α-절단을 이용한 대화형 퍼지 다목적 의사결정

- Interactive Fuzzy Multiobjective Decision-Making using α-Cut -

洪 性 一 *

李 相 玩 **

ABSTRACT

MODM(multiobjective decision-making)problem is very complex system for the analysist and decision maker. Therefore, it requires suitable MODM method to solve multiobjective decision-making problem. This paper presents an interactive fuzzy decision making method for solving multiobjective nonlinear programming problems with fuzzy goals and α-cut set of fuzzy numbers. In our interactive method, if the decision maker specifies the degree α of the objective value and the imprecise goals, λ-max problem is solved. To examplify the proposed method, an interactive computer programming written in FORTRAN and an illustrate numerical example along with computer outputs are presented.

1. 서 론

오늘날 의사결정문제들은 주어진 제약 조건하에서 다수의 상충된(Conflict) 목적함수를 동시에 최적화하려고 하는 다목적 의사결정문제(Multiobjecive decision making problem)가 대부분이다. 다목적 의사결정문제에서 다수의 목적함수를 동시에 최적화하는 완전한 최적해는 일반적으로 존재하지 않으므로 어떤 목적함수의 개선을 위해서는 적어도 다른 한개의 목적함수값을 희생시켜야만 얻을 수 있는 해인 파레토 최적해(Pareto optimal solution) 집합 중에서 최종적이고 합리적인 만족해(Satisficing solution)를 의사결정자는 선택해야만 된다.

그런데 의사결정자의 전체 선호구조를 잘 반영시키는 적당한 총괄선호함수(Aggregation preference function)를 현실적으로 확인하기 어렵기 때문에 선호함수를 전체적으로 같이 정하지 않고, 대화에 따라 얻어지는 국부적인 선호정보에 근거해서 의사결정자의 만족해를 도출하는 대화형수법이 많이 제안되어져 왔다.

최근에 Sakawa등은 대화형 접근과 5가지 구성함수, 즉 선형(Linear)구성함수, 지수(Exponential)구성함수,쌍곡선(Hyperbolic)구성함수, 역쌍곡선(Hyperbolic inverse)구성함수, 부분선형(Piecewise linear)구성함수와 α-절단(α-cut), 이분법(Bisection method), 최대최소(Minimax)개념에 기초를 두고 의사결정자가 모호한 목표를 가지고 의사결정분석자가 모수에 대하여 모호한 가능값을 가질때 DM의 만족해를 결정하는 대화형 선형분수계획법[9], 퍼지모수를 가지는 대화형 다목적 선형분수계획법[15] ,퍼지모수를 가지는 대화형 다목적 선형계획법[14], 대화형 다목적 비선형계획법[11]들을 제시하였다.

그는 이들 논문에서 전통적인 퍼지 접근에서 사용하는 최소연산자는 의사결정자가 최소연산자가 적당하고 느낄때 만이 선호될 수 있다는 한정과 의사결정자의 퍼지 선호를 잘 나타내는 적당한 총괄함수(Aggregation function)를 현실적으로 확인하기 어렵기 때문에 대안적으로 대화적 접근을 사용한다는 점을 강조하였고 의사결정자가 α와 희망구성값(Reference membership value)또는 희망목표값을 명시하면 (확장된) 최대최소 문제를 해결하여 의사결정자의 만족해를 결정한다고 언급했다.

만족해 결정 과정에서 의사결정자에게 목적함수값 사이의 상반율(Trade-off rate)과 α와 목적함수값 사이의 상반율, 그리고 M-α-pareto 최적해를 제공함으로써 현재의 해의 만족정도를 의사결정자가 쉽게 결정할 수 있도록 하였다.

---

* 경북산업대학교 공과대학 산업공학과

** 동아대학교 공과대학 산업공학과

접수 : 1992. 9. 28.

확정 : 1992. 10. 9.

그러나 이 논문들은 의사결정자가 각 반복마다 새로운 α값 또는 목적함수값을 계속적으로 제공해야 한다는 점과 실제 의사결정자가 각 상반율의 의미를 정확하게 파악하기 어렵다는 문제, 그리고 각각의 목적함수 또는 구성함수에 대한 선호구성함수를 선택한 후 전체적으로 혼합하지 못함으로서 의사결정자가 목적함수들에 대하여 느끼는 전체정보를 반영하지 못한다는 단점을 가진다.

이에 본 연구에서는 이러한 단점을 개선하기 위하여 각 목적함수들에 대한 목표들을 퍼지언어변수(Fuzzy linguistic variable)로 나타내고 목표값의 편차범위를 의사결정자가 각 목적함수에 대하여 선택한 구성함수의 확신정도인 α값만 나타내면 의사결정자의 전반적인 선호정보를 충분히 반영하는 만족해를 이끌 수 있는 새로운 대화형 퍼지 다목적 의사결정법을 제시한다.

제시된 의사결정법은 의사결정자가 각 목적함수에 대하여 선정한 구성함수를 동시에 조합하므로 전체 선호 정보를 잘 반영할 수 있고 α값을 각 목적함수에 대하여 나타냄으로서 편차범위를 쉽게 얻을 수 있음과 동시에 각 목적함수의 중요도를 반영할 수 있으며 대화과정이 단순하고 파레토 최적성이 보장된다는 장점이 있다. 제시된 방법에 기초를 두고 대화형 의사결정에 대한 수치예가 수행결과와 함께 주어진다.

2. α - 대화형 퍼지 다목적 의사결정기법

일반적으로 다목적 비선형계획문제(Multiobjective nonlinear programming problem : MONLP)는 다음의 벡터 최소화문제와 같이 정식화 된다.

$$\min_{x} f(x) \triangleq (f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_k(x)) \tag{1}$$

subject to

$$x \in X = \{x \mid x \in E^n,\ g_j(x) \le 0,\ j = 1, \cdots, m\} \tag{2}$$

여기서 x : N차원의 의사결정변수 벡터

$f_1(x), \cdots, f_k(x)$: 결정변수벡터 x의 k개의 목적함수

$g_1(x), \cdots, g_m(x)$: m개의 부등제약식

X : 제약조건집합의 실행가능한해

모든 $f_k(x)$는 미분가능이고 볼록(convex)이며 X 또한 볼록이라 가정된다.

다목적 비선형계획문제의 근본은 비 열등해(non-inferior solution)로 알려진 파레토(Pareto)최적 개념이다. 정성적으로 다목적 비선형계획문제의 파레토 최적해는 하나의 목적함수값의 개선은 단지 다른 목적함수값의 손실에 의해서만 얻어질 수 있는 것이다. 일반적으로 파레토 최적해는 무한점으로 구성되어 있고 의사결정자는 파레토 최적해 중에서 그가 선호하는 해를 선택해야만 한다. 수학적으로 다목적 비선형계획문제에 대한 파레토 최적해의 이론적인 정의는 다음과 같다.

Definition 1. 만약 최소한 하나의 i에 대하여 $f_i(x) \le f_i(x^*)$가 성립되는 $x \in X$가 존재하지 않는다면 $x \in X^*$는 다목적 비선형계획문제의 파레토 최적해라 한다.

정의 1을 2목적함수에 대하여 도시하면 파레토 최적집합은 그림 1의 굵은 선으로 나타내어 진다.

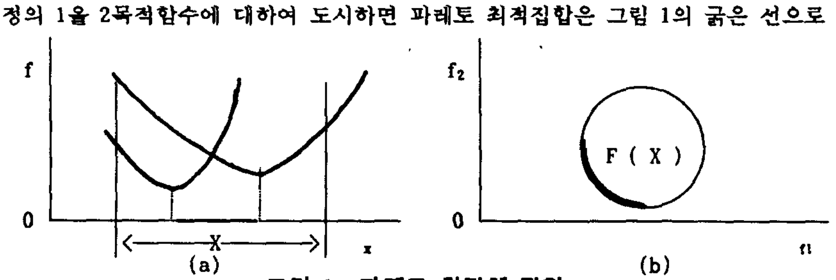

그림 1. 파레토 최적해 집합

각 목적함수 $f_k(x)$에 대하여 의사결정자로 부터 구성함수(membership function) $\mu(f_k(x))$의 상,하한값을 이끌어내기 위하여 먼저 주어진 제약조건 하에서 각 목적함수 $f_k(x)$의 최소값 f_k^{min}과 최대값 f_k^{max}를 계산한다.

계산된 각 목적함수의 최대, 최소값을 고려하여 의사결정자는 각 목적함수에 대하여 $f_k(x)$는 "a_i 근처

에 있어야 한다." 또는 "거의 a_i값이면 좋겠다."라고 하는 것과 같은 퍼지언어변수로 표현된 목표들과 α_k값을 명시한다. α_k는 의사결정자가 선택한 구성함수의 확신정도를 나타내는 값으로 목표값의 편차범위와 중요도를 이 값으로 부터 이끌어 낼 수 있다.

퍼지언어변수로 지정된 각 목적함수의 목표 a_i는 퍼지수(fuzzy number) $\tilde{a}_i$로 설명될 수 있다. 퍼지수들은 Dubois와 Prade[4]에 의하여 도입되는 퍼지수로 특성지워진다고 가정한다.

Definition 2. (α - 절단집합)

퍼지수 $\tilde{a_i}$의 α - 절단집합은 수준 α를 초과하는 구성함수의 정도를 가진 보통집합(ordinary set) $L\alpha(\tilde{a}_i)$로 정의 된다.

$L\alpha(\tilde{a}_i)=\{(a_i) \mid \mu\tilde{a}_i(a_i) \geq \alpha\ ,\ i=1,\cdots\cdots k\}$

α - 절단집합들은 다음의 특성을 가진다.

$\alpha_1 \leq \alpha_2$ 이면 $L\alpha_1(\tilde{a_i}) \supset L\alpha_2(\tilde{a}_i)$

각 목표에 대한 좌,우 구성함수와 α_k 값을 결정함에 있어 의사결정자는 다음과 같은 5가지 구성함수 형태로 부터 목적함수의 중요성과 성취 가능성, 그리고 구성의 증가율을 고려하여 주관적인 방법에서 자신의 구성함수 $\mu(f_k(x))$와 α_k를 선택할 수 있다. 여기서 쌍곡선 구성함수를 제외한 다른 모든 구성함수는 만일 $f_k(x) < f_k^L$, $f_k(x) > f_k^R$(f_k^L:목적함수 $f_k(x)$의 목표에 대한 목표를 받아들일 수 있는 최소수준, fk^R:목적함수 $f_k(x)$의 목표에 대한 목표를 받아들일 수 있는 최대 수준)이면 $\mu(f_k(x)) = 0$ 이고 $f_k(x) = f_k^1$ (f_k^1:목적함수 $f_k(x)$의 목표에 대하여 최대만족수준)이면 $\mu(f_k(x)) = 1$ 이다. 그리고 f_k^a는 구성함수 $\mu(f_k(x))$의 확신정도가 a인 $f_k(x)$의 값이다.

○ 선형 구성함수

왼쪽 : $\mu(f_k(x)) = (f_k(x) - f\alpha^L) \ /\ (f_k^1 - f\alpha^L)$ (3)

오른쪽 : $\mu(f_k(x)) = (f\alpha^R - f_k(x)) \ /\ (f\alpha^R - f_k^1)$ (4)

여기서 $f\alpha^L$: α절단된 $f_k(x)$의 좌측값

$f\alpha^R$: α절단된 $f_k(x)$의 우측값

의사결정자는 f_k^{max} 와 f_k^{min}값 내에서 f_k^L, f_k^R, α_k의 값을 명시한다.

○ 지수 구성함수

왼쪽 : $\mu(f_k(x)) = a_i[1 - \exp\{-b_i(f_k(x) - f\alpha^L) \ /\ (f_k^1 - f\alpha^L)\}]$ (5)

오른쪽 : $\mu(f_k(x)) = a_i[1 - \exp\{-b_i(f\alpha^R - f_k(x)) \ /\ (f\alpha^R - f_k^1)\}]$ (6)

단, $a_i > 0$, $b_i > 0$ 또는 $a_i < 0$, $b_i < 0$

의사결정자는 f_k^{max} 와 f_k^{min}값 내에서 f_k^L, f_k^R, $f_k^{0.5}$, f_k^1, α_k의 값을 명시한다.

○ 쌍곡선 구성함수

왼쪽 : $\mu(f_k(x)) = ½ \tanh((f_k(x) - b_i)a_i) + ½$ (단, $a_i > 0$) (7)

오른쪽 : $\mu(f_k(x)) = ½ \tanh((f_k(x) - b_i)a_i) + ½$ (단, $a_i < 0$) (8)

의사결정자는 f_k^{max} 와 f_k^{min}값 내에서 $f_k^{0.25}$, $f_k^{0.5}$, α_k의 값을 명시한다.

○ 역쌍곡선 구성함수

왼쪽 : $\mu(f_k(x)) = a_i \tanh^{-1}((f_k(x) - b_i)a_i) + ½$ (단, $a_i>0$, $\alpha_i>0$) (9)

오른쪽 : $\mu(f_k(x)) = a_i \tanh^{-1}((f_k(x) - b_i)a_i) + ½$ (단, $a_i>0$, $\alpha_i<0$) (10)

여기서 $|(f_k(x) - b_i)a_i| < 1$

의사결정자는 f_k^{max} 와 f_k^{min}값 내에서 f_k^L, f_k^R, $f_k^{0.25}$, $f_k^{0.5}$, α_k의 값을 명시한다.

○ 부분선형 구성 함수

왼쪽 : $\mu(f_k(x)) = t_{ir}f_k(x) + S_{ir},\ g_{ir-1} \le f(x) \le g_{ir}$ (단, $t_{ir}>0$) (11)

오른쪽 : $\mu(f_k(x)) = t_{ir}f_k(x) + S_{ir},\ g_{ir-1} \le f(x) \le g_{ir}$(단, $t_{ir}<0$) (12)

여기서 t_{ir}은 기울기이고 S_{ir}은 시점 g_{ir-1} 과 g_{ir}의 곡선을 두점으로나누는 역할을한다. 그리고 의사 결정자는 f_k^{max} 와 f_k^{min} 내에서 몇개의 f_k^*값과 α_k를 명시한다.

의사결정자가 원하는 확신 정도의 증가율에 따라 각 목적함수 $f_k(x)$에 대하여 의사결정자와의 대화로서 구성함수 $\mu(f_k(x))$값을 이끌어 낸다.

각 목적함수에 대하여 선택된 구성함수 $\mu(f_k(x))$와 α_k 는 전체 선호정보를 동시에 반영시키지 못하므로 다음과 같은 퍼지 다목적 비선형 계획문제를 해결함으로써 주어진 α_k 하에서 목적함수들의 목표를 모두 다 만족하는 최대 구성정도를 이끌 수 있다.

$$\max_{x\in X} \lambda \tag{13}$$

subject to

$$\lambda \le [\mu_i(f_k(x))]^c \tag{14}$$

여기서 $[\mu_i(f_k(x))]^c$는 α- 절단된 각 목적함수에 대한 구성함수를 조합한 집합

이상의 설명을 기초로 하여 각 목적함수들의 목표가 모호하고 확신정도 α_k 가 지정되는 경우 비선형 다목적 문제를 해결하는 알고리즘을 다음과 같이 구축한다.

단계 1) 목적함수와 제약식을 정식화 한다.

단계 2) 각 목적함수의 최대값 f_k^{max} 와 최소값 f_k^{min}을 산출한다.

단계 3) 의사결정자가 희망하는 목표값과 각 목적함수값에 대한 α_k 값을 명시한다.

단계 4) 각 목적함수의 최대, 최소값과 의사결정자가 만족하는 구성정도의 증가율을 고려하여 의사결정자는 왼쪽과 오른쪽 각각의 구성함수 형태와 그에 대응하는 평가치를 설정한다.

단계 5) 의사결정자에 의해서 결정된 구성함수 형태와 평가치를 이용하여 α_k 값에 상응하는 목적함수값을 계산하고 이를 편차범위로 사용한다.

단계 6) 각 목적함수에 대한 구성함수를 조합하여 최대 구성정도를 구하고 의사결정자에게 만족 변수값과 목적함수값을 제공한다.

단계 8) 의사결정자가 현재의 만족 변수값과 목적함수값, 그리고 α_k 를 만족하면 끝내고 그렇지 않으면 단계 3으로 간다.

3. 예제

각 목적 함수와 제약식들이 다음과 같이 정식화 된다고 가정하자.

$$\min f_1(X) = (X_1+2)^2 + (X_2-5)^2 + X_3^2$$
$$\min f_2(X) = X_1^2 + 4X_2^2 + 10X_3^2$$
$$\min f_3(X) = 2X_1^2 + 3(X_2+2)^2 + X_3^2$$

subject to

$$5 \le X_i \le 20 \qquad (i=1,2,3)$$
$$100 \le X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \le 800$$

먼저 각 목적함수의 최대값과 최소값을 구한다.

$f_1^{min} = 78.2893$ $\quad f_1^{max} = 859$

$f_2^{min} = 400.000$ $\quad f_2^{max} = 5525$

$f_3^{min} = 247$ $\quad f_3^{max} = 2227$

각 목적함수의 최대, 최소값으로부터 의사결정자는 각 목적 함수의 희망 목표값, 구성함수 그리고 구성함수의 평가치를 표 1과 같이 선택했다고 가정한다.

표 1. 선택된 좌,우측 구성함수와 평가치

구성 함수 / 목적 함수	형 태		평 가 치	
	좌 측	우 측	좌 측	우 측
$f_1(x)$	선형	지수형	$(f_1^L,\ f_1^1)=(100,\ 500)$	$(f_1^R,\ f_1^{0.5},\ f_1^1)$ $=(850,\ 700,\ 500)$
$f_2(x)$	지수형	쌍곡선형	$(f_2^L,\ f_2^{0.5},\ f_2^1)$ $=(1000,\ 1500,\ 3000)$	$(f_2^R,\ f_2^{0.25},\ f_2^{0.5})$ $=(5000,\ 4200,\ 3800)$
$f_3(x)$	지수형	선형	$(f_3^L,\ f_3^{0.5},\ f_3^1)$ $=(300,\ 800,\ 1200)$	$(f_3^R,\ f_3^1)$ $=(2000,\ 1200)$

표 1값을 근거로 의사결정자는 자신의 확신정도 α_k를 지정한다. 지정된 α_k를 이용하여 계산된 $f\alpha^L$과 $f\alpha^R$이 표 2와 같다고 하자.

표 2. α값에 의한 목적함수 값

α / 목적함수	α		목 적 함 수 값	
	좌 측	우 측	$f\alpha^L$	$f\alpha^R$
$f_1(x)$	0.583	0.554	333.2	681.3416
$f_2(x)$	0.627	0.598	1696.6963	3658.1648
$f_3(x)$	0.602	0.574	888.2627	1540.8

표 2에서 좌측편차 범위는 $(f_k^1 - f\alpha^L)$이고 우측편차 범위는 $(f\alpha^R - f_k^1)$이 된다.
이 정보를 구성함수 형태로 재 정식화하면 다음과 같이 된다.

$$\mu(f_1(X)) \begin{cases} (f_1(X)-333.2)/166.8 \quad \text{만약 } 333.2 \le f_1(X) \le 500 & (15) \\ 2.2741\ (1-\mathrm{EXP}(-0.5794((681.3416-f_1(X))/181.3416))) & (16) \\ \qquad \text{만약 } 500 \le f_1(x) \le 681.3416 & \end{cases}$$

$$\mu(f_2(X)) \begin{cases} 1.0958(1-\mathrm{EXP}(-2.4374((f_2(X)-1696.6963)/1303.3037))) & (17) \\ \qquad \text{만약 } 1696.6963 \le f_2(x) \le 3000 & \\ 1/2\ \tan h((f_2(X)-3658.1648)*0.0014)+0.5 & (18) \\ \qquad \text{만약 } 3000 \le f_2(X) \le 3658.1648 & \end{cases}$$

$$\mu(f_3(X)) \begin{cases} -0.7686(1-\mathrm{EXP}(0.4482(f_3(X)-888.2627)/311.7373))) & (19) \\ \qquad \text{만약 } 888.2627 \le f_3(x) \le 1200 & \\ (1540.8-f_3(x))/340.8 \quad \text{만약 } 1200 \le f_3(X) \le 1540.8 & (20) \end{cases}$$

식 (15),(16),(17), (18), (19), (20)에서 주어진 구성함수에서 의사 결정자의 만족값은 의사결정 집

합의 가장 높은 구성정도를 가지는 조합을 찾는 것이다. 구성함수의 좌,우측 형태와 α_k값이 다르기 때문에 이 문제는 8가지의 조합된 문제를 비선형 계획문제로 해결하는 것과 동일하다.

8가지의 각 조합에 대하여 계산해본 결과 구성정도가 가장 높은 값은 λ=1 이였고 그때의 만족 의사결정 변수값은 X_1=12.8938, X_2=12.7047, X_3=14.7922 으로 나타났다.

4. 결 론

대부분의 다목적 비선형 계획 문제에서 다목적 함수들은 같은 중요도가 아니고 단일 목적으로 합쳐질 수 도 없다. 또한 그 목적들은 종종 상충되기 때문에 주관적인 방법에 기초를 두고 의사결정자의 만족해를 찾아야 한다. 결국 의사결정자의 만족해를 찾기 위하여 의사결정자의 가치판단 분석이 선행되어야 하고 이것이 만족해 산출과정에 충분히 반영되어야 한다.

본 논문에서는 대화형 다목적 의사결정문제에서 의사결정자의 목표가 모호할 경우 이를 퍼지 언어변수로 처리하고 목표값의 편차범위를 의사결정자가 각 목적함수에 대하여 선택한 구성함수의 확신정도인 α값만 나타내면 의사결정자의 전반적인 선호정보를 충분히 반영하는 만족해를 이끌 수 있는 새로운 대화형 퍼지 다목적 의사결정법을 제시하였다.

본 논문에서 개발된 알고리즘은 α - 절단을 이용함으로써 각 목적함수의 상대적인 중요도와 의사결정자의 확신정도를 충분히 반영하는 만족해를 이끌어 낼 수 있다. 또한 선형과 비선형 다목적 계획문제에 공히 적용될 수 있고 대화과정이 간단하며 목적함수와 제약조건 그리고 구성함수가 바뀔 경우 프로그램 수정을 유연성있게 할 수 있기 때문에 다목적을 가지는 현실의 제반 시스템에 폭 넓은 응용이 가능하리라 기대된다.

참 고 문 헌

[1] 김 성희, 의사결정론, 영지문화사, 1988.

[2] Bellman, R. and Zadeh, L.A., "Decision Making in a Fuzzy Environment", *Management Science*, Vol.17, No.4, pp.141-164, 1970.

[3] Chankong, V. and Haimes, Y.Y., *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology*, North-Holland, New York, 1983.

[4] Dubois, D. and Prade, H., "Operations On Fuzzy Numbers", *International Journal of Systems Science*, Vol. 9, pp. 327-348, 1978.

[5] Dubois, D. and Prade, H., *Fuzzy Sets and Systems*, Academic Press, New York, 1979.

[6] Kaufmann, A., *Theory of Fuzzy Subsets*, Academic Press, New York, 1975.

[7] Lee, S.W. and Kim, J.R., "Interactive Multiobjective Decision Making under Fuzzy Environment", *Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, Vol. 13, No. 22, pp. 51-57, 1990.

[8] Narasimhan, R., "Goal Programming in a Fuzzy Environment", *Decision Sciences*, Vol.11, pp.325-336, 1980

[9] Sakawa, M., "An Interactive Fuzzy Satisficing Method For Multobjective Linear Fractional Programming Problems", *Fuzzy Sets and systems*, Vol. 28, pp. 129-144, 1988.

[10] Sakawa, M., "Interactive Computer Programs for Fuzzy Linear Programming with Multiple Objectives", *International J. Man-Machine Stud.*, Vol. 18, No.5, pp. 489-503, 1983.

[11] Sakawa, M. and Yano, H., "Interactive Fuzzy Decision Making For Multiobjective Nonlinear Programming Problems with Fuzzy Parameters", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 29, pp. 315-326, 1989.

[12] Sakawa, M., "Interactive Multiobjective Decision Making by the Sequential Proxy Optimization Technique: SPOT", *European Journal of Operational Research*, Vol. 9, pp. 386-396, 1982.

[13] Sakawa, M., "Interactive Multiobjective Decision Making by the Sequential Proxy Optimization Technique", *Times/studiesin the Management*, Vol.20, pp.241-260, 1984.

[14] Yano, H. and Sakawa, M., "An Interactive Fuzzy Satisficing Method For Generalized

Multiobjective Linear Programming Problems with Fuzzy Parameters", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 35, pp. 125-142, 1990.

[15] Yano, H. and Sakawa, M.,"Interactive Fuzzy Decision Making For Generalized Multiobjective Linear Fractional Programming Problems with Fuzzy Parameters", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 32, pp. 245-261, 1989.