응용통계연구
제 5 권 제 1 호, 1992년

확률화 블럭 계획법에서 우산형 대립가설에 대한 분포부관 검정법의 연구†

김동희* · 김영철*

요 약

확률화 블럭 계획법에서 우산형 대립가설에 대한 분포 무관 검정법을 제시하고 제안된 검정통계량의 점근적 성질과 모수적 방법과의 점근상대효율을 관찰하였다.

블럭수가 4, 처리수가 5일 때와 블럭수가 3, 처리수가 5일 때 주어진 정점이 2, 3, 4인 경우와 블럭수가 2, 처리수가 4일 때 주어진 정점이 3인 경우에 소표본 Monte Carlo실험을 통하여 제안된 검정통계량과 Puri의 모수적 통계량의 실험 검정력을 구하였으며 제안된 검정통계량이 두터운 꼬리를 갖는 분포에서 효율적임을 보였다.

1. 서 론

우리는 때때로 어떤 작업을 수행하는 능력이, 연령이 증가함에 따라 향상되다가, 어느 연령 이후에는 그 능력이 쇠퇴하는 상황을 접하게 된다. Mack과 Wolfe(1981)는 k개의 표본 문제에 대해 Mann-Whitney 통계량을 사용하여 이러한 문제들을 다루었으며, 이를 우산형 대립가설이라 부르고 최대점을 정점이라 정의하였다. Shi(1988a)는 우산형 대립가설에 대한 동질성 검정법을 제안하고 isotonic regression을 이용하여 수준확률표(level probability table)를 얻었다. 그는(1988b) 또한 우산형 대립가설하에서 정점이 알려졌을때 최대최소 효율 선형 순위검정법으로 알려진 최적 순위검정법을 제안했다. Hettmansperger와 Norton(1987)은 특정한 형태를 갖는 대립가설의 순위검정법을 구하고 검정통계량에 관한 몇가지 특성을 연구했다.

이 논문에서 우리는 Mann-Whitney 통계량을 이용하여 확률화 블럭 계획법에서 우산형 대립가설을 검정하기 위한 검정통계량을 제안하고, 제안된 검정통계량의 모수통계량에 대한 점근상대효율을 구하도록 한다.

이 논문에서 우리가 다루고자 하는 모형은 교호작용들이 없는 모형으로써 다음과 같다.

---

† 이 논문은 1990년도 문교부 지원 학술진흥재단의 지방대육성 학술연구조성비에 의하여 연구되었음.

* (609-735) 부산직할시 금정구 장전동 부산대학교 통계학과

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \theta_i + \varepsilon_{ijk},\ i = 1, \cdots, b,\ j = 1, \cdots, c,\ k = 1, \cdots, n_{ij} \tag{1.1}$$

여기서, X_{ijk} 는 연속인 미지의 분포함수 F(·)를 가지며, μ는 전체평균, α_i들은 장애모수들로서 i번째 블럭효과들을 의미하고, θ_j들은 처리들의 j번째 주효과들을 의미하며, ε_{ijk} 들은 평균이 0이고 분산이 σ^2인 독립이고 동일한 분포를 갖는다고 가정한다.

다루고자 하는 귀무가설은

$$H_o : \theta_1 = \cdots = \theta_c \tag{1.2}$$

이고 우산형 대립가설은

$$H_1 : \theta_1 \le \cdots \le \theta_p \ge \theta_{p+1} \ge \cdots \ge \theta_c \tag{1.3}$$

인데 적어도 하나의 부등호를 만족하며 Mack과 Wolfe(1981)의 정의에 의하여 p는 정점을 뜻한다.

2장에서는 우산형 대립가설 H_1에 대해 귀무가설 H_0를 검정하기 위한 검정통계량을 제안하고, 귀무가설 H_0하에서 검정통계량의 점근적 성질을 조사해 본다.

3장에서는 전이 대립가설의 순서하에서 검정통계량과 Puri(1965)의 모수통계량에 관한 점근적 성질들을 관찰하며 두 통계량들의 점근상대효율을 연구한다.

4장에서는 블럭수가 4, 처리수가 5일 때와 블럭수가 3, 처리수가 5일 때 정점이 2, 3, 4인 경우 및 블럭수가 2, 처리수가 4일 때 정점이 3인 경우에 기준분포들에 대한 검정통계량들의 실험 검정력들을 비교하기 위해 소표본 Monte Carlo 실험을 수행한다.

2. 제안된 검정통계량

2.1 제안된 검정통계량

b개의 블럭과 교호작용이 없는 c개의 처리와 (i, j)칸에서는 하나 이상의 관찰치 $n_{ij} \ge 1$를 갖는 확률화 블럭 계획법을 생각해 보자. 정점 p가 주어졌을때 i번째 블럭의 Mack-Wolfe 통계량을 A_{ip}라 하면 우산형 대립가설 H_1에 대한 귀무가설 H_0를 검정하기 위해 제안하고자 하는 검정통계량은

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^{b} A_{ip} \\ &= \sum_{i=1}^{b} \left\{ \sum_{s=1}^{p-1} \sum_{t=s+1}^{p} U_{ist} + \sum_{s=p}^{c-1} \sum_{t=s+1}^{c} U_{its} \right\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

이다. 위 식에서 $A_{ip} = \sum_{s=1}^{p-1} \sum_{t=s+1}^{p} U_{ist} + \sum_{s=p}^{c-1} \sum_{t=s+1}^{c} U_{its}$이고 U_{its}는 (i, s)칸과 (i, t)칸에 있는 관찰치들로부터 얻어낸 Mann-Whitney 통계량이다. 정점 p에 이르기까지 (2.1)식의 첫번째 항은 증가추세에 있는 Mann-Whitney 통계량을 합한 것이고 정점 p이후는 감소추세에 있는 Mann-Whitney 통계량을

합한 것이므로 (1.3)의 우산형 대립가설하에서 통계량(2.1)은 큰 값을 가지게 되므로, A의 값이 클 때 귀무가설 H_0는 기각된다.

A에 있는 Mann-Whitney 통계량이 대응 순서를 근거로 하기 때문에 A는 분포무관 통계량이다.

2.2 귀무가설하의 점근 분포

제안된 검정통계량의 점근적 성질들을 유도하기 위해 H_0하에서 검정통계량 A의 평균과 분산을 구하고자 한다. Mack과 Wolfe(1981) 및 Hettmansperger(1984)의 결과를 이용하여 다음과 같은 정리를 얻는다.

정리 2.1. H_0하에서, A의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$E_0(A) = \sum_{i=1}^{b} [N_{i1}^2 + N_{i2}^2 - \sum_{j=1}^{c} n_{ij}^2 - n_{ip}^2]/4,$$

$$\begin{aligned} Var_0(A) = \sum_{i=1}^{b} [&2(N_{i1}^3 + N_{i2}^3) + 3(N_{i1}^2 + N_{i2}^2) - \sum_{j=1}^{c} n_{ij}^2 (2n_{ij} + 3) \\ &- n_{ip}^2 (2n_{ip} + 3) + 12\, n_{ip} N_{i1} N_{i2} - 12\, n_{ip}^2 N_i] / 72. \end{aligned} \tag{2.2}$$

위 식에서, $N_{i1} = \sum_{j=1}^{p} n_{ij}, N_{i2} = \sum_{j=p}^{c} n_{ij}, N_i = \sum_{j=1}^{c} n_{ij}$ 이다.

증명. $E_0(U_{its}) = n_{is}n_{it}/2$, $Var_0(U_{its}) = n_{is}n_{it}(n_{is} + n_{it} + 1)/12$이다. 따라서 $E_0(A)$와 $Var_0(A)$에 대한 식은 바로 구해진다.

다음의 정리 2.2는 제안된 검정통계량 A의 점근적 정규성을 설명하고 있다. 표준화된 통계량 A의 극한 분포를 구하기 위해서 우리는 Skillings와 Wolfe(1978) 및 Quade(1984)에 의해 주어진 다음의 가정들이 필요하다.

가정 1 : 블럭들은 상호 독립이다.

가정 2 : 임의의 i에 대해 $N_i \le M$인 임의의 상수 $M < \infty$ 이 존재한다.
단, $N_i = \sum_{j=1}^{c} n_{ij}$임.

정리 2.2. 가정 1과 2를 만족한다고 하자. 그러면, H_0가 참일때, $(A - E_0(A))/(Var(A))^{1/2}$ 는 극한($b \to \infty$) 표준정규분포를 따른다.

증명. Kim, Song과 Kim(1986)의 정리 2.2.1로부터 증명된다.

3. 검정통계량들의 점근적 성질

3.1 전이 대립가설의 순서하에서의 점근적 정규성

제안된 검정통계량들의 점근적 성질들을 조사하기 위해 다음과 같은 형태의 전이 대립가설 순서를 고려한다.

$$H_b : \theta_j = \begin{cases} j\,\theta\, b^{-1/2}, & j = 1, 2, \cdots, p \\ (2p-j)\,\theta\, b^{-1/2}, & j = p+1, \cdots, c \text{이고 } \theta > 0 \text{이다.} \end{cases} \tag{3.1}$$

순서열 $\{H_b\}$는 H_0를 포함하는 대립가설이며, 순서열 $\{H_b\}$하에서, 제안된 검정통계량 A의 점근적 정규성을 다음 정리에서 요약해 본다.

정리 3.1. 가정 1과 2를 만족한다고 하자. 그러면, (3.1)의 순서열 $\{H_b\}$하에서, $(A-E(A))/(Var(A))^{1/2}$는 극한($b\to\infty$) 표준정규분포를 따른다. 여기서,

$$E(A) = \sum_{i=1}^{b}\Big[\sum_{s=1}^{p-1}\sum_{t=s+1}^{p} n_{is}n_{it}\int[1-F(x-(t-s)\,\theta/\,b^{1/2}\,)]\;dF(x) + \sum_{s=p}^{c-1}\sum_{t=s+1}^{c} n_{is}n_{it}\int[1-F(x-(t-s)\,\theta/\,b^{1/2}\,)]\;dF(x)\Big]$$

이고 $Var(A)$는 (2.2)에서 주어진 $Var_0(A)$와 같다.

증명. Mann-Whitney 통계량 U_{ist} 는 $U_{its} = \sum_{u=1}^{n_{is}}\sum_{v=1}^{n_{it}}\Psi(X_{itv}-X_{isu})$로 표현할 수 있고, $\Psi(z)$는 $z>0$ 이면 1을 취하고 그렇지 않으면 0을 취한다. 따라서

$$E\Big\{\sum_{s=1}^{p-1}\sum_{t=s+1}^{p}U_{ist}\Big\} = \sum_{s=1}^{p-1}\sum_{t=s+1}^{p}\sum_{u=1}^{n_{is}}\sum_{v=1}^{n_{it}}P(X_{itv} > X_{isu})$$

$$= \sum_{s=1}^{p-1}\sum_{t=s+1}^{p} n_{is}n_{it}\int[1-F(y-(t-s)\,\theta/\,b^{1/2}\,)]\;f(y)\,dy \text{ 이고}$$

$$E\Big\{\sum_{s=p}^{c-1}\sum_{t=s+1}^{c}U_{ist}\Big\} = \sum_{s=p}^{c-1}\sum_{t=s+1}^{c}\sum_{u=1}^{n_{is}}\sum_{v=1}^{n_{it}}P(X_{isu} > X_{itv})$$

$$= \sum_{s=p}^{c-1}\sum_{t=s+1}^{c} n_{is}n_{it}\int[1-F(y-(t-s)\,\theta/\,b^{1/2}\,)]\;f(y)\,dy \text{ 이다.}$$

따라서,

$$E(A) = \sum_{i=1}^{b}\Big[\sum_{s=1}^{p-1}\sum_{t=s+1}^{p} n_{is}n_{it}\int[1-F(y-(t-s)\,\theta/\,b^{1/2}\,)]\;f(y)dy + \sum_{s=p}^{c-1}\sum_{t=s+1}^{c} n_{is}n_{it}\int[1-F(y-(t-s)\,\theta/\,b^{1/2}\,)]\;f(y)dy\Big] \text{이다.}$$

Liapounov의 중심극한정리를 적용하여, $(A-E(A))/(Var(A))^{1/2}$는 극한 $(b\rightarrow\infty)$ 표준정규분포를 따른다.

통계량 A의 효율성을 알아보기 위해 A와 대응되는 모수적 통계량으로서 Puri(1965)의 통계량을 생각해 보자. Puri(1965)의 통계량은

$$P=\sum_{i=1}^{b}\Big[\sum_{s=1}^{p-1}\sum_{t=s+1}^{p} n_{is}n_{it}(\overline{X}_{it.}-\overline{X}_{is.}) + \sum_{s=p}^{c-1}\sum_{t=s+1}^{c} n_{is}n_{it}(\overline{X}_{is.}-\overline{X}_{it.})\Big] \text{ 이고} \tag{3.2}$$

$$\overline{X}_{ij.}=\sum_{k=1}^{n_{ij}} X_{ijk}/n_{ij} \text{ 이다.}$$

P는 기준분포들이 정규형태일때 우산형 대립가설에대한 자연스런 모수적 검정법이 된다.

보조정리 3.2. $\sigma^2=Var(X_{ijk})<\infty$ 이라 가정하자. 그러면, (3.1)의 순서열 $\{H_b\}$하에서 통계량 $(P-E(P))/(Var(P))^{1/2}$ 는 극한$(b\rightarrow\infty)$ 표준정규분포를 따른다. 위 식에서,

$$E(P)=\sum_{i=1}^{b}\Big[\sum_{s=1}^{p-1}\sum_{t=s+1}^{p} n_{is}n_{it}(t-s)\,\theta/b^{1/2} + \sum_{s=p}^{c-1}\sum_{t=s+1}^{c} n_{is}n_{it}(t-s)\,\theta/b^{1/2}\Big] \text{ 이고}$$

$$Var(P)=\sigma^2\sum_{i=1}^{b}\{2(N_{i1}^3+N_{i2}^3-2\sum_{j=1}^{c} n_{ij}^3-2n_{ip}^3 + 12(n_{ip}N_{i1}N_{i2}-n_{ip}^2N_i)\}/6 \text{ 이다.} \tag{3.3}$$

증명. Puri(1965, 정리 5.3)의 결과를 이용하여, E(P)는 즉시 구해지고, Archambault, Mack과 Wolfe(1977)로부터, Var(P)는 (3.3)의 식이 된다. Liapounov의 중심극한정리를 적용하면, $(P-E(P))/(Var(A))^{1/2}$는 극한$(b\rightarrow\infty)$ 표준정규분포를 따른다.

3.2 점근상대효율

점근상대효율에 대한 개념은 대표본에 대한 두 검정들의 효율성을 비교하기 위해 제시되었다. Randles와 Wolfe(1979)의 저서에서 $ARE(S_n, T_n^*)$로 표기된, T_n^* 검정법에 대한 S_n 검정법의 점근상대효율은 두 검정들의 극한 유의수준이 같고, 동일한 대립가설에 대해 같은 극한 검정력을 얻기 위한, 표본크기 (n, n^*)의 극한비로서 정의했다. ARE를 간편히 계산하기 위해 Noether(1955)의 다음 정의를 소개한다.

정리 3.1 $\{\theta_n\}$이 $H_0:\theta=\theta_0$를 검정하기 위한 $\lim_{n\rightarrow\infty}\theta_n=\theta_0$인 대립가설의 순서열이라 하자. θ_0는 임의의 지정된 모수값이다. 이때,

$$eff(S_n)=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{\{\frac{d}{d\theta}E(S_n:\theta)\mid\theta_n=\theta_0\}^2}{n\sigma^2(S_n)}$$

을 검정 S_n의 효력(efficacy)이라 부른다. $\sigma^2(S_n)$은 H_0하에서 S_n의 분산을 나타낸다. Noether(1955)의 조건들이 충족될때 $ARE(S_n, T_n^*)$는

$$ARE(S_n, T_n^*) = \frac{eff(S_n)}{eff(T_n^*)}$$ 으로 주어진다.

이제 제안된 검정통계량과 Puri의 검정통계량과의 효력(efficacy)들을 계산하고 두 검정통계량들의 ARE를 구해 본다. 정의 3.1을 사용하여, 두 검정통계량들의 효력(efficacy)은 다음과 같이 얻어진다.

$$eff(A) = \lim_{b\to\infty} \frac{\left[b^{-1/2} \sum_{i=1}^{b} \left[\sum_{s=1}^{p-1} \sum_{t=s+1}^{p} n_{is}n_{it}\,(t-s) \int f^2(x)dx + \sum_{s=p}^{c-1} \sum_{t=s+1}^{c} n_{is}n_{it}\,(t-s) \int f^2(x)dx \right] \right]^2}{b\sigma_0^{\,2}(A)} \tag{3.4}$$

$$eff(P) = \lim_{b\to\infty} \frac{\left[b^{-1/2} \sum_{i=1}^{b} \left[\sum_{s=1}^{p-1} \sum_{t=s+1}^{p} n_{is}n_{it}\,(t-s) + \sum_{s=p}^{c-1} \sum_{t=s+1}^{c} n_{is}n_{it}\,(t-s) \right] \right]^2}{b\sigma_0^{\,2}(P)} \tag{3.5}$$

위 식에서 $\sigma_0^{\,2}(A)$와 $\sigma_0^{\,2}(P)$는 (2.2)와 (3.3)에서 주어진 분산을 나타낸다.

검정통계량 P에 대한 제안된 검정통계량의 ARE를 구해 보면, (3.4),(3.5)와 ARE의 정의로부터,

$$ARE(A, P) = \lim_{b\to\infty} \frac{\sigma_0^{\,2}(A)}{\sigma_0^{\,2}(A)} \left\{ \int f^2(x)dx \right\}^2$$

이 된다.

칸의 크기들이 모두 1일때, 즉 각각의 i와 j에 대해 $n_{ij} = 1$일때, P에 대한 A의 ARE는

$$ARE(A, P) = 12\sigma^2 \left\{ \int f^2(x)dx \right\}^2 \times \frac{1}{1 + \dfrac{3C(C+1) - 6p(C-p+1)}{2\left[C(C+1)(C+2) - 3(C-1)p(C-p+1) - 6C\right]}}$$

로써 표현되어 진다. c가 무한히 커질때, $ARE(A, P) = 12\sigma^2 \left\{ \int f^2(x)dx \right\}^2$이 되며 이는 t검정에 대한 Wilcoxon검정의 점근상대효율이다.

칸의 크기들이 모두 같을때, 즉 각각의 i와 j에 대해 $n_{ij} = n$일때, P에 대한 A의 ARE는

$$ARE(A, P) = 12\sigma^2 \left\{ \int f^2(x)dx \right\}^2 \times \frac{1}{1 + \dfrac{3C(C+1) - 6p(C-p+1)}{2n\left[C(C+1)(C+2) - 3(C-1)p(C-p+1) - 6C\right]}}$$

로써 표현되어 진다. c가 무한히 커질때, $ARE(A, P) = 12\sigma^2 \left\{ \int f^2(x)dx \right\}^2$이 된다.

4. 소표본 Monte Carlo 연구

4.1 실험계획

우리는 우산형 대립가설에 대한 통계량 A의 실험 검정력을 Puri의 통계량 P와 비교하여 설명한다. 다섯가지의 기준분포들, 균등, 정규, 코시, 이중지수, 그리고 오염 정규분포들이 Monte Carlo연구에 사용되었다. 이러한 분포들은 꼬리가 얇은 분포, 보통인 분포, 그리고 다소 두터운 분포로 표현되어 진다. 오염 정규 분포함수는 $F(x) = 0.9\Phi(x) + 0.1\Phi(x/3)$이다. 이때 Φ는 표준정규 분포함수이다.

균등 확률 변량과 정규 확률 변량은 IMSL 프로그램 GGUBS와 GGNML을 사용하여 생성되었고, 코시와 이중지수 확률 변량들은 GGUBS와 적분 확률변환을 이용하여 생성되었다.

모의실험연구에서, 다음과 같은 여러 가지 경우들을 고려한다.

경우 1 ; $n_{i1} = 3,\ n_{i2} = 4,\ n_{i3} = 5,\ n_{i4} = 6,\ n_{i5} = 7,\ i = 1,\cdots,4$

경우 2 ; $n_{i1} = 7,\ n_{i2} = 6,\ n_{i3} = 5,\ n_{i4} = 4,\ n_{i5} = 3,\ i = 1,\cdots,4$

경우 3 ; $n_{ij} = 5,\ i = 1,\cdots,4,\ j = 1,\cdots,5$

경우 4 ; $n_{1j} = 2,\ n_{2j} = 3,\ n_{3j} = 4,\ j = 1,\cdots,5$

경우 5 ; $(n_{11},\cdots, n_{15}, n_{21},\cdots, n_{25}, n_{31},\cdots, n_{35}) = (2,2,3,3,4,2,3,3,4,4,3,3,4,3,3)$

경우 6 ; $(n_{11},\cdots, n_{15}, n_{21},\cdots, n_{25}, n_{31},\cdots, n_{35}) = (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15)$

경우 7 ; $n_{1j} = 3,\ n_{2j} = 4,\ j = 1,\cdots,4$

경우 8 ; $(n_{11},\cdots, n_{14}, n_{21},\cdots, n_{24}) = (2,2,3,3,3,4,4,5)$

경우 9 ; $(n_{11},\cdots, n_{14}, n_{21},\cdots, n_{24}) = (1,2,3,4,5,6,7,8)$

경우 1,2,3은 블럭수가 4, 처리수가 5일 때이고 대체로 칸의 크기가 균형을 이룰 때이고, 경우 4,5,6은 블럭수가 3, 처리수가 5일 때 대체로 칸의 크기가 불균형할 때를 고려한 것이다. 경우 7,8,9는 블럭수가 2, 처리수가 4일 때 대체로 칸의 크기가 불균형을 이룰 때를 고려한다.

경우 1에서 경우 6까지는 처리효과들에 대한 형태가 $\theta^* = (-\delta\sigma/3, \delta\sigma/3, \delta\sigma, \delta\sigma/3, -\delta\sigma/3)$이고 경우 7에서 경우 9까지는 $\theta^* = (-\delta\sigma/3, \delta\sigma/3, \delta\sigma, \delta\sigma/3)$이다. 즉, 등간격 처리효과들이고 정점이 세번째 효과인 형태를 고려했다. δ는 증가분이 0.2로써 0.0과 1.0사이의 범위에 있으며, σ는 각 모집단의 표준편차이다. 모든 분포들은 분산이 존재할때, 분산이 1을 갖도록 표준화하여 사용하며, 코시분포의 경우에서는 2차 적률이 존재하지 않으므로 우리는 표준정규분포의 표준편차에 대응하는 σ를 선택한다. 즉,

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} [\pi(1+X^2)]^{-1} dX = 0.6827 = \Phi(1) - \Phi(-1).$$

따라서, σ의 값은 1.8326이다.

모의실험 연구에서, 우리는 유의수준 $\alpha = 0.05$에서 기각치를 결정하기 위하여 통계량들의 극한 정규분포를 사용한다. 통계량 A와 P의 실험 유의수준들과 검정력들이 계산되었다. 우리는 1000번의 반복실험에서 기각치보다 큰 값들이 각 검정통계량에서 몇 회 일어나는 지를 센다. 센 횟수를 1000으로 나눔으로써, $\delta = 0.0$에서의 실험 검정력이 실험 유의수준으로 나타내어진다.

4.1 모의실험 결과

경우 1에서 경우 6까지 정점이 2,3,4일때, 검정통계량들의 실험 유의수준들과 검정력들은 표 1에서 표 6까지에 주어져 있고 경우 7에서 경우 9까지의 실험결과는 표 7에 주어져 있다. 기준 분포들의 유의수준과 비교하여, 실험검정력을 통해 본 논문에서 다루고 있는 검정법의 실험을 하였다.

칸의 크기가 대체로 균형을 이루는 경우 표 1에서 표 3까지를 살펴보면, 검정법 A의 실험 검정력들은 균등분포와 정규분포에서 검정법 P의 검정력보다 다소 떨어지지만, 꼬리가 두터운 분포에서는 검정법 P의 검정력보다 우수하게 나타났다.

칸의 크기가 불균형을 이룰 때의 실험결과가 표 4에서 표 6까지에 나타나 있는데 이 경우에도 꼬리가 두터운 분포인 코시분포, 이중지수분포에서 검정법 A의 실험검정력이 검정법 P보다 우수하게 나타났고 오염정규분포에서는 δ의 값이 0.4이상인 경우에 대체로 검정법 A의 검정력이 우수하게 나타났다. 표 7에서는 처리수가 4인 경우에 실험을 해 본 결과 앞의 실험결과와 비슷한 결과를 얻을 수 있는데 오염정규분포에서 δ의 값이 1에 가까울 때 검정법 A의 검정법이 검정법 P보다 우수하게 나타났으며, 각 실험에서 검정통계량 A의 실험 검정력들이 이중지수분포에서 가장 높게 나타났음을 알 수 있다.

결론적으로 꼬리가 두터운 분포들에서 통계량 A의 실험 검정력들이 통계량 P의 검정력보다 우수함을 알 수 있다.

5. 결 론

이 논문은 확률화 블럭 계획법에서 우산형 대립가설에 대한 분포무관 검정법을 제안하고, 제안된 검정통계량은 Mack과 Wolfe(1981)의 논문에서 사용된 Mann-Whitney 통계량을 써서 만들어졌다.

제안된 검정통계량의 점근적 정규성과 모수 통계량에 대한 제안된 검정통계량의 점근상대효율을 살펴 볼 때 칸의 크기가 모두 같으면, c가 무한히 커짐으로써, ARE는 $12\sigma^2\{\int f^2(x)dx\}^2$으로 되고, 이는 t-검정법에 대한 Wilcoxon 검정법의 점근상대효율과 같다.

기준분포들이 균등, 정규, 코시, 이중지수, 그리고 오염정규분포일때 검정법 A와 P의 실험 검정력을 소표본 Monte Carlo연구를 통하여 살펴본 결과 제안된 검정법은 두터운 꼬리를 갖는 분포에서 좋은 실험 검정력을 갖는다는 사실을 알게 되었다.

注) 본 논문을 보다 좋은 논문으로 만들기 위해 좋은 의견을 보내주신 심사위원과 편집위원께 깊은 감사를 드립니다.

표 1. 실험검정력 (경우 1)

통계량	p = 2						p = 3						p = 4					
	δ=0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	균등분포						균등분포						균등분포					
A	0.054	0.338	0.788	0.972	0.999	1.000	0.046	0.240	0.556	0.844	0.986	0.999	0.051	0.280	0.653	0.910	0.991	1.000
P	0.056	0.361	0.840	0.988	1.000	1.000	0.053	0.265	0.607	0.898	0.986	1.000	0.057	0.303	0.700	0.947	0.998	1.000
	정규분포						정규분포						정규분포					
A	0.044	0.350	0.835	0.982	0.998	1.000	0.045	0.243	0.570	0.852	0.983	0.997	0.055	0.273	0.678	0.921	0.992	1.000
P	0.047	0.387	0.860	0.990	1.000	1.000	0.040	0.244	0.609	0.884	0.989	1.000	0.059	0.286	0.712	0.937	0.996	1.000
	코시분포						코시분포						코시분포					
A	0.043	0.350	0.782	0.967	0.999	1.000	0.053	0.223	0.581	0.835	0.958	0.993	0.054	0.271	0.644	0.844	0.982	0.994
P	0.042	0.086	0.152	0.216	0.302	0.357	0.043	0.084	0.126	0.157	0.184	0.263	0.060	0.091	0.136	0.168	0.243	0.282
	이중지수분포						이중지수분포						이중지수분포					
A	0.051	0.446	0.909	0.995	1.000	1.000	0.046	0.302	0.714	0.954	0.999	1.000	0.040	0.345	0.822	0.969	1.000	1.000
P	0.053	0.383	0.829	0.988	1.000	1.000	0.042	0.271	0.625	0.909	0.984	1.000	0.043	0.296	0.726	0.945	0.998	1.000
	오염정규분포						오염정규분포						오염정규분포					
A	0.057	0.421	0.913	0.998	1.000	1.000	0.063	0.279	0.699	0.952	0.996	1.000	0.045	0.335	0.791	0.978	0.997	1.000
P	0.057	0.367	0.821	0.988	1.000	1.000	0.065	0.242	0.622	0.900	0.984	0.998	0.049	0.302	0.695	0.949	0.993	1.000

표 2. 실험검정력 (경우 2)

통계량	p = 2						p = 3						p = 4					
	δ=0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	균등분포						균등분포						균등분포					
A	0.055	0.270	0.633	0.895	0.988	0.999	0.054	0.251	0.559	0.864	0.971	0.997	0.046	0.358	0.801	0.976	0.999	1.000
P	0.059	0.295	0.707	0.939	0.995	1.000	0.051	0.271	0.618	0.916	0.985	1.000	0.045	0.361	0.854	0.992	1.000	1.000
	정규분포						정규분포						정규분포					
A	0.052	0.264	0.667	0.907	0.997	0.999	0.054	0.235	0.588	0.854	0.978	0.999	0.054	0.340	0.795	0.983	0.998	1.000
P	0.048	0.292	0.701	0.940	0.998	1.000	0.058	0.248	0.612	0.381	0.987	0.999	0.053	0.353	0.834	0.990	1.000	1.000
	코시분포						코시분포						코시분포					
A	0.043	0.268	0.631	0.879	0.971	0.997	0.058	0.236	0.567	0.843	0.961	0.994	0.062	0.361	0.815	0.956	0.994	1.000
P	0.053	0.061	0.133	0.175	0.215	0.290	0.057	0.093	0.121	0.151	0.199	0.260	0.061	0.098	0.133	0.201	0.273	0.361
	이중지수분포						이중지수분포						이중지수분포					
A	0.047	0.356	0.791	0.977	0.997	1.000	0.041	0.309	0.744	0.943	0.998	1.000	0.047	0.442	0.921	0.997	1.000	1.000
P	0.051	0.290	0.704	0.953	0.991	1.000	0.045	0.257	0.658	0.896	0.987	0.999	0.055	0.374	0.850	0.988	1.000	1.000
	오염정규분포						오염정규분포						오염정규분포					
A	0.052	0.341	0.777	0.972	1.000	1.000	0.045	0.286	0.705	0.956	0.995	0.999	0.041	0.446	0.909	0.996	1.000	1.000
P	0.056	0.290	0.698	0.938	0.998	1.000	0.047	0.245	0.635	0.905	0.986	0.998	0.050	0.406	0.826	0.983	0.998	1.000

표 3. 실험검정력 (경우 3)

통계량	p = 2						p = 3						p = 4					
	δ=0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	균등분포						균등분포						균등분포					
A	0.055	0.319	0.731	0.953	1.000	1.000	0.062	0.251	0.575	0.854	0.972	0.999	0.050	0.334	0.745	0.964	0.998	1.000
P	0.059	0.337	0.793	0.980	1.000	1.000	0.062	0.267	0.638	0.906	0.992	1.000	0.038	0.357	0.798	0.985	1.000	1.000
	정규분포						정규분포						정규분포					
A	0.046	0.317	0.756	0.968	0.999	1.000	0.050	0.241	0.573	0.874	0.979	1.000	0.045	0.308	0.759	0.970	0.999	1.000
P	0.049	0.341	0.790	0.975	0.999	1.000	0.046	0.249	0.605	0.902	0.985	1.000	0.047	0.339	0.790	0.984	0.999	1.000
	코시분포						코시분포						코시분포					
A	0.041	0.305	0.772	0.952	0.993	0.998	0.055	0.244	0.582	0.834	0.955	0.990	0.049	0.333	0.741	0.949	0.997	0.999
P	0.048	0.082	0.149	0.214	0.269	0.358	0.063	0.078	0.124	0.152	0.198	0.247	0.059	0.100	0.125	0.190	0.276	0.353
	이중지수분포						이중지수분포						이중지수분포					
A	0.048	0.415	0.867	0.994	1.000	1.000	0.050	0.304	0.734	0.949	0.995	1.000	0.044	0.425	0.889	0.997	1.000	1.000
P	0.044	0.334	0.800	0.982	1.000	1.000	0.046	0.261	0.639	0.913	0.991	1.000	0.043	0.331	0.813	0.983	1.000	1.000
	오염정규분포						오염정규분포						오염정규분포					
A	0.047	0.399	0.871	0.995	1.000	1.000	0.043	0.284	0.695	0.944	0.996	1.000	0.044	0.409	0.870	0.996	1.000	1.000
P	0.048	0.348	0.793	0.982	0.998	1.000	0.051	0.257	0.602	0.897	0.986	0.997	0.046	0.360	0.799	0.986	1.000	1.000

표 4. 실험검정력 (경우 4)

통계량	p = 2						p = 3						p = 4					
	δ=0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	균등분포						균등분포						균등분포					
A	0.045	0.082	0.156	0.260	0.325	0.483	0.057	0.145	0.328	0.558	0.723	0.902	0.045	0.098	0.191	0.227	0.354	0.437
P	0.077	0.125	0.228	0.369	0.472	0.647	0.075	0.191	0.412	0.670	0.851	0.962	0.058	0.141	0.252	0.334	0.465	0.609
	정규분포						정규분포						정규분포					
A	0.052	0.094	0.164	0.271	0.377	0.495	0.047	0.126	0.333	0.586	0.763	0.900	0.048	0.085	0.165	0.262	0.395	0.486
P	0.076	0.157	0.247	0.383	0.522	0.644	0.066	0.191	0.417	0.683	0.838	0.957	0.077	0.129	0.241	0.367	0.524	0.633
	코시분포						코시분포						코시분포					
A	0.049	0.099	0.155	0.252	0.340	0.439	0.049	0.154	0.357	0.544	0.723	0.843	0.055	0.089	0.168	0.242	0.337	0.436
P	0.071	0.090	0.103	0.135	0.154	0.202	0.069	0.082	0.155	0.181	0.244	0.302	0.076	0.100	0.112	0.129	0.171	0.191
	이중지수분포						이중지수분포						이중지수분포					
A	0.047	0.120	0.202	0.314	0.451	0.610	0.053	0.198	0.446	0.689	0.868	0.966	0.044	0.112	0.199	0.345	0.459	0.600
P	0.069	0.155	0.241	0.343	0.512	0.673	0.060	0.255	0.454	0.656	0.838	0.958	0.066	0.148	0.223	0.379	0.526	0.673
	오염정규분포						오염정규분포						오염정규분포					
A	0.058	0.118	0.206	0.315	0.438	0.600	0.053	0.198	0.432	0.698	0.869	0.971	0.049	0.110	0.209	0.319	0.458	0.600
P	0.077	0.151	0.259	0.359	0.523	0.662	0.087	0.205	0.454	0.687	0.857	0.954	0.067	0.145	0.257	0.382	0.518	0.670

표 5. 실험검정력 (경우 5)

통계량	p = 2						p = 3						p = 4					
	δ=0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	균등분포						균등분포						균등분포					
A	0.077	0.150	0.292	0.393	0.503	0.657	0.040	0.135	0.341	0.560	0.754	0.908	0.045	0.121	0.148	0.225	0.306	0.394
P	0.080	0.149	0.306	0.454	0.570	0.737	0.073	0.199	0.481	0.680	0.874	0.965	0.059	0.154	0.219	0.327	0.423	0.571
	정규분포						정규분포						정규분포					
A	0.078	0.153	0.251	0.414	0.555	0.701	0.039	0.121	0.330	0.585	0.815	0.919	0.045	0.086	0.177	0.247	0.330	0.413
P	0.083	0.162	0.258	0.445	0.618	0.772	0.079	0.184	0.439	0.692	0.882	0.964	0.065	0.118	0.237	0.345	0.459	0.554
	코시분포						코시분포						코시분포					
A	0.083	0.160	0.286	0.382	0.556	0.625	0.046	0.150	0.346	0.572	0.744	0.812	0.055	0.104	0.144	0.245	0.280	0.402
P	0.080	0.102	0.126	0.149	0.193	0.222	0.081	0.110	0.152	0.209	0.259	0.310	0.086	0.101	0.106	0.136	0.177	0.188
	이중지수분포						이중지수분포						이중지수분포					
A	0.070	0.176	0.326	0.504	0.650	0.773	0.053	0.190	0.435	0.675	0.889	0.957	0.054	0.105	0.186	0.291	0.394	0.515
P	0.085	0.169	0.294	0.444	0.612	0.740	0.077	0.210	0.453	0.698	0.870	0.944	0.066	0.123	0.233	0.322	0.455	0.570
	오염정규분포						오염정규분포						오염정규분포					
A	0.085	0.181	0.317	0.493	0.679	0.803	0.057	0.178	0.438	0.698	0.897	0.979	0.045	0.092	0.196	0.290	0.398	0.533
P	0.104	0.165	0.309	0.455	0.636	0.777	0.073	0.195	0.474	0.721	0.881	0.962	0.068	0.115	0.227	0.358	0.466	0.590

표 6. 실험검정력 (경우 6)

통계량	p = 2						p = 3						p = 4					
	δ=0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	균등분포						균등분포						균등분포					
A	0.063	0.223	0.397	0.636	0.825	0.936	0.058	0.249	0.607	0.904	0.989	1.000	0.032	0.090	0.176	0.339	0.520	0.688
P	0.056	0.206	0.379	0.657	0.865	0.959	0.067	0.277	0.652	0.939	0.997	1.000	0.051	0.134	0.269	0.456	0.690	0.831
	정규분포						정규분포						정규분포					
A	0.063	0.202	0.396	0.638	0.839	0.948	0.051	0.280	0.618	0.890	0.990	1.000	0.037	0.100	0.183	0.331	0.530	0.697
P	0.058	0.206	0.375	0.644	0.859	0.953	0.055	0.298	0.660	0.918	0.996	1.000	0.062	0.151	0.268	0.450	0.667	0.834
	코시분포						코시분포						코시분포					
A	0.064	0.187	0.422	0.633	0.792	0.890	0.480	0.256	0.615	0.860	0.962	0.995	0.032	0.114	0.195	0.317	0.491	0.648
P	0.058	0.072	0.108	0.129	0.134	0.163	0.070	0.085	0.114	0.148	0.198	0.260	0.047	0.075	0.080	0.096	0.103	0.156
	이중지수분포						이중지수분포						이중지수분포					
A	0.070	0.240	0.479	0.771	0.920	0.985	0.054	0.324	0.739	0.952	0.998	1.000	0.028	0.125	0.261	0.442	0.665	0.819
P	0.063	0.172	0.378	0.645	0.856	0.954	0.062	0.274	0.653	0.910	0.987	0.999	0.052	0.135	0.274	0.472	0.665	0.815
	오염정규분포						오염정규분포						오염정규분포					
A	0.063	0.237	0.507	0.771	0.918	0.977	0.043	0.301	0.735	0.965	0.996	1.000	0.039	0.109	0.284	0.441	0.661	0.802
P	0.056	0.205	0.411	0.650	0.857	0.950	0.065	0.285	0.670	0.912	0.988	0.998	0.060	0.136	0.306	0.445	0.665	0.812

표 7. 실험검정력 (p=3)

통계량	경우 7						경우 8						경우 9					
	δ=0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	균등분포						균등분포						균등분포					
A	0.048	0.102	0.239	0.354	0.503	0.640	0.055	0.099	0.184	0.315	0.441	0.525	0.053	0.115	0.213	0.348	0.524	0.685
P	0.062	0.134	0.289	0.434	0.604	0.748	0.072	0.133	0.222	0.401	0.531	0.654	0.062	0.137	0.264	0.410	0.626	0.776
	정규분포						정규분포						정규분포					
A	0.056	0.134	0.224	0.344	0.521	0.682	0.045	0.102	0.187	0.289	0.473	0.598	0.049	0.110	0.235	0.372	0.554	0.737
P	0.069	0.151	0.283	0.416	0.610	0.767	0.060	0.129	0.237	0.350	0.577	0.686	0.056	0.137	0.283	0.431	0.628	0.792
	코시분포						코시분포						코시분포					
A	0.046	0.115	0.196	0.365	0.466	0.634	0.060	0.122	0.197	0.331	0.434	0.567	0.046	0.122	0.229	0.396	0.524	0.624
P	0.067	0.100	0.108	0.174	0.203	0.274	0.066	0.094	0.115	0.182	0.202	0.238	0.060	0.093	0.123	0.148	0.196	0.224
	이중지수분포						이중지수분포						이중지수분포					
A	0.037	0.137	0.269	0.433	0.626	0.815	0.051	0.123	0.262	0.423	0.552	0.728	0.046	0.120	0.287	0.489	0.698	0.817
P	0.056	0.158	0.297	0.447	0.627	0.794	0.064	0.133	0.276	0.419	0.568	0.714	0.062	0.149	0.284	0.446	0.667	0.773
	오염정규분포						오염정규분포						오염정규분포					
A	0.050	0.137	0.276	0.467	0.646	0.810	0.057	0.119	0.219	0.418	0.577	0.730	0.041	0.131	0.263	0.482	0.653	0.841
P	0.066	0.169	0.310	0.475	0.660	0.793	0.080	0.123	0.250	0.444	0.586	0.727	0.047	0.132	0.292	0.486	0.622	0.813

참 고 문 헌

[1] Archambault, W.A.T., Mack, G.A. and Wolfe, D.A.(1977), "K-Sample Rank Tests Using Pair-Specific Scoring Function", *Canadian Journal of Statistics*, 5, 195-207.

[2] Hettmansperger, T.P.(1984). *Statistical Inference Based on Ranks*, John Wiley and Son, Inc.

[3] Hettmansperger, T.P. and Norton, R.M.(1987), "Test for Patterned Alternatives in K-Sample Problems", *Journal of the American Statistical Association*, 82(397), 292-299.

[4] Jonckheere, A.P.(1954), "A Distribution-Free K-Sample Against Ordered Alternatives", *Biometrika*, 41, 133-145.

[5] Kim, D.H., Song, M.S. and Kim, W.C.(1986), "A Distribution-Free Rank Test for Ordered Alternatives in a Randomized Block Design", *Journal of the Korean Statistical Society*, 15(1), 9-25.

[6] Mack, G.A. and Wolfe, D.A.(1981), "K-Sample Tests for Umbrella Alternatives", *Journal of the American Statistical Association*, 76, 175-181.

[7] Noether, G.E.(1955), "On a Theorem of Pitman", *Annals of Mathematical Statistics*, 26, 64-68.

[8] Puri, M.L.(1965), "Some Distribution-Free K-Sample Rank Tests of Homogeneity Against Ordered Alternatives", *Communications on pure and applied mathematics*, 18, 51-63.

[9] Guade, D.(1984), "Nonparametric Methods in Two-Way Layouts", in P.R. Krishnaiah and P.K. Sen(eds) *Handbook of Statistics*, 4, Elsevier Science Publishers, 185-228.

[10] Randles, R.H. and Wolfe, D.A.(1979), *Introduction to the Theory of Nonparametric Statistics*, John Wiley and Son, Inc.

[11] Shi, N.Z.(1988a), "A Test of Homogeneity for Umbrella Alternatives and Tables of the Level Probabilities", *Communications in Statistics - Theory and Methodology*, 18(3), 657-670.

[12] Shi, N.Z.(1988b), "Rank Test Statistics for Umbrella Alternatives", *Communications in Statistics - Theory and Methodology*, 17(6), 2059-2073.

[13] Skillings, J.H. and Wolfe, D.A.(1978), "Distribution-Free Tests for Ordered Alternatives in a Randomized Block Design", *Journal of the American Statistical Association*, 73, 427-431.

On the Distribution-Free Tests for Umbrella Alternatives in a Randomized Block Design

Dong-Hee Kim* and Young-Cheol Kim*

ABSTRACT

Distribution-free test for umbrella alternatives in a randomized block design is proposed and asymptotic properties test statistics and the asymptotic relatives efficiency (ARE) of the proposed test statistics with respect to the Puri's parametric method are investigated.

For given peak points 2, 3, 4, with 4 blocks and 5 treatments, and with 3 blocks and 5 treatments ; for given peak point 3, with 2 blocks and 4 treatments ; from the small sample Monte Carlo Study, the empirical powers between the proposed test and Puri's test are compared. Throughout the simulation results, the proposed test statistic is efficient for the heavy tailed distributions.

* Department of Statistics, Pusan National University, Pusan 609-735, Korea