b_d)^2/k_3 + (1z1xb_d\|\phi\|)^2 \end{aligned} \quad (29)$$

따라서 $\|\eta\|$ 와 $\|x\|$ 가 유계임을 의미하는 적절한 $\|\eta\|$ 와 $\|e\|$ 에 대해 $\dot{V} < 0$ 이 된다. 그리고 페루프시스템은 $\phi(0)$ 의 제약된 범위에서 지속적으로 안정한 시스템이 된다.

여기서 식(27), (28)의 영역에 대해서 살펴보기 위해 다음과 같이 전개해 보자. $V < 0$ 이기 위해 식(25)의 첫째항에서, $1/2 - 1.1. \|\phi\| \geq 1/4$ 로 두면 $\|\phi\|$ 는 다음과 같다.

$$\|\phi\| \leq 1/(41z1x) \quad (30)$$

다음은 식(25)의 둘째항에서 $(3/4)\mu k_3 - (1.1. \|\phi\| + \mu k_4 1q)^2 \geq (1/2)\mu k_3$ 로 두면 다음과 같다.

$$(1z1x\|\phi\| + \mu k_4 1q)^2 - (1/4)\mu k_3 \leq 0 \quad (31)$$

그리고 전개의 편의를 위해 식(31)을 다음과 같이 두자.

$$a^2\mu^2 + (2ab\|\phi\| - c)\mu + b^2\|\phi\|^2 \leq 0, \quad (32)$$

여기서 $a = k_4 1q$, $b = 1.1.$, $c = (1/4)k_3$ 이다.

먼저 해가 존재하기 위해서는 위의 2차 방정식 (32)의 판별식 D가 음이 되어야 한다. 즉 $D = (2ab\|\phi\| - c)^2 - 4a^2b^2\|\phi\|^2 < 0$ 이므로 $\|\phi\|$ 의 영역은 다음과 같다.

$$\|\phi\| \leq c/(4ab) = k_3 / (161z1xk_4 1q) \quad (33)$$

그러면 식(30)과 식(33)으로부터 $\|\phi\|$ 의 영역은 다음과 같다.

$$\|\phi\| \leq \min[k_3 / (161z1xk_4 1q), 1 / (41z1x)] \quad (34)$$

그리고 매개변수 오차 ϕ 가 식(34)의 영역내에만 있으면 시스템이 안정함을 보일 수 있는 자유 매개변수 μ 는 $\mu \leq c/a^2 = k_3 / (4k_4 1q^2)$ 의 영역에서 존재함을 쉽게 보일 수 있다.

이상에서 논한 바와 같이 식(28)에서는 $\|\phi\|$ 의 상한값이 리아프노프 안정성을 보이기 위한 자유 매개변수 μ 와 관련되어 나타나므로 뚜렷하지 않은 데 비해 식(34)에서는 μ 와 무관하게 표현함으로써 시스템의 안정한계내에서 명시적인 $\|\phi\|$ 의 상한값을 보여 준다.

3.2 직접 적응제어방법

지금까지의 간접적인 접근방법은 점근적인 추적을 보이기 위해 매개변수 추정기의 수렴성을 전제로 하고 $W(x, u)$ 의 유계성을 가정하여야 하나, 그 유계를 보장할 수 없을 때 그 미분이 유계된다는 가정하에서 적응치를 제어칙과 직접적으로 연계되는 직접 적응제어방법으로서 기존의 방법⁽¹⁰⁾과는 달리 신호를 성장속도 개념⁽¹⁴⁾을 사용하여 적응 입출력 선형화 제어기의 안정성을 보이고자 한다.

영점동역학이 지속적으로 안정한 시스템에서 유계된 $y, \dots, y^{(r-1)}$ 에 대해 식(8)의 변환 $\phi(\xi, \eta)$ 이 x 의 미분동형이므로 $W(x, u)$ 의 비분이 유계되면 다음과 같다⁽¹⁰⁾.

$$\|\dot{W}\| \leq L_1 \|W\| + L_2, \quad L_1, L_2 \in R^+, \forall t > 0 \quad (35)$$

그리고 $\lim \|g(t)/f(t)\| = 0$ 일때 다음 식(36)와 같이 신호의 성장속도를 정의한다⁽¹⁴⁾.

$$\|g(t)\| = o[\sup_{\tau \leq t} \|f(\tau)\|] \quad (36)$$

즉, $\|g(t)\|$ 는 $\|f(t)\|$ 보다 낮은 속도를 성장된다. 그리고 적응칙, 식(14)에서 e, \dots, e 는 직접적인 관측이 어렵다는 사실에 주목해서 새로운 오차 ε 을 도입하고 아래의 정규화 형태의 식(42)을 사용하여 추적오차를 0에 점근적으로 수렴함을 보인다.

안정성 해석을 위해 먼저 제어칙 (10)을 시스템 (1)에 적용한 오차방정식은 다음과 같다.

$$e^r + k_1 e^{r-1} + \dots + k_r e = \phi^T W \quad (37)$$

식(37)은 다음과 같이 표현할 수도 있다.

$$e_1 = e = M(s) (\phi^T W) \quad (38)$$

여기서 $M(s) = 1/(s^r + k_1 s^{r-1} + \dots + k_n)$ 이며 각정실 (strictly positive real, SPR)이 되도록 선정된다. 식 (38)은 $M(s)$ 의 라플라스 역변환과 $\phi^T W$ 의 대합 (convolution)을 의미한다. 그런데 식(16)의 $e_1 (= \zeta_1 - y_1^{(r-1)})$ 에서 ζ_1 만 관측가능하고 ζ_2, \dots, ζ_n 은 관측이 불가능하다. 따라서 다음과 같은 오차 e_2 를 고려해 보자.

$$e_2 = (\theta^T M(s)I - M(s)\theta^T) W \\ = \phi^T M(s)IW - M(s)\phi^T W + \delta(t) \quad (39)$$

여기서 $\delta(t)$ 는 시간의 경과에 따라 지수적으로 감소하는 항이다. 그리고 e_1 과 e_2 를 합성한 오차 ε 은 다음과 같다.

$$\varepsilon = e_1 + e_2 = \phi^T \zeta + \delta(t) \quad (40)$$

여기서 $\zeta = M(s)IW$ 이며, 지수적인 감소항 $\delta(t)$ 를 무시하면 다음으로 정리된다.

$$\varepsilon = \phi^T \zeta \quad (41)$$

그리고 적용칙을 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\dot{\phi} = -\varepsilon \zeta / (I + \zeta^T \zeta), \quad P > 0 \quad (42)$$

식(41)을 (42)에 적용하면 다음과 같다.

$$\dot{\phi} = -\zeta \zeta^T \phi / (I + \zeta^T \zeta) \quad (43)$$

$$\|\dot{\phi}\|^2 = \varepsilon^2 \zeta^T \zeta / (I + \zeta^T \zeta)^2 \quad (44)$$

따라서 $\phi \in L^2$ 이다. 그러므로 참고문헌(14)의 정리 2.11을 적용할 수 있다. 따라서 다음과 같다.

$$e_2 = o[\sup_{t \leq t} \|\dot{W}\|] \quad (45)$$

그리고 $\varepsilon = o(\sup_{t \leq t} \|W\|)$ 을 보이기 위해 먼저 리아프노프 함수를 도입하고 $V(\phi) = 1/2 \phi^T \phi$ 로 두자.

$$\dot{V}(\phi) = \phi^T (-\varepsilon \zeta / (I + \zeta^T \zeta)) \\ = -\varepsilon^2 / (I + \zeta^T \zeta) \leq 0 \quad (46)$$

$\int \dot{V} dt = V(\infty) - V(t_0) < \infty$ 이다. 따라서

$$\varepsilon / (I + \zeta^T \zeta)^{1/2} \in L^2 \quad (47)$$

즉, $\varepsilon = c_1(t)(I + \zeta^T \zeta)^{1/2}$, $c_1(t) \in L^2$ 이다. 식(47)을 미분하면 다음과 같다.

$$d/dt[\varepsilon / (I + \zeta^T \zeta)^{1/2}] \\ = ((\dot{\phi}^T \zeta + \phi^T \dot{\zeta}) / (I + \zeta^T \zeta))$$

$$- \varepsilon \zeta^T \dot{\zeta} / (I + \zeta^T \zeta)^{3/2} \\ = (\dot{\phi}^T \zeta + \phi^T \dot{\zeta} \zeta^T \zeta + \phi^T \dot{\zeta}) / (I + \zeta^T \zeta)^{3/2} \quad (48)$$

그리고 $M(s)$ 는 안정한 다항식이므로 식(35)로부터 다음과 같다.

$$\|\dot{\zeta}\| \leq L_1 \|\zeta\| + L_2, \quad L_1, L_2 \in R^+, \forall t > 0 \quad (49)$$

식(48)의 노름(norm)을 취하자. 그러면, ϕ 와 ϕ^T 이 유계이므로 식(49)을 적용하면 다음과 같다.

$$\|d/dt[\varepsilon / (I + \zeta^T \zeta)^{1/2}]\| \\ = \|(\dot{\phi}^T \zeta + \phi^T \dot{\zeta} \zeta^T \zeta + \phi^T \dot{\zeta}) / (I + \zeta^T \zeta)^{3/2}\| \\ \leq \|(\dot{\phi}^T \zeta + \phi^T \dot{\zeta} \zeta^T \zeta)\| + \|\phi^T\| \|\dot{\zeta}\| \\ \leq c \in R^+ \quad (50)$$

그러므로 영점동역학이 지수적으로 안정한 시스템에서 유계된 y_n, \dots, y_{n-r-1} 그리고 안정한 다항식 $M(s)$ 에 대해 식(44), (47), (50)로부터 다음과 같다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon / (I + \zeta^T \zeta)^{1/2} = 0 \quad (51)$$

즉, $\varepsilon = o(\sup_{t \leq t} \|\zeta\|)$ 이다.

그러므로 $e_1 (= \varepsilon - e_2) = c_1(t) [\sup_{t \leq t} \|\zeta\|] + c_2(t) \sup_{t \leq t} \|W\|$, $\lim_{t \rightarrow \infty} c_1(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} c_2(t) = 0$ 이다. 즉, 추적오차는 점근적으로 0에 수렴함을 증명할 수 있다.

3.3 비교 및 고찰

간접적인 적응제어방법에 대해 기존의 방법⁽¹³⁾과 비교해 보자.

참고문헌(13)의 정리 4에서, 페루프 시스템이 지수적으로 안정한 시스템임을 보이기 위해 리아프노프 함수의 존재 가능영역을 식(26)부터 식(28)까지와 같이 포함하였다. 그런데 이와 같은 방법은 매개변수 오차 ϕ 의 한계영역을 자유 매개변수 μ 와 관계되어 표현됨으로써 μ 의 설정에 따라 달라지게 된다. 즉, ϕ 의 한계영역에 대한 의미가 분명하지 않게 된다. 그리고 식(28)과 식(34)를 비교해 보자. 식(28)에서 μ 가 최대값일 때 ϕ 의 한계영역이 되므로, 이때 식(28)은 식(28-a)로 된다.

$$\|\phi\| \leq \min[1/(4l_z l_x), \\ k_3 / (4(l_z l_x + k_4 l_q)^2)] \quad (28-a)$$

$$\|\phi\| \leq \min[1/(4l_z l_x), k_3 / (16l_z l_x k_4 l_q)] \quad (34)$$

여기서 항상 $k_3 / (4(l_1 + k_1 l_{11}) + k_{11} l_{11} + k_4 l_1) \leq 0$ 임을 알 수 있다. 즉, 식(34)가 식(28)보다 넓은 영역을 포함함을 의미한다.

그리고 시스템이 안정하기 위한 초기 매개변수 추정오차 $\phi(0)$ 의 한계영역에 대해서도 마찬가지다. 이와 유사한 방법으로 참고문헌[13]의 정리 5에 대해서도 마찬가지로 언급될 수 있다.

그리고 매개변수 수렴성은 기준 궤적 및 $W(x, u)$ 의 여기 차수(order of excitation)에 의존하게 되며, x 의 함수로 표현되는 $W(x, u)$ 의 지속적인 여기(persistent excitation) 조건을 보이는 것은 극히 어렵다.

여기서는 매개변수의 수렴성의 전제하에 리아프노프 안정성을 보이기 위한 이론적 전개에서 Lipschitz 상수들 및 관련 상수로 표현되는 매개변수 추정 오차의 한계를 명확하게 전개한 것이다.

직접 적용제어방법에 대해 고찰을 위해서 참고문헌[10]의 정리 3.3에서는 W 와 $\phi^T W$ 의 정규성(regularity) 및 BOBI 안정성의 개념을 사용하여 페루프 시스템이 안정함을 보였다. 이와는 달리 여기서는 신호의 성장속도 개념을 사용하는 참고문헌[14]의 방법을 적용하였다. 그리고 직접 적용제어방법에서는 $W(x, u)$ 의 미분이 유계라는 가정을 사용하는데, 이러한 가정에는 유계되지 않은 함수(예를 들면 지수함수)가 포함되며, 유계된 불연속성을 가지는 부분연속함수도 포함된다.

이와같이 유계되지 않은 신호를 포함한 시스템의 안정성 해석문제에서 신호의 성장속도의 비교 방법은 BOBI 안정성 보다 직관적인 접근을 가능하게 하며, 그 접근방법이 보다 용이하다.

식(42)와 같은 추정기의 정규화 형태는 식(15)에서의 $W(x, u)e$ 대신에 $\epsilon \zeta / (1 + \zeta^T \zeta)^{1/2}$ 을 대치한 것으로 볼 수 있으며, $W(x, u)$ 의 직접적인 유계성에 대한 보장이 없어도 식(42)의 우변은 식(41)을 적용함으로써 ϕ 에 대해 Lipschitz 조건을 만족할 수 있게 한다. 이와 같은 방법은 최소자승 알고리즘들에 대해서도 마찬가지로 적용될 수 있다.

4. 제어기의 적용예

1) 입출력선형화의 적용예

(관절의 탄력을 고려한 매니퓰레이터)

로봇 매니퓰레이터는 입출력 선형화 방식의 적용을

위한 기본적인 가정이 자연적으로 만족되는 분야로서 관심의 대상이 되어 왔으나 대부분 강체모델에 국한되어 있다. 그런데 대부분의 매니퓰레이터는 벨트나 체인 및 기어를 통해 전동기에 연결되어 있어서 구동속도를 증가 시킴에 따라 구동부분의 탄성효과가 커지게 되며 시스템의 성능을 크게 저하시키게 된다. 따라서 성능의 개선을 위해서는 관절의 탄성을 고려하여야 한다. 여기서는 다음의 모델⁽¹⁸⁾을 고려하여 입출력선형화식을 구해 보자.

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{q}_1 + B_1 \dot{q}_2 + MgL \sin(q_1) \\ + K(q_1 - q_2) &= 0 \\ J_2 \ddot{q}_2 + B_2 \dot{q}_2 + K(q_1 - q_2) &= u \end{aligned} \quad (52)$$

여기서 q_1, q_2 는 각각 고정된 기준축과 전동기 회전축의 각위치이며, J_1, J_2, B_1, B_2 는 각각 기준축과 전동기 회전축의 관성행력, 점성마찰이다. 그리고 K 는 스프링상수이고, $u \in \mathbb{R}^n$ 는 토크입력이다. $x = [q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2]^T$ 로 두고 $\dot{x} = f(x) + g(x)u, y = h(x)$ 의 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ -\frac{k}{J_1}(x_1 - x_2) - \frac{F_1}{J_1}x_3 \\ \frac{k}{J_2}(x_1 - x_2) - v\left(\frac{MgL}{J_2}\right)\sin x_2 - \frac{F_2}{J_2}x_4 \end{bmatrix}, \\ g(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (53)$$

그리고 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} L_f h(x) &= f_2(x) = x_4 \\ L_f^2 h(x) &= f_4(x) \\ L_f^3 h(x) &= (\partial f_4 / \partial x_1)x_3 \\ &\quad + (\partial f_4 / \partial x_2)x_4 + (\partial f_4 / \partial x_4)f_4(x) \\ L_g h(x) &= L_g L_f h(x) = L_g L_f^2 h(x) = 0 \\ L_g L_f^3 h(x) &= (\partial^3 L_f h / \partial x_3) / J_1 = (\partial f_4 / \partial x_1) \\ &\quad / J_1 = K / (J_1 J_2) \end{aligned} \quad (54)$$

여기서 $[g \ L_g L_f h \ L_g L_f^2 h \ L_g L_f^3 h]$ 의 랭크가 4이고, $[g \ L_g L_f h \ L_g L_f^2 h]$ 가 involutivity 조건⁽¹¹⁾을 만족함을 볼 수 있다. 따라서 선형화 제어칙 및 비선형 변환은 다음 식(55)와 같다.

$$u = [-L_f^4 h(x) + \dot{v}] / L_g L_f^3 h(x) \quad (55-a)$$

$$z_1 = h(x) = y, \quad z_2 = L_f h(x) = dy/dt$$

$$z_3 = L_f^2 h(x) = d^2 y/dt^2,$$

$$z_4 = L_f^3 h(x) = d^3 y/dt^3 \quad (55-b)$$

2) 적용 입출력선형화의 적용예

(미지의 부하를 갖는 모터)

알려져 있지 않은 부하 하중을 갖는 다음의 모델⁽¹⁹⁾을 고려하자.

$$L_a di_a/dt = -Ri_a i_a - k\omega i_e + v_a$$

$$J d\omega/dt = k_v i_e i_a - D\omega \quad (56)$$

여기서

J=부하를 포함한 모터의 관성, 0.2 oz-in./rad/sec

D=부하를 포함한 모터의 점성마찰 0.1

oz-in./rad/sec

R.=전자의 저항, 1Ω

L.=전자의 인덕턴스, 0.05Ω

k.=모터 시정수, 10 oz-in./A/A

i.=전자기 전류(A)

i.=계자 전류(A)

v.=전자기 전압(V)

ω=각속도 (rad/sec)

θ=각위치 (rad)

x₁=i., x₂=θ, x₃=ω, u=i., v=v.

로 두어 식(1)의 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{bmatrix} -20x_1 \\ x_3 \\ -1/2(x_3) \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} -200x_3 \\ 0 \\ 50x_1 \end{bmatrix},$$

$$h(x) = x_2 \quad (57)$$

그리고 다음과 같이 계산된다.

$$L_f h(x) = f_2(x) = x_3$$

$$L_f^2 h(x) = f_3(x) = -1/2(x_3) \quad (58)$$

$$L_g h(x) = g_2(x) = 0$$

$$L_g L_f h(x) = 50x_1$$

제어칙은 다음 식(59)와 같다.

$$u = [-(L_f^2 h(x))_e + \dot{\hat{v}}] / (L_g L_f h(x))_e \quad (59-a)$$

$$\hat{v} = y_n^r + k_1(y_n^{r-1} - \hat{y}^{r-1}) + \dots + k_r(y_n - \hat{y}) \quad (59-b)$$

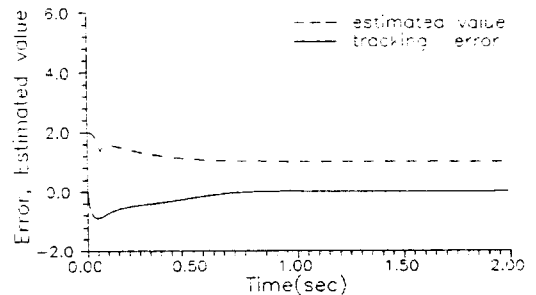
페루프 시스템 및 적용칙은 다음 식(60)과 같다.

$$\dot{e} = \Omega e + W(x, u)^T \phi \quad (60-a)$$

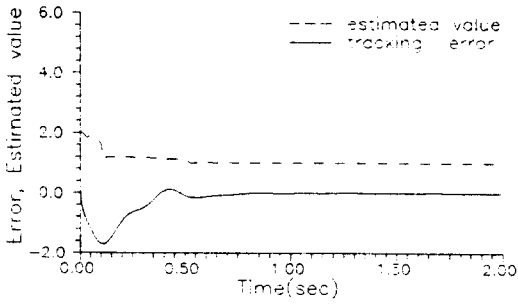
$$\phi = -W(x, u) P e \quad (60-b)$$

식(59-b)에서 k₁=30, k₂=200로 선정하고, 부하를 포함한 모터의 관성을 추정 매개변수로 하면 W(x, u) = -0.5x₃ + 50x₁u 이다. 설계상수는 ω₁₁=ω₂₂=ω₃₃=50으로 정한다. 다른 기준 궤적 y₁₁=10sin(2πt), y₁₂=sin(10πt) + 2sin(5πt)에서 θ₀*=1일때 초기 매개변수값 추정을 θ̂₀=2, θ̂₀=5으로 한 경우에 각각 시뮬레이션 결과는 그림 1, 그림 2와 같다.

그림 1에서와 같이 추적오차는 매개변수의 수렴성에 민감하게 응답하고 있으며 매개변수의 수렴성은 기준 궤적에 크게 의존함을 알 수 있다. 그리고 그림 2에서 초기 매개변수 추정값이 5인 경우에 기준 궤적이 y₁₂일 때 여전히 안정성을 유지하고 있으나 기준 궤적이 y₁₁일때는 안정성을 잃게 되는 예를 보여 준다. 따라서 다른 기준 궤적에 따라 안정성을 보장하기 위한 초기 매개변수의 추정값의 영역이 다르게 제한됨을 알 수 있다.

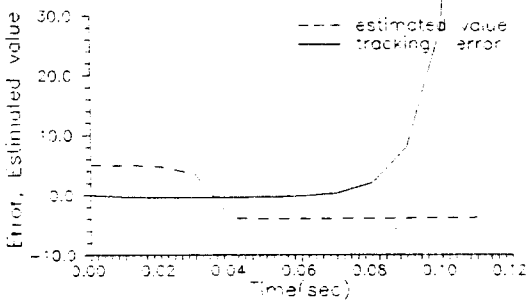


a) In the case of y₁₁

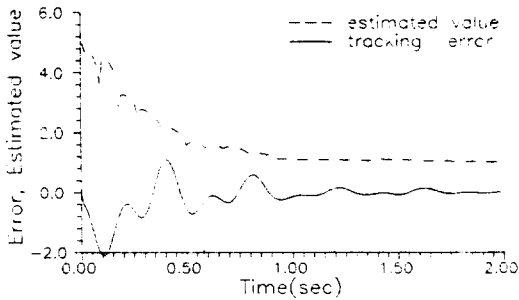


b) In the case of y_{12}

Fig.1 Tracking error and estimated parameter ($\hat{\theta}_0 = 2$)



a) In the case of y_{11}



b) In the case of y_{12}

Fig.2 Tracking error and estimated parameter ($\hat{\theta}_0 = 5$)

5. 결 론

여러가지의 불확실한 매개변수, 외란 및 측정오차를 갖는 비선형 시스템에 대하여, 적응 입출력 선형화 제

어기의 안정성을 해석하고 적용한 결과,

첫째, 매개변수 불확실성이 존재하지 않는 경우에 영점 동역학이 지수적으로 안정한 시스템에 대하여 기준 궤적 및 그 도함수들이 유계되면서 추적오차는 점근적으로 0으로 수렴하고 영점 동역학의 상태 변수 η 는 유한함을 볼 수 있다.

둘째, 불확실성이 존재하는 경우에 시스템이 안정하기 위한 매개변수 추정오차의 명시적인 상한값을 보였으며,

셋째, 미지의 부하를 갖는 모터 모델에 적용하여 안정성을 보장하기 위한 초기 매개변수의 추정값의 영역이 다른 기준 궤적에 따라 다르게 제한됨을 보였다.

넷째, $W(x, t)$ 의 유계를 보장할 수 없을 때 직접적인 접근적용방법으로서의 기존의 방법과 다른 방법인 신호의 성장속도 개념을 사용하여 적응 입출력 선형화 제어기의 안정성을 보였다.

참고문헌

1. Isidori, A., Nonlinear Control Systems, Springer-Verlag, pp.289~402, 1989.
2. Brockett, R.W., Millman, R. S., Sussmann, H. J., Differential Geometric Control Theory, Birkhauser, pp.156~164, 1982.
3. Ha, I. J., "The standard decomposed system and noninteracting feedback control of nonlinear systems," SIAM, Journal of Control and Optimization, Vol. 26, pp.1235~1249, 1988.
4. Hunt, L. R., and Su, R., Meyer, G., "Global transformations of nonlinear systems," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-28, pp.24~31, 1983.
5. Isidori, A., Krener, A. J., Gori-Giorgi, C., and Monaco, S., "Nonlinear decoupling via feedback : a differential geometric approach," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-26, pp.331~345, 1981.
6. Ha, I. J., and Guilbert, E. G., "Robust tracking in nonlinear systems," IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 26, pp.763~771,

- 1987.
7. Zak, S.H., "An Eclectic approach to the state feedback control of nonlinear dynamic systems," ASME Trans. on Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, pp.631~640, 1989.
 8. Taylor, D.G., Kokotovic, P.V., Marino, R., and Kanellakopoulos, I., "Adaptive regulation of nonlinear systems with unmodeled dynamics," IEEE Trans. on Automatic Control, 34, pp.405~412, 1989.
 9. Kanellakopoulos, I., Kokotovic, P.V., and Marino, R., "Robustness of adaptive nonlinear control under an extended matching condition," Nonlinear Control Systems Design, Capri, Italy, 1989.
 10. Sastry, S., and Isidori, A., "Adaptive control of linear systems," IEEE Trans. on automatic Control, 34, pp.1123~1131, 1989.
 11. Pomet, J., Praly, L., "Indirect adaptive nonlinear control," 27th IEEE Conference on Decision and Control, pp.2424~2415, 1988.
 12. Bastin, G., and Campion, G., "Indirect adaptive control of linearly parameterized nonlinear systems," Third IFAC Symposium on Adaptive Systems in Control and Signal Processing, Glasgow, 1989.
 13. Teel, A., Kadiyala, R., Kokotovic, P., and Sastry, S., "Indirect techniques for adaptive input-output linearization of nonlinear systems," Int. J. Control, Vol.53, No.1, pp.193~222, 1991.
 14. Narendra, K. S., Annaswamy, A.M., Stable Adaptive Systems, Prentice-Hall, pp.84~85, 1989.
 15. Sastry, S., and Bodson, M., Adaptive Control, stability, convergence, and robustness, Prentice-Hall, pp.294~323, 1989.
 16. Astrom, K.J., Wittenmark, B., Adaptive Control, Addison Wesley, pp.61~89, 1989.
 17. Slotine, J.J.E., Li, W., Applied Nonlinear Control, Prentice-Hall, pp.120~128, pp.311~387, 1991.
 18. Spong, M.W., Vidyasagar, M., Robot Dynamics and Control, John Willey & Sons, pp.259~313, 1989.
 19. Mohler, R., Nonlinear Systems(II), Prentice-Hall, pp.75~77, 1991.