확률적 수요를 가지는 2단계 재고 시스템
-Two Echelon Inventory System with Stochastic Demand-

최 규탁 *
김 정자 **

ABSTRACT

This paper presents a cost model of the system which is managed under a continuous review (Q,r) policy at each retailer and peridic review (R,T) policy at the central warehouse. An iterative procedure is performed to find the optimal or near-optimal' solution for the policy parameters at each retailers and a central warehouse in this study.

1. 서론

일반적으로 다단계 재고시스템(Multiechelon inventory system)은 둘 또는 그 이상의 서로 밀접한 관계가 있는 공급 또는 생산시설을 포함하는 여러 형태의 재고문제에 관계가 있다. 대부분의 실질적 재고문제들은 다단계적인 형태를 가지게 되므로, 단일설비(Single-facility)문제를 공급과 수요관계(supply-demand relationship)의 계층적 구조(hiarachical dimension)로 확장하여 연구되고 있다[4,5,17,18]. 다단계 분배시스템의 대부분의 확률적 재고모형(stochastic inventory models)들에서는 거의 (1) (S-1, S)정책을 사용한 낮은 수요품목을 위한 모형[12,22] (2) 독립적인 소매분배시스템을 위한 고객서비스 수준의 분석을 위한 모형[8,21] (3) 총시스템비용을 보다 최소화하는 시스템모수의 함수로서 기대 서비스수준의 추정을 위한 모형[18]들로 제한되어 있다. 또한 품절기간동안의 수요에 대한 문제는 최적재고정책을 결정함에 있어 대부분 크게 두가지 형태로 연구되어져 왔다. 하나는 품절이 발생했을 때 유실판매(lost sale)로 처리하는 경우[6,10]이고 다른 하나는 부재고(backorder)되는 경우[7,22]이다. 그러나 현실세계에서 수요가 포획성(captive)일 경우가 많으므로 품절기간중 수요의 일부만 부재고되고 나머지 미충족수요는 유실판매되는 경우가 발생할 수 있으며 이런 모형을 부분부재고모형이라한다.[11,14,19] 나아가서 부분 부재고모형에 관련된 비용중 부재고비용의 형태가 품절기간에 비례하여 발생되는 것이 일반적이다. [1, 15,16]

본 논문은 확률적인 수요하에서 하나의 시스템내에 중앙창고와 소매점들로 구분되는 두개의 부분모델(submodel)을 가지는 2단계 재고시스템모형을 도출하고, 소매점의 변동비용(주문비,재고유지비,부재고비용,유실판매 벌과비용)과 중앙창고의 변동비용(주문비,재고유지비,부재고비용)의 합을 최소로 하는 반복적 해법절차를 제시한다.

2. 모형

제안된 모형은 하나의 중앙창고(CW, centeral warehouse)에서 여러개의 소매점(retailer)으로 단일품목(single item)을 공급하는 2단계 재고시스템이다. 일반적으로 연속조사정책은 조달기간과 조사비용의 추정에 따른 오차에 민감하지않고, 매개변수들의 계산이 정기조사정책에 비해서 보다 쉽게 계산될 수 있는 장점을 가진다.[23] 그러므로 본 연구에서는 각 소매점들은 수요가 확률적인 상황하에서 연속조사정책(continuous review policy)(Q,r)을 따른다고 가정하고 각 소매점에서 만족되지 못한 수요중 일부는 부재고되고 나머지는 유실판매된다.

중앙창고에서는 소매점의 수요가 확률적이므로 塊狀需要(lumpy demand)를 가질수 있으므로 (Q,r)정책이 더 이상 바람직하지 않다.[3] 따라서 중앙창고의 재고정책은 정기조사정책(periodic review policy)(R,T)을 따른다고 가정한다. 만약 중앙창고가 소매점의 주문을 만족시킬 수 있는 재고를 가지고 있다면 지연(delay)없이 주문을 충족시키고 그렇지않으면 소매점의 주문은 부재고된다.

---

* 동아대학교 대학원 산업공학과
** 동아대학교 공과대학 산업공학과
접수 : 1992. 10. 20.
확정 : 1992. 11. 2.

본 연구에서 제시된 모델은 두개의 부분모델(submodel)로 구분되어있다. 중앙창고 부분모델과 소매점 부분모델을 하나의 시스템으로 연결시키는 변수는 중앙창고로 부터 주문이 도착할때까지의 지연시간, d(R)이다. 소매점들의 최적정책의 결정변수 Q_i 와 r_i 를 결정하는 반복적 알고리즘은 이 d(R)의 수치를 변화시켜 실행된다.

2.1 가정

1) 소매점 i의 수요는 정규분포를 하고 모든 다른 소매점의 수요와는 독립이다.
2) 중앙창고의 선행기간과 각 소매점의 정규선행기간은 일정하지만 반드시 같지는 않다.
3) 중앙창고의 선행기간과 조사간격 동안의 수요는 정규분포를한다. [18]
4) 중앙창고의 부재고는 현 보유재고(on hand inventory)에 비해 비교적 적다.
5) 중앙창고에서 어떤 소매점의 주문을 완전히 충족시킬 수 없다면 소매점 주문의 부분선적도 허용한다.
6) 각 소매점에서 하나이상의 주문잔고(미결주문)는 없다.
7) 정미재고(net inventory)를 근거로한 각 소매점의 재주문점은 양수이다.
8) 각 소매점의 부재고비용은 부재고의 시간에 비례한다.
9) 중앙창고와 소매점이 하나의 시스템을 구성하고 있으므로 중앙창고의 부재고에 대한 벌과비용은 부과하지 않는다.
10) 각 소매점들은 모두 중앙창고로부터 제품을 공급받는다.

2.2 기호 (Notation)

본 논문에서 사용된 기호는 다음과 같다.

N : 소매점수

D_i, S_i : 소매점 i의 연간 수요의 평균과 표준편차

D_o : 중앙창고의 연간 기대 수요

$$(D_o = \sum_{i=1}^{N} D_i)$$

R, T : 중앙창고의 목표재고와 조사간격

Q_i, r_i : 소매점 i의 주문량과 재주문점

l_o, l_i : 중앙창고의 고정된 선행 기간과 소매점 i의 정규선행 기간

$d(R)$: 중앙창고에서의 품질로 인한 각 소매점의 주문 주기당 기대 지연시간

L_i : 소매점 i의 기대실질선행기간 (expected effective lead time) ($L_i = l_i + d(R)$)

μ_o, σ_o : 중앙창고의 선행기간과 조사간격 동안의 수요의 평균과 표준편차

μ_i, σ_i : 소매점의 실질선행기간 수요의 평균과 표준편차

A_o, A_i : 중앙창고와 소매점 i의 주문비용

h_o, h_i : 중앙창고와 소매점 i의 단위당 연간 재고 유지비

π_i : 소매점 i의 단위당 연간 부재고 비용

P_i : 소매점 i의 유실이익을 포함한 유실판매 벌과비용

β_i : 소매점 i의 부재고 비율($0 \le \beta_i \le 1$)

$\bar{z}_0$: 제품 도착직전의 기대정미재고

$\bar{Z}_0$: 제품 도착직후의 기대정미재고

2.3 소매점 모형에 대한 분석(Retailer Analysis)

각 소매점 i에서 발생되는 연간 평균변동비를 도출하고 최적 정책변수 Q_i, r_i 를 결정한다. 그림1은 연속 재고 조사정책 (continuous review policy)을 따르는 소매점 i의 재고수준 변동을 표시하고 있다.

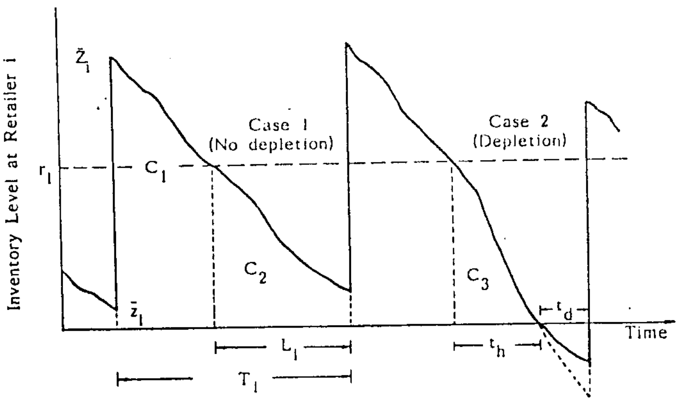

그림1 Behaviour of the inventory system at retailer i

소매점 i의 실질선행기간은 다음과 같다.

$$L_i = l_i + d(R) \tag{1}$$

소매점 i의 실질선행기간의 수요의 확률밀도함수가 $f_i(x_i)$인 정규분포에 따른다고 가정하면, 소매점 i의 실질선행기간 중의 수요의 평균과 표준편차는 다음과 같다.

$$\mu_i = L_i\ D_i \tag{2}$$

$$\sigma_i = \sqrt{(L_i)}\ S_i \tag{3}$$

x_i를 소매점 i의 실질선행기간의 수요라고 하면, 주기말 (end of cycle)의 기대 부족수요(expected demand short) $y(r_i)$는 다음과 같다.

$$\int_{r_i}^{\infty}(x_i - r_i)\ f_i(x_i)\ dx_i = y(r_i)$$

따라서 소매점 i의 주기당 기대 부재고량은 $\beta_i y(r_i)$가 되고 주기당 기대 유실판매량은 $(1 - \beta_i)y(r_i)$이 된다. 또한 소매점 i의 주기당 기대 총수요(expected total demand)는 $Q_i + (1-\beta)y(r_i)$ 이므로 기대 주기길이(expected cycle length)는 다음과 같다.

$$T_i = \frac{Q_i + (1 - \beta_i)y(r_i)}{D_i} \tag{4}$$

그러므로, 소매점 i에서의 연간 평균주문비(average annual ordering cost)는 다음과 같다.

$$\frac{A_i}{T_i} = \frac{A_i D_i}{Q_i + (1 - \beta_i)y(r_i)} \tag{5}$$

소매점 i의 현 보유기대재고 (expected on-hand inventory)는 재발주점에 도달하는 시간에 이르는 기간(period)과 실질선행기간, $L_i = l_i + d(R)$으로 구분하여 계산하면 다음과 같다. $\bar{z}_i$를 소매점 i의 조달품이 도착한 시점의 기대 정미재고(expected net inventory)라고 하면 실질선행기간의 기대 수요가 μ_i 이므로, 실질선행기간의 기대포획수요는 $\mu_i - (1 - \beta_i)y(r_i)$이 됨으로 $\bar{z}_i$는 $r_i - [\mu_i - (1-\beta_i)y(r_i)]$이 된다. 한편, 주문도착 직후의 기대 정미재고 $\bar{Z}_i$는 $z_i + Q_i$ 이므로 $Q_i + r_i - [\mu_i - (1-\beta_i)y(r_i)]$ 이된다.

그러므로 주문도착 직후 즉 $\bar{Z}_i$에서, 재발주점 r_i 에 이르는 재고 수준에 의한 기대시간은 $[Q_i+(1-\beta_i)y(r_i)] / D_i - L_i$ 이므로 기대보유재고는 그림1의 면적 C_1과 같다.

$$\frac{1}{2}\ ([Q_i + (1-\beta_i)y(r_i)] / D_i - L_i)(\bar{Z}_i + r_i)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{[Q_i + (1-\beta_i)y(r_i)]}{D_i} - \frac{\mu_i}{D_i}\right)\left(Q_i + r_i - [\mu_i - (1-\beta_i)y(r_i)] + r_i\right)$$

$$= [Q_i - \mu_i + (1-\beta_i)y(r_i)][Q_i + 2r_i - \mu_i + (1 - \beta_i)y(r_i)] / 2D_i \tag{6}$$

한편, 실질선행기간 중의 기대보유재고는 실질선행기간 동안에 품절이 발생하지 않는 경우($x_i \le r_i$)와 품절이 발생하는 경우 ($x_i > r_i$)로 구분하여 산출한다. 즉, 품절이 발생되지 않는다면 그림1에서 면적 C_2

의 기대값은 다음과 같고

$$\frac{L_i}{2}E\,[\,r_i + (r_i - x_i)\,] = \frac{L_i}{2}\int_0^{r_i}(2r_i - x_i)\,f_i(x_i)\,dx_i \tag{7}$$

품절이 발생된다면 기대보유재고는 그림1에서 면적 C_3와 같다. 양(positive)의 현보유재고를 가지는 선행기간 t_h는 r_iL_i/x_i 이므로 면적 C_3의 기대값은 다음과 같다.

$$\frac{r_i}{2}E[t_h] = r_i^2\,\frac{L_i}{2}\int_{r_i}^{\infty}\left(\frac{1}{x_i}\right)f(x_i)dx_i \tag{8}$$

그러므로 주기당 기대 보유재고는 식 (6),(7),(8)을 합함으로써 구해진다. 따라서 소매점 i에서 발생된 연간 평균재고유지비는 다음과 같다.

$$h_i\left[\frac{Q_i}{2} + \frac{1}{2}(1-\beta_i)y(r_i)+r_i-u_i\right] + \frac{h_iu_i}{2[Q_i+(1-\beta_i)\,y(r_i)]}\int_{r_i}^{\infty}\frac{(x_i-r_i)^2}{x_i}f_i(x_i)dx_i \tag{9}$$

주기당 기대 부족수요는 $(1-\beta_i)y(r_i)$이므로 연간 평균유실판매비용은 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{(1-\beta_i)y(r_i)P_i}{T_i} = \sum_{i=1}^{N}\frac{D_i(1-\beta_i)y(r_i)P_i}{Q_i + (1-\beta_i)y(r_i)} \tag{10}$$

또한 주기당 발생되는 품절시간 t_d 는 $L_i - t_h$ 이고 부재고되는 수요는 $\beta_i(x_i - r_i)$이므로 소매점 i의 시간가중 연간 평균부재고비용은 다음과 같다.

$$\frac{\beta_i\pi_iD_i}{2[Q_i+(1-\beta_i)y(r_i)]}\int_{r_i}^{\infty}(x_i - r_i)\left(L_i - \frac{r_iL_i}{x_i}\right)f_i(x_i)dx_i$$

$$= \frac{\beta_i\pi_iD_iL_i}{2[Q_i+(1-\beta_i)y(r_i)]}\int_{r_i}^{\infty}(x_i - r_i)\left(\frac{x_i - r_i}{x_i}\right)f_i(x_i)dx_i$$

$$= \frac{\beta_i\pi_i\mu_i}{2[Q_i+(1-\beta_i)y(r_i)]}\int_{r_i}^{\infty}\frac{(x_i-r_i)^2}{x_i}f_i(x_i)dx_i \tag{11}$$

그러므로 소매점 i에서 발생되는 연간 평균변동비용은 식 (5),(9),(10),(11)의 합이다.

즉,
$$K_i(Q_i,r_i) = \frac{A_iD_i}{Q_i + (1-\beta_i)y(r_i)} + h_i\left[\frac{Q_i}{2} + \frac{1}{2}(1-\beta_i)y(r_i) + r_i - u_i\right]$$

$$+ \frac{h_iu_i}{2[Q_i + (1-\beta_i)y(r_i)]}\int_{r_i}^{\infty}\frac{(x_i-r_i)^2}{x_i}f_i(x_i)dx_i$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\frac{D_i(1-\beta_i)y(r_i)P_i}{Q_i + (1-\beta_i)y(r_i)} + \frac{\beta_i\pi_iu_i}{2[Q_i+(1-\beta_i)y(r_i)]}\int_{r_i}^{\infty}\frac{(x_i-r_i)^2}{x_i}f_i(x_i)dx_i$$

$$= \frac{A_iQ_i}{Q_i + (1-\beta_i)y(r_i)} + h_i\left[\frac{Q_i}{2} + \frac{1}{2}(1-\beta_i)y(r_i) + r_i - u_i\right]$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\frac{D_iP_i(1-\beta_i)y(r_i)}{Q_i + (1-\beta_i)y(r_i)} + \frac{(h_i + \beta_i\pi_i)u_i}{2[Q_i + (1-\beta_i)y(r_i)]}\int_{r_i}^{\infty}\frac{(x_i-r_i)^2}{x_i}f_i(x_i)dx_i \tag{12}$$

확정적인 경우(deterministic case)에 대한 연간 평균변동비(average annual variable cost)는 확률변수인 실질선행기간수요(effective lead time demand) x_i를 확정적인 값 r_i+S_i 로 가정함으로써 구할 수 있다. 그러면 식 (12)에서 $y(r_i) = S$ 이고 x_i를 r_i+S_i로 가정하면 식(12)로 부터

$$K_d(Q_i,r_i) = \frac{A_iD_i}{Q_i+(1-\beta_i)S_i} + \frac{h_i(Q_i-\beta_iS_i)^2}{2\,[\,Q_i+(1-\beta_i)S_i\,]} + \frac{D_iP_i(1-\beta_i)S_i}{Q_i+(1-\beta_i)S_i}$$

$$+ \frac{\pi_i\beta_iS_i^2}{2[Q_i + (1-\beta_i)S]}$$

$K_d(Q_i,r_i)$에서 $Q_i + (1-\beta_i)S_i$를 R_i로 두면 Park [14]의 확정적 모델과 일치하고, $\beta_i = 1$ 에서는 Holt et.

al.[2]의 통상적인 부재고 모델로 환원된다. $K_i(Q_i, r_i)$는 볼록함수가 아니다. 그러나, 다음의 변환을 통하여 새로운 재고의사결정변수(new inventory decision variables) R을 도입하여 볼록함수(convex function)임을 증명한다.

$$\begin{bmatrix} R_i \\ r_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_i + (1-\beta_i)y(r_i) \\ r_i \end{bmatrix} \tag{13}$$

위의 변환에 대한 최적해의 일관성에 관한 증명은 Kim 과 Park[20]에 의해 수행 되었다.

(보조정리 1)

K_i를 Q_i와 r_i의 함수라 하자. 그리고 $K_i(Q_i, r_i) = K_i[R_i - (1-\beta_i)y(r_i), r_i] = \hat{K}_i(R_i, r_i)$이 되도록 다음과 같은 1 대1 변환을 한다. 만일 임의의 $R_i \times r_i \in R_i^2$에 대해서 $\hat{K}_i(R_i^*, r_i^*) \le \hat{K}_i(R_i, r_i)$ 이면 임의의 $Q_i \times r_i \in R_i^2$에 대해서 다음이 성립한다.

$$K_i(Q_i^*, r_i^*) = K_i[R_i^* - (1-\beta_i)y(r_i^*),\ r_i^*]$$

이 변환을 이용하면 식(12)는 다음과 같이 된다.

$$\hat{K}_i(R_i, r_i) = \frac{A_i D_i}{R_i} + h_i\left(\frac{R_i}{2} + r_i - u_i\right) + \frac{D_i P_i (1-\beta_i) y(r_i)}{R_i}$$

$$+ \frac{(h_i + \beta_i \pi_i)\mu_i}{2R_i} \int_{r_i}^{\infty} \frac{(x_i - r_i)^2}{x_i} f_i(x_i)dx_i \tag{14}$$

(보조정리 2)

식 (14)의 함수 $\hat{K}_i(R_i, r_i)$는 볼록함수(convex function)이다.

(증명) 볼록함수의 합은 볼록함수 이므로 $\hat{K}_i(R_i, r_i)$를 세부분으로 나눈다.

$$\hat{K}_1(R_i, r_i) = \frac{A_i D_i}{R_i} + h_i\left(\frac{R_i}{2} + r_i - \mu_i\right)$$

$$\hat{K}_2(R_i, r_i) = \frac{D_i P_i (1-\beta_i) y(r_i)}{R_i}$$

$$\hat{K}_3(R_i, r_i) = [\ (h_i + \beta_i \pi_i)\mu_i / 2R_i\ ] \int_{r}^{\infty} \frac{(x_i - r_i)^2}{x_i} f(x)dx$$

i) $\hat{K}_1(R_i, r_i)$는 명백한 볼록함수이다.

ii) $\hat{K}_2(R_i, r_i)$는 볼록함수이다[3].

iii) $\hat{K}_3(R_i, r_i)$에 대한 볼록함수 증명은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \hat{K}_3}{\partial R_i^2} = \frac{(h_i + \beta_i \pi_i)\mu_i}{R_i^3} \int_{r_i}^{\infty} \frac{(x_i - r_i)^2}{x_i} f_i(x_i)dx_i > 0$$

$$\frac{\partial^2 \hat{K}_3}{\partial r_i^2} = \frac{(h_i + \beta_i \pi_i)\mu_i}{R_i} \int_{r_i}^{\infty} \frac{1}{x_i} f_i(x_i)dx_i > 0$$

$$\frac{\partial^2 \hat{K}_3}{\partial R \partial r} = \frac{(h_i + \beta_i \pi_i)\mu_i}{R_i^2} \int_{r_i}^{\infty} \frac{(x_i - r_i)}{x_i} f_i(x_i)dx_i$$

여기서, f^2, g^2을 다음과 같이 두기로 한다.

$$f^2 = \frac{(x_i - r_i)^2}{x_i} f_i(x_i), \quad g^2 = \frac{1}{x_i} f_i\ (x_i)$$

그러면 헤시안 행렬(Hessian matrix) $|H|_3$는 다음과 같다.

$$|H|_3 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \hat{K}_3}{\partial R_i^2} & \dfrac{\partial^2 \hat{K}_3}{\partial R_i \partial r_i} \\ \dfrac{\partial^2 \hat{K}_3}{\partial r_i \partial R_i} & \dfrac{\partial^2 \hat{K}_3}{\partial r_i^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 \hat{K}_3}{\partial R_i^2} \cdot \frac{\partial^2 \hat{K}_3}{\partial r_i^2} - \left(\frac{\partial^2 \hat{K}_3}{\partial R_i \partial r_i}\right)^2$$

$$= \left[\frac{(\ h_i + \beta_i \pi_i)}{R_i^2}\right]^2 \left\{ \int_{r_i}^{\infty} \frac{(x_i - r_i)^2}{x_i} f_i(x_i)dx_i \int_{r_i}^{\infty} \frac{1}{x_i} f_i(x_i)dx_i \right.$$

$$- \left\{ \int_{r_i}^{\infty} \frac{x_i - r_i}{x_i} f_i(x_i)dx_i \right\}^2 \Bigg\}$$

$$= \left[\frac{(h_i+\beta_i\pi_i)}{R_i^2} \right]^2 \left\{ \int_{r_i}^{\infty} f^2\, dx_i \cdot \int_{r_i}^{\infty} g^2\, dx_i - \left\{ \int_{r_i}^{\infty} f \cdot g\, dx_i \right\}^2 \right\}$$ 이므로

다음의 쉬바르쯔 부등식(Schwarz inequality)을 적용하면 $|H_3| \geq 0$ 이므로 $\hat{K}_3(R_i, r_i)$은 볼록함수이다.

$$\left(\int_a^\beta f^2\, dx \right) \left(\int_a^\beta g^2\, dx \right) \geq \left(\int_a^\beta fg\, dx \right)^2$$

그러므로 $\hat{K}_i(R_i, r_i)$는 볼록함수 이다. 또한 볼록함수의 상대적 최소치는 절대최소치가 되므로 식(14)를 최소로 하는 R_i^*, r_i^*는 유일해가 된다. (증명끝)

주어진 d(R)값에 대해서, 각 소매점 i에서의 실질선행기간의 수요의 평균과 표준편차는 식(1), (2), (3)으로부터 구할 수 있기 때문에 N개의 독립 부분문제(subproblem)을 풀 수 있다. 소매점 i에 대한 부분문제(subproblem)은 소매점 i에서 발생되는 연간 평균변동비 $\hat{K}_i(R_i, r_i)$를 최소화 한다. 따라서, i번째 부분문제에 대해서 식(14)를 최소로 하는 (R_i^*, r_i^*)는 다음 식을 만족한다.

$$\frac{\partial \hat{K}_i}{\partial R_i} = -\frac{A_iD_i}{R_i^2} + \frac{h_i}{2} - \frac{D_iP_i(1-\beta_i)y(r_i)}{R_i^2} - \frac{(h_i+\beta_i\pi_i)\mu_i}{2R_i^2} \int_{r_i}^{\infty} \frac{(x_i-r_i)^2}{x_i} f_i(x_i)dx_i$$

$$= 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial \hat{K}_i}{\partial r_i} = h_i - \frac{D_iP_i(1-\beta_i)H(r_i)}{R_i} - \frac{(h_i+\beta_i\pi_i)\mu_i}{R_i} \int_{r_i}^{\infty} \left(1 - \frac{r_i}{x_i} \right) f_i(x_i)dx_i$$

$$= 0 \tag{16}$$

여기서 $H(r_i) = \int_{r_i}^{\infty} f_i(x_i)dx_i$ 는 $f_i(x_i)$의 여누적함수(complementary cumulative function)이고 식(15)와 식(16)을 정리하면 다음의 식(17)과 식(18)을 얻는다.

$$\therefore\ R_i = \sqrt{\frac{2A_iD_i + 2D_iP_i(1-\beta_i)y(r_i) + (h_i+\beta_i\pi_i)\mu_i \int_{r}^{\infty} \frac{(x_i-r_i)^2}{x_i} f_i(x_i)dx_i}{h_i}} \tag{17}$$

$$h_iR_i = [D_iP_i(1-\beta_i) + (h_i+\beta_i\pi_i)\mu_i]H(r_i) - (h_i+\beta_i\pi_i)\mu_i r_i \int_{r_i}^{\infty} \frac{1}{x_i} f_i(x_i)dx_i \tag{18}$$

식(17)과 식(18)로 부터 구해진 i번째 부분분제(subproblem)의 해 (R_i^*, r_i^*)는 유일한 최소치이고, Q_i^*는 식 (13)으로 부터 구해진다.

$\hat{K}_i(R_i, r_i)$을 최소화시키는 (R_i^*, r_i^*)를 구하기 위해서 다음의 반복기법을 사용한다.

Step 1. R_i에 대한 초기추정치를 $\sqrt{2A_iD_i/h_i}$로 두고 이것을 $R_i^{(1)}$이라 한다.

Step 2. r을 구하기 위해서 $R = R_i^{(1)}$을 식(18)에 대입한다.
이값을 $r_i^{(1)}$이라 한다.

Step 3. $R_i^{(2)}$를 구하기 위해서 $r = r_i^{(1)}$을 식(17)에 대입한다.

Step 4. 만일 반복과정 i번째에서 수렴이 발생하면 즉, $R_i^{(J)} = R_i^{(J-1)}$ 혹은 $r_i^{(J-1)}$ 은 $r_i^{(J)} = r_i^{(J-1)}$ 이면 종료하고 그렇지 않으면 Step 2로 간다.

마지막으로 모든 소매점 i에서 발생하는 최소 연간 평균변동비는 d(R)의 함수로써 다시 표현될 수 있다.

$$K^*[d(R)] = \sum_{i=1}^{N} K_i(R_i^*, r_i^*) \tag{19}$$

2.4 중앙창고 모형에 대한 분석(Central Warehouse Analysis)

여기서는 중앙창고에서 발생되는 연간 평균변동비를 도출하고, 최적정책 변수(optimal operating policy variable) R을 고정된 T에 대해서 결정한다. 조사간격(review interval) T는 모델의 외부조건의 결과로써 되어질 수 있다. 즉, T는 많은 다른 품목의 보충을 조정하거나 혹은 외부공급자가 매 다른 달에 중앙창고로부터 주문을 받아 들일수 있도록 하기 위하여 결정된다.

제시된 모델에서, T는 경제적 발주간격 즉, $T^* = \sqrt{2A_0/D_0h_0}$ 으로 부터 미리 결정된다. 그림2은 (R,T)정책에 대한 중앙창고의 재고형태를 나타내고 있다. 목표재고수준 R은 선행기간과 조사간격 동안의 중앙창고의 수요의 확률분포에 의해서 계산된다.

중앙창고의 선행기간과 조사간격동안의 수요는 확률밀도함수가 $f_0(x)$인 정규분포 $N(\mu_0, \sigma_0)$를 따른다고 가정한다. [20]

$$\mu_o = (T+l_o)\sum_{i=1}^{N} D_i \tag{20}$$

$$\sigma_o = \sqrt{[(T+l_o)\sum_{i=1}^{N} S_i^2 + \sum_{i=1}^{N} R_i^2/12]} \tag{21}$$

이러한 식은 각 소매점들에 대한 고객 총수요를 고려하고 있고, 중앙창고는 소매점들로부터 괴상수요(lumpy demand)를 가질 수 있다는 사실을 고려하고 있다.

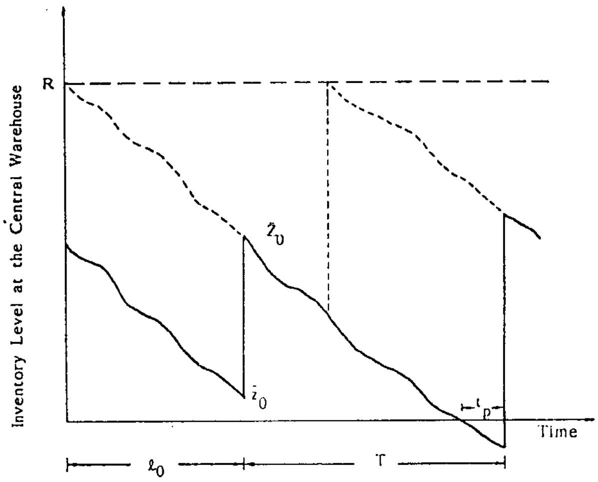

그림2 Behavior of the inventory system at central warehouse

주문은 매 조사간격 T에서 일어남으로 중앙창고에서 발생되는 연간 평균주문비는 식(22)과 같고

$$\frac{A_o}{T} \tag{22}$$

선행기간과 조사간격 동안의 기대수요는 μ_0이므로 제품 도착직전의 기대 정미재고(expected net inventory)는 $\bar{z}_0 = R-\mu_o$ 이고 제품 도착직후의 기대 정미재고는 $\bar{Z}_o = R-\mu_o+D_oT$ 이다. 중앙창고에서 품절되는 시간비율이 비교적 작으므로, 연간 평균재고유지비는 식(23)와 같다.

$$h_o(\bar{z}_o + \bar{Z}_o)/2 = h_o(R-\mu_o+D_oT/2) \tag{23}$$

그러므로, 중앙창고에서 발생하는 연간 평균변동비(average annual variable cost) $K_o(R)$은 식(22)와 식(23)로부터 구해진다.

$$K_o(R) = \frac{A_o}{T} + h_o(R-\mu_o + \frac{D_oT}{2}) \tag{24}$$

가정 9)로부터 중앙창고의 부재고비용(backorder cost)은 식(24)에 나타나지 않지만 중앙창고의 부재고는 소매점의 실질선행기간(effective lead time)을 증가시킨다. 중앙창고와 소매점에서 발생되는 총변동비용(total variable cost)은 식(19)와 식(24)로부터 다음과 같이 구해진다.

$$TVC(R, R_i, r_i) = \sum_{i=1}^{N} K_i(R_i^*, r_i) + K_o(R^*) \qquad (25)$$

시스템의 총비용모델(total system cost model) TVC로 부터 소매점의 문제를 분리하기위해서, 소매점의 부분모델은 중앙창고에서의 부재고 수준변동의 영향은 고려되지 않는다. 그래서, 모든 소매점에서 발생된 연간 평균변동비용에대한 부재고비용의 영향은 중앙창고의 부분모델에 반영되어져야 한다. 이것은 어떤 임의의 시점에서 중앙창고의 부재고수준이 한 단위 증가할 때 모든 소매점에서 발생되는 연간 평균 변동비용의 효과를 측정하는 歸屬 부재고비용의 개념을 도입한다.[13]

$\hat{\pi}_0$를 품절기간당 歸屬 부재고비용이라고 두고 B(R)을 중앙창고에서 한 주기동안 부재고되는 기대단위수라고 하면 $dK^*[d(R)] / dB(R)$ 은 모든 소매점에서 발생되는 연간 평균변동비에 대해서 중앙창고의 부재고의 한계효과(marginal effect)를 측정하므로 $\hat{\pi}_0$의 추정치가 된다. 또한 (l_o+T) 동안의 수요가 R을 초과하면 $(x_o>R)$ 부재고가 발생하므로 그림 2로부터 $t_p=(l_o+T)(x_o-R)/x_o$ 이므로 주기(cycle) 전체를 통해서 부재고되는 기대단위수 B(R)은 다음과 같다.

$$B(R) = \frac{1}{2T}\int_R^{\infty} (x_o-R)t_p\, f_o(x_o)dx_o = \frac{(l_o+T)}{2T}\int_R^{\infty} \frac{(x_o-R)^2}{x_o} f_o(x_o)dx_o \qquad (26)$$

그리고 한 주기(cycle)에서 지연없이 충족되는 기대 단위수는 $D_oT-B(R)$이며 한 단위 수요가 지연되는 가중수요평균시간(demand-weighted average time) d(R)은 다음과 같다.

$$d(R) = \{ T\cdot B(R) + 0\cdot[D_oT-B(R)] \} \,/\, D_oT = B(R)/D_o \qquad (27)$$

이것은 塊狀(lumpy)수요 형태에 대해서도 성립한다.

단위당 평균 지연시간은 중앙창고로부터의 어떤 시점에서 소매점의 주문이 충족될 때까지 기다려야 하는 기대시간이므로 그래서 소매점의 주문주기당 기대지연시간은 식(27)로 주어진다. 그러면 식(14)와 식(19)로 부터

$$\hat{\pi}_o = \frac{dK^*[d(R)]}{dB(R)} = \frac{dK^*[d(R)]}{dd(R)}\cdot\frac{dd(R)}{dB(R)}$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left\{-\frac{h_iD_i}{D_o} + \frac{D_i(1-\beta_i)y(r_i^*)}{4D_o}\cdot\frac{-\sigma_i^2+r_i^{*2}-\mu_i^2}{\sigma_i^2\mu_i}\left[-\frac{A_iD_i}{R^{*3/2}} + h_i + \frac{2D_iP_i}{R_i^*} - \frac{2D_iP_i(1-\beta_i)y(r_i)}{R_i^{*2}}\right] + \frac{(h_i+\beta_i\pi_i)D_i}{4R_i^*D_o}\int_{r_i^*}^{\infty}\frac{(x_i-r_i^*)^2}{x_i}\left[\frac{(1-\beta_i)y(r_i^*)}{R_i^*}\left(1-\frac{x_i^2-\mu_i^2}{\sigma_i^2}\right) + \left(1+\frac{x_i^2-\mu_i^2}{\sigma_i^2}\right)\right] f_i(x_i)dx_i\right\} \qquad (28)$$

여기서 β=1 즉, 완전 부재고인 경우는 Kim과 Park[16]의 식(24)로 환원된다. 식 (28)에 사용된 R_i^*, r_i^*의 실제값은 현재의 R 값을 기초로 한다.

$K_o(R)$을 중앙창고에서 발생된 歸屬 부재고비용과 연간 평균변동비의 합으로 두면 식(24)와 식(26)으로부터 다음을 얻는다.

$$K_o(R) = \frac{A_o}{T} + h_o\left(R - \mu_o + \frac{D_oT}{2}\right) + \frac{(l_o+T)}{2T}\int_R^{\infty}\frac{(x_o-R)^2}{x_o} f_o(x)dx_o \qquad (29)$$

$$\frac{d^2K_o}{dR^2} = \frac{(l_o+T)}{T}\int_R^{\infty}\frac{1}{x_o} f_o(x_o)dx_o > 0$$

그러므로 함수 $K_o(R)$은 R에서 완전 볼록(strictly convex)이고 유일한 최소치를 가지고 R의 최적값은 식(30)의 유일해가 된다.

$$\frac{dK_o}{d_R} = h_o - \frac{\pi_o(l_o+T)}{T}\int_R^{\infty}\frac{(x_o-R)}{x_o} f_o(x_o)dx_o = 0$$

$$\int_{R^*}^{\infty}\frac{(x_o-R^*)}{x_o} f_o(x_o)dx_o = \frac{h_oT}{\pi_o(l_o+T)} \qquad (30)$$

歸屬 부재고비용이 R의 최적값을 결정하는데 고려될지라도, 식(25)에서의 시스템의 연간 총변동비(total variable system cost)에는 직접 반영되지 않는다. 끝으로 새로운 R^*값으로부터, 식(27)에서 새로운 d(R)값이 소매점 부분모델로 환원(feed back) 된다.

3. 반복절차와 수치예(An iterative procedure and numerical example)

다음에 제시된 반복적 절차는 연간 시스템의 총변동비를 최소화시키는 최적 혹은 준최적 재고정책을 구하기 위해서 사용된다.

step 1. 초기추정치 d(R)=0

step 2. (a) 주어진 d(R)에 대해서 식(1),(2),(3)을 이용하여 각 소매점 i의 μ_i, σ_i를 계산한다.
(b) 각 소매점 i에 대해서, 소매점 분석에서 개발된 부반복절차를 이용하여 (R_i^*, r_i^*)를 결정한다.

step 3. (a) 주어진 (R_i^*, r_i^*)에 대해서 식(20),(21),(28)로 부터 μ_o, σ_o, π_o를 계산한다.
(b) 식(30)을 만족하는 R^*를 결정하고, 식 (27)을 이용하여 d(R)값을 수정한다.

step 4. step2, 3에서 구해진 R_i^*, r_i^*, R^*값에 대해서 식(25)를 이용하여 시스템의 연간 총비용을 계산하고 시스템의 연간 총변동비가 충분히 수렴될때까지 개정된 d(R)값으로 step 2로 간다. 수렴이되면 step5로 간다.

step 5. 식(13)을 이용하여 Q_i^*를 계산하고 각 소매점 i의 (Q_i^*, r_i^*)를 구한다.

본 연구에서 제시된 반복적 절차와 모형의 적용사례를 설명하기 위해서 10개의 소매점을 가진 예제가 고려되었다. Table 1 은 각 소매점들의 입력자료이다. 그리고 중앙창고에 관련된 자료는 다음과 같다.

A_o = \$50, h_o = \$ 0.8/yr/unit, l_o = 0.7 year, $T = \sqrt{2A_o/D_oh_o} = 0.37$ year

여기서, $D_0 = \sum_{i=1}^{N} D_i = 930$

Table 1. Data for the example problem

Retailer	Demand parameter			Cost parameter			
	D_i (unit/yr)	l_i (yr)	S_i (unit/yr)	A_i (\$)	h_i (\$/yr/unit)	π_i (\$/yr/unit)	P_i (\$/unit)
1	77	0.12	42	37	2.2	19	3
2	122	0.17	29	43	3.5	35	3
3	60	0.13	30	27	1.3	22	3
4	132	0.16	40	32	4.1	18	3
5	85	0.18	37	18	2.7	27	3
6	61	0.11	33	26	3.7	47	3
7	120	0.15	43	32	2.4	34	3
8	92	0.14	32	36	4.5	39	3
9	69	0.19	34	25	3.4	34	3
10	112	0.15	28	29	2.9	46	3

Table 2 에서는 반복절차의 중간계산 결과들을 나타내고 있다. β=0.5 로 주어질 때 이 예제에 대한 해는 반복절차 3 에서 구해졌고 시스템의 최소 총변동비용은 \$1531.56 이다.

Table 2. Intermediate computational result (β=0.5)

Retailer	EOQ	1		2		3	
		R_i	r_i	R_i	r_i	R_i	r_i
1	51	53	2	54	9	54	9
2	55	56	19	57	22	58	22
3	50	51	7	52	9	52	9
4	45	47	19	48	21	49	22
5	34	35	15	36	16	36	17
6	29	30	5	31	7	32	7
7	57	59	17	59	21	59	21
8	38	40	10	41	12	41	13
9	32	34	11	35	12	35	13
10	47	49	16	49	19	49	19
d(R)		0.0306		0.0314		0.0317	
R^*		903		899		897	
TVC		1557.4		1530.61		1531.56	

각 소매점의 주문량 Q_i^*는 $EOQ_i = \sqrt{2A_iD_i/D_i}$ 를 사용하고 이 EOQ_i를 근거로 해서 재주문점 r_i를 결정한다. 또는 각 소매점에서 d(R)=0 으로서 2.3절에서 설명한 부반복절차를 사용해서 Q_i, r_i 를 결정한다. 참고로 Table 2 의 2열에 EOQ 값이 주어진다.

그리고 실제로 사용된 Q_i, r_i 로서 중앙창고는 연간 총변동비용을 최소화하는 최적 정책 R^*를 결정해야만 한다.

Table 3은 부재고비율 β 의 변화에 따른 최적정책변수값을 나타내고 있다. 부재고비율 β 가 증가할수록 각 소매점 i의 Q_i^*값은 모두 증가하고 있는 반면 r_i^* 값은 감소하고 있다. 또한 중앙창고에서의 목표재고수준 R^* 와 시스템 총변동비용은 감소하고 있다.

이것은 단일단계만을 고려한 Kim & Park [15]에서의 결과와 같은 경향을 나타내고 있다.

4. 결론

다단계 재고시스템이 실제로 많이 사용되고 있으나 이러한 시스템의 운영에 관한 지침은 그다지 제시되고 있지 않다. 이것은 이들 시스템의 확률모형이 매우 복잡하고 최적재고정책을 발견하기 어렵기 때문이다. 더우기 부분부재고가 현실적인 상황이지만 이것을 고려한 다단계 재고시스템에 관한 운영정책은 거의 제시되지 않고 있다.

본 논문에서는 부분부재고가 고려되는 상황하에서 2단계 분배시스템의 확률적 재고모형을 제시하였으며 중앙창고와 소매점간의 상호작용을 기초로 연간 시스템의 총변동비를 최소로 하는 최적 또는 근사적 재고정책을 발견하는 반복절차를 개발하였다.

이 절차는 비록 수학적인 복잡성 때문에 수렴이 증명될 수 없지만, 본 연구에서 시도한 약 10개의 예제에서 상당히 빠르게 수렴되었다.

본 연구에서 제시된 모형은 다단계 분배시스템 문제의 실제적인 해결에 매우 유용할 것이다.

앞으로, 각 소매점간에 상호작용을 고려한는 모형과 수요행태의 변화에 따른 최적정책의 결정문제에 관한 해법의 개발이 이루어져야 할 것이다.

참 고 문 헌

[1] 李康雨, "部分 負在庫를 고려한 在庫시스템의 設計에 관한 硏究", 博士學位論文, 東亞大學校 大學院, pp. 43-73, (1990).

[2] Holt, C.C., Modigliani, F., Muth, J.F., and Simon, H.A., *Planning Production, Inventories, and Work Force*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1960.

[3] Hadley, G. and Whitin, T.M., *Analysis of Inventory Systems*, Prentice-Hall London 1963.

[4] Beek, B.V., "Modeling and analysis of a multi-echelon inventory system," *Eur. J. Opl. Res.* Vol.6(1981), pp.380-385.

[5] Clark, A. J., "The Infomal Survey of Multi-Echelon Inventory Problem," *Managemet Science*, Vol. 6(1972).

[6] Cohen, M.H., Kleindorfer, P.R., Lee, H.L., "Service constrained(s,S) inventory systems with priority demand classes and lost sales", *Managemet Science*, Vol.34(1988), pp.482-499.

[7] Das, C., "Q,r Inventory Models with Time-weighted Backorders," *J. Opl. Res. Soc.*, Vol. 34(1983), pp.401-412.

[8] Deuermeyer, B. L. and Schwarz, L. B., "A Model for the Analysis of System Service Level in Warehouse-Retailer Distribution Systems : the Identical Retailer Case," Multi-Level Production/Inventory Control Systems : Theory and Practice, North Holland, Amsterdam, pp.163-193, 1981.

[9] Kim, D.S. and Park, K.S., "(Q,r) Inventory Model with a Mixture of Lost Sales and Time-weighted Backorders," *J. Opl. Res. Soc.*, Vol. 36, No.3(1985), pp.231 - 238.

[10] Kok, A.G., "Approximations for a lost-sales production/inventory control model with service level constraints," *Managemet Science*, Vol.31(1985), pp.729-737.

[11] Montgomery, D.C., Bazaraa, M.S. and Keswani, A.K., "Inventory Models with a Mixture of Backorders and Lost sales," *Naval Res. Logist. Quart.*, Vol. 20, No. 2(1973), pp. 255-263.

[12] Muckstadt, J. A., "A Model for a Multi-Item, Multi-Echelon, Multi-Indenture Inventory System," *Management Science*, Vol. 20, No. 4 (1973), pp. 472-481.

[13] Muckstadt, J.A. and Issac, M.H., "An analysis of single item inventory system with return," *Naval Res. Logist. Quart.*, Vol. 28, No. 2(1981), pp. 237-253.

[14] Park, K.S., "Inventory Model with Partial Backorders," *Int. J. System Sci.*, Vol. 13, No. 12(1982), pp. 1313-1317.

[15] Park, K.S., "Another Inventory Model with a Mixture of Backorders and Lost Sales," *Naval Res. Logist. Quart.*, Vol. 30, No. 3(1983), pp. 397-400.

[16] Park, K.S. and Kim, D.H., "Stochastic inventory model for two-echelon distribution systems," *Computers ind. Engng.*, Vol. 16(1989), pp. 245-255.

[17] Pinkus, C.E., "Opeimal Design of Multi-Product Multi-Echelon Inventory Systems," *Decision Science*, Vol. 6, No. 3(1975).

[18] Rosenbaum, B. A., "Service Level Relationships in a Multi-Echelon Inventory System," *Management Science*, Vol. 27, No.8(1981), pp. 926-945.

[19] Rosenberg, D., "A New Analysis of a Lot-size Model with Partial Backlogging," *Naval Res. Logist. Quart.*, Vol. 26, No. 2(1979), pp. 349-353.

[20] Sand, G., "Predicting demand on the secondary echelon," *Eastman Kodak TP & E Working paper*, No. G-05-06(1979).

[21] Schwary, L.B., Deuermeyer, B.L. and Badimelli, R.D., "fill-Rate Optimization in a One-Warehouse N-Identical Retailer Distribution System," *Management Science*, Vol 31, No. 4(1985), pp 488-498.

[22] Sherbrooke, C. C., "METRIC : A Multi-Echeion Technique for Recoverable Item Control," *Operations Research*, Vol. 16, No.1(1968), pp.122-141.

[23] Yano, C.A., "New Algorithms for (Q,r) Systems with Complete Backordering Using a Fill-Rate Criterion," *Navel Res. Logist Quart.*, Vol. 32(1985), pp. 675-688.