

# 제한된 크기의 버퍼를 가진 생산 시스템의 분석

## - Analysis of Transfer Lines with Finite Storage Buffers -

허 성 관\*  
하 정 진\*\*

### ABSTRACT

This paper presents a method for analyzing the transfer lines with finite storage buffers. Each machine spends a random amount of time processing each material. This transfer line can be modeled by the tandem queueing system with finite buffers. The great dimensionality of the state space renders the analysis of such system a formidable task. We propose an efficient algorithm to obtain the marginal state probabilities based on the exact algorithm for the two-machine system. Other performance measures, such as the utilization, the blocking probability, the average sojourn time, and the average queue length, can be easily calculated.

### I. 서 론

생산 시스템 중에서 대표적인 형태는 재공품들이 직선형의 라인을 따라 차례로 가공되거나 조립되는 형태이다. 그러한 시스템의 성능은 각 단계의 성능에 따라 영향을 받는다. 각 단계에서의 가공시간이 확률변수인 시스템은 대기행렬(queueing network)으로 모델링 할 수 있으며, 흔히 마야코프 연쇄(Markov chain) 모형에 의해 분석된다. 각 단계의 기계에 할당된 버퍼(buffer)의 크기를 무한으로 가정한 경우에는 일반적으로 쉽게 분석될 수 있다. 그러나 버퍼의 크기가 제한되어 있는 경우에는 시스템을 묘사하는 상태(state)의 수가 기계의 수가 증가함에 따라 급격히 증가하기 때문에 현실적으로 안정상태의 확률(steady-state probability)을 구하기가 쉽지 않다. 본 논문의 목적은 Fig.1과 같은 시스템의 안정상태 확률을 구하는 효율적인 해법을 제시하는데 있다.

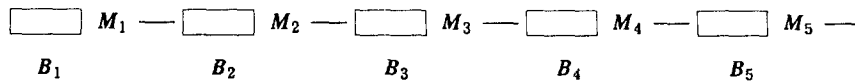


Fig.1. Transfer Line with Finite Buffer

### II. 모 형 화

대기 행렬 모형은 앞서 제시된 생산 시스템 뿐만 아니라 컴퓨터 시스템이나 통신 시스템의 분석에도 널리 사용되는 기법이다. 버퍼가 무한인 대기 행렬망(queueing network)은 일정한 조건을 만족하는 경우에 해가 각 대기 행렬을 독립적으로 분석한 해의 곱에 의해 전체 시스템의 해가 표시되므로 쉽게 분석할 수 있다[2,6]. 그러나 버퍼의 크기가 제한된 대기 행렬망은 수리적인 분석이 용이하지 않기 때문에 아주 작은 규모의 시스템이 아니면 근사적인 해법, 반복적인 탐색 기법, 또는 시뮬레이션에 의해 분석하는 것이 보통이다[1,3,4,5,7].

\* 대구대학교 산업공학과 부교수  
 \*\* 동아대학교 산업공학과 교수  
 접수 : 1992. 10. 25.  
 확정 : 1992. 11. 2.

본 논문에서는 버퍼가 제한되어 있는 직선형 생산 시스템을 직렬형 대기 행렬로 모형화하여 안정 상태의 확률을 구하는 방법을 구하려고 한다. 생산 시스템은 Fig.1과 같이  $k$ 개의 기계 ( $M_1, M_2, \dots, M_k$ )와 각 기계 앞에 위치한 ( $B_1, B_2, \dots, B_k$ )로 구성된다. 각 버퍼는 제한된 크기의 용량 ( $C_1, C_2, \dots, C_k$ )을 가진다. 재공품의 흐름은  $B_1$ 을 거쳐  $M_1$ 에서 가공을 하고  $B_2$ 에서 저장되었다가  $M_2$ 에서 가공되어 마지막으로  $M_k$ 에서 가공이 끝나면 완성되어 시스템을 떠나게 된다. 시스템으로 재공품이 투입되는 간격은 모수(parameter)가  $\mu_0$ 인 지수 분포(exponential distribution)를 따른다. 각 기계에서 각 재공품의 가공시간은 확률 변수(random variable)로 주어지며, 기계  $k$ 에서의 가공시간은 모수(parameter)가  $\mu_k$ 인 지수 분포(exponential distribution)를 따른다.

제한된 크기의 버퍼는 재공품의 흐름에 제한을 초래한다. 기계  $i$ 에서 가공이 끝났을 때, 다음 기계의 버퍼  $B_{i+1}$ 이 모두 채워져 있는 경우에는  $B_{i+1}$ 에 들어가지 못하고 기계  $i$ 에서 대기해야 하는 블로킹(blocking)이 발생한다. 따라서 기계  $i$ 는 작업을 할 수 없다.  $B_{i+1}$ 에 빈 공간이 생기게 되면, 즉 기계  $(i+1)$ 에서 작업중인 재공품의 가공이 끝나면 비로소  $B_{i+1}$ 에 들어갈 수 있다.

이러한 시스템은 마코프 연쇄(Markov chain)으로 모형화 할 수 있으나 시스템의 상태(state)의 수가 많아서 수리적인 접근이 거의 불가능하다. 마지막 기계를 제외한 각 기계의 버퍼  $B_i$ 는 ( $C_i+2$ )가지의 상태를 가질 수 있다 ( $n_i = 0, 1, \dots, C_i, C_i+1$ ).  $C_i$ 는 버퍼  $B_i$ 의 크기이며  $n_i$ 는  $B_i$ 에 저장된 재공품의 수를 나타낸다. 편의상  $n_i$ 가 ( $C_i+1$ )의 값을 갖는다는 것은 실제로  $B_i$ 에  $C_i$ 개의 재공품이 저장되어 있으나  $B_{i+1}$ 의 용량이 전부 차 있어서  $B_{i+1}$ 로 들어갈 수 없는 상태를 나타내는 의미로 사용하도록 한다.

결과적으로  $k$ 개의 기계의 생산 시스템은 다음과 같은 수의 상태(state)를 갖는다

$$(C_k+1) \prod_{i=1}^{k-1} (C_i+2).$$

### III. 2대의 기계로 구성된 시스템의 분석

시스템이 2대의 기계로 구성된 경우에는 시스템의 상태가 2차원으로 묘사된다. 이때의 시스템의 상태를  $(i, j)$ ,  $i = 0, 1, \dots, C_1$ ,  $j = 0, 1, \dots, C_2+1$ 로 나타낼 수 있다. 단 앞으로의 분석상의 편의를 위하여  $i$ 와  $j$ 를  $B_1$ 과  $B_2$ 에 저장된 재공품의 수가 아니라  $M_1$ 과  $M_2$ 에서의 작업을 끝마친 재공품의 수로 정의한다. 그러면, 안정 상태에서의 확률은 다음과 같은 균형 방정식(balance equation)을 만족한다.

$$\begin{aligned} \mu_0 p(0,0) &= \mu_2 p(0,1), \\ (\mu_0+\mu_2)p(0,j) &= \mu_1 p(1,j-1) + \mu_2 p(0,j+1), & 0 < j \leq C_2 \\ (\mu_0+\mu_2)p(0,C_2+1) &= \mu_1 p(1,C_2), \\ (\mu_0+\mu_1)p(i,0) &= \mu_0 p(i-1,0) + \mu_2 p(i,1), & 0 < i < C_1 \\ (\mu_0+\mu_1+\mu_2)p(i,j) &= \mu_0 p(i-1,j) + \mu_1 p(i+1,j-1) + \mu_2 p(i,j+1), & 0 < i < C_1, \quad 0 < j \leq C_2 \\ (\mu_0+\mu_2)p(i,C_2+1) &= \mu_0 p(i-1,C_2+1) + \mu_1 p(i+1,C_2), & 0 < i < C_1, \\ \mu_1 p(C_1,0) &= \mu_0 p(C_1-1,0) + \mu_2 p(C_1,1), \\ (\mu_1+\mu_2)p(C_1,j) &= \mu_0 p(C_1-1,j) + \mu_2 p(C_1,j+1), & 0 < j < C_2, \end{aligned}$$

위의 균형 방정식은 일정한 패턴을 가지고 있다. 임의의 상태 확률  $p(i,j)$ 는 세가지의 들어오는 흐름과 세가지의 나가는 흐름을 가지고 있다. 이러한 특성을 이용하여 다음과 같은 관계식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mu_1\{P_1(i)-p(i,C_2+1)\} &= \mu_0P_1(i-1), & i=1,2,\dots,C_1-1 \\ \mu_1P_1(C_1) &= \mu_0\{P_1(C_1-1)-p(C_1-1,C_2+1)\} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\mu_1\{P_2(j)-p(0,j)\} = \mu_2P_2(j+1) \quad j=0,1,\dots,C_2 \tag{2}$$

여기서  $P_1(i)$ 와  $P_2(j)$ 는 다음과 같다.

$$P_1(i) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{C_2+1} p(i,j), & i=0,1,\dots,C_1-1 \\ \sum_{j=0}^{C_2} p(i,j), & i=C_1 \end{cases} \tag{3}$$

$$P_2(j) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{C_1} p(i,j), & j=0,1,\dots,C_2 \\ \sum_{i=0}^{C_1-1} p(i,j), & j=C_2+1 \end{cases}$$

관계식 (1)로부터 다음과 같은 정리를 유도할 수 있다.

**정리 1.** 기계 1의 주변확률분포(marginal state probability distribution)는 기계 1이 블로킹(blocking) 상태인 확률들에 의하여 다음과 같이 표시된다.

$$P_1(i) = \frac{\alpha^i}{1-\alpha^{C_1+1}} \left\{ 1-\alpha + \sum_{k=1}^i \frac{1-\alpha^k}{\alpha^k} p(k,C_2+1) - \sum_{k=i+1}^{C_1-2} (1-\alpha^{C_1-k+1}) p(k,C_2+1) - (1-\alpha)p(C_1-1,C_2+1) \right\}, \quad i=0,1,\dots,C_1-2, \tag{4}$$

$$P_1(C_1-1) = \frac{\alpha^{C_1-1}}{1-\alpha^{C_1+1}} \left\{ 1-\alpha + \sum_{k=1}^{C_1-1} \frac{1-\alpha^k}{\alpha^k} p(k,C_2+1) - \alpha(1-\alpha)p(C_1-1,C_2+1) \right\}, \tag{5}$$

$$P_1(C_1) = \frac{\alpha^{C_1}}{1-\alpha^{C_1+1}} \left\{ 1-\alpha + \sum_{k=1}^{C_1-2} \frac{1-\alpha^k}{\alpha^k} p(k,C_2+1) - (1-\alpha)p(C_1-1,C_2+1) \right\}. \tag{6}$$

여기서,  $\alpha = \mu_0/\mu_1$

(증명) 먼저 식(1)은 다음과 같이 변환된다.

$$P_1(i) = \begin{cases} \alpha^i P_1(0) + \sum_{k=0}^i \alpha^{i-k} p(k, C_2+1), & i=1, 2, \dots, C_1-1 \\ \alpha^{C_1} P_1(0) + \sum_{k=1}^{C_1-2} \alpha^{C_1-k} p(k, C_2+1), & i=C_1 \end{cases} \quad (7)$$

그러면 확률분포의 합은 1이라는 성질을 이용하여,

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=0}^{C_1} P_1(i) \\ &= P_1(0) + \sum_{i=1}^{C_1-1} \left\{ \alpha^i P_1(0) + \sum_{k=0}^i \alpha^{i-k} p(k, C_2+1) \right\} + \left\{ \alpha^{C_1} P_1(0) + \sum_{k=1}^{C_1-2} \alpha^{C_1-k} p(k, C_2+1) \right\} \\ &= \sum_{i=0}^{C_1} \alpha^i P_1(0) + \sum_{k=1}^{C_1-2} \sum_{i=k}^{C_1} \alpha^{i-k} p(k, C_2+1) + p(C_1-1, C_2+1) \\ &= \frac{1-\alpha^{C_1+1}}{1-\alpha} P_1(0) + \sum_{k=1}^{C_1-2} \frac{1-\alpha^{C_1-k+1}}{1-\alpha} p(k, C_2+1) + p(C_1-1, C_2+1) \end{aligned}$$

이 얻어지고, 여기서  $P_1(0)$ 가 다음과 같이 유도된다.

$$P_1(0) = \frac{1}{1-\alpha^{C_1+1}} \left\{ 1-\alpha - \sum_{k=1}^{C_1-2} (1-\alpha^{C_1-k+1}) p(k, C_2+1) - (1-\alpha) p(C_1-1, C_2+1) \right\} \quad (8)$$

이 식을 (1)에 대입하여, 약간의 조작을 하면 정리1의 내용을 확인할 수 있다. ■

정리 2. 기계 2의 주변확률분포(marginal state probability distribution)는 기계 1에 재공품이 없는 상태의 확률들에 의하여 다음과 같이 표시된다.

$$P_2(j) = \frac{1}{1-\beta^{C_2+2}} \left\{ 1-\beta + \sum_{k=1}^{C_2-j+1} \frac{1-\beta^k}{\beta^k} p(0, C_2-k+1) - \sum_{k=C_1-j+2}^{C_2+1} (1-\beta^k) p(0, C_2-k+1) \right\}, \quad j=0, 1, \dots, C_2+1 \quad (9)$$

여기서,  $\beta = \mu_2/\mu_1$

(증명) 정리1과 같은 방식으로 유도할 수 있다. ■

2대의 기계에 대한 해법의 특징은 마야코프 연쇄(Markov chain)에 의해 균형 방정식(balance equation)을 적용하는 경우 총  $(C_1+1)(C_2+2)-1$ 개의 변수에 대하여 연립방정식을 풀어야 하는데 비하여 변수의 수를  $(C_1+C_2+1)$ 개로 줄여서 푼다는 것이다. 모든 상태의 확률을  $p(0, j)$ ,  $j=0, 1, \dots, C_2$  와  $p(i, C_2+1)$ ,  $i=0, 1, \dots, C_1-1$ 로 표시하기 위하여 앞서 제시된 균형 방정식을 다음과 같이 변형하여 축차적(recursive)으로 적용한다.

$$\begin{aligned} p(1, j) &= (\alpha + \beta) p(0, j+1) - \beta p(0, j+2), & 0 \leq C_2 \\ p(1, C_2) &= (\alpha + \beta) p(0, C_2+1), \\ p(i, j) &= (1 + \alpha + \beta) p(i-1, j+1) - \beta p(i-1, j+2) - \alpha p(i-2, j+1), & 2 \leq i \leq C_1, \quad 0 \leq C_2 \\ p(i, C_2) &= (\alpha + \beta) p(i-1, C_2+1) - \alpha p(i-2, C_2+1), & 2 \leq i \leq C_1. \end{aligned} \quad (10)$$

이상의 결과를 종합하면 원래의 상태의 확률들뿐 아니라 기계1과 기계2의 주변 확률들을 모두  $p(0,j), j=0,1,\dots,C_2$ 와  $p(i,C_2+1), i=0,1,\dots,C_1-1$ 로 표시할 수 있다는 것을 알 수 있다. 이렇게 표시한 것을 식 (3)에 대입하여 얻어진 총  $(C_1+C_2+3)$ 개의 식을 풀면 이들의 값을 구해낼 수 있다. 단, 언급할 사항은  $(C_1+C_2+3)$ 개의 식 중에서 두개의 식은 불필요(redundant)하다는 것이다. 하나의 식이 불필요한 이유는 정리1과 정리2에서 주변 확률을 구하는 과정에서 확률 분포의 합이 1이라는 조건이 각각 1번씩 총 두번 사용되었기 때문이다. 다른 하나의 식이 불필요한 이유는 정리 1에서  $P_1(C_1)=\alpha^2 P_1(B_1-2)$ 의 관계에 의하여 설명된다. 이상을 정리하면 아래와 같은 해법으로 요약된다.

**2대의 기계로 구성된 시스템의 해법**

- 1 단계. 모든 상태의 확률(state probabilities)을 식 (10)에 의해  $(C_1+C_2+1)$ 개의 확률  $p(0,j), j=0,1,\dots,C_2$ 와  $p(i,B_2+1), i=0,1,\dots,B_1-1$ 로 표시한다.
- 2 단계. 기계1과 기계2의 주변확률(marginal state probability)들을 정리1과 정리2의 결과를 이용하여  $(C_1+C_2+1)$ 개의 확률  $p(0,j), j=0,1,\dots,C_2$ 와  $p(i,C_2+1), i=0,1,\dots,C_1-1$ 로 표시한다.
- 3 단계. 1 단계와 2 단계의 결과를 식(3)에 적용하여 연립방정식을 풀어서  $(C_1+C_2+1)$ 개의 확률  $p(0,j), j=0,1,\dots,C_2$ 와  $p(i,C_2+1), i=0,1,\dots,C_1-1$ 의 값을 구한다.
- 4 단계. 식(10)을 다시 이용하여 모든 상태의 확률을 구한다.

**IV. k대의 기계로 구성된 시스템의 분석**

k대의 기계로 구성된 시스템을 분석하는 방법은 2대의 기계에 대한 방법을 반복적으로 적용함으로써 얻어진다. 원래의 시스템의 분석의 어려움은 블로킹(blocking)에 의하여 발생한다. 따라서 본 논문에서 제시하는 방법은 각 기계에서의 블로킹 확률(blocking probability)을 추적함으로써 이루어진다. 먼저 Fig.1의 시스템을 Fig.2와 같이  $(k-1)$ 개의 시스템으로 분할한다.

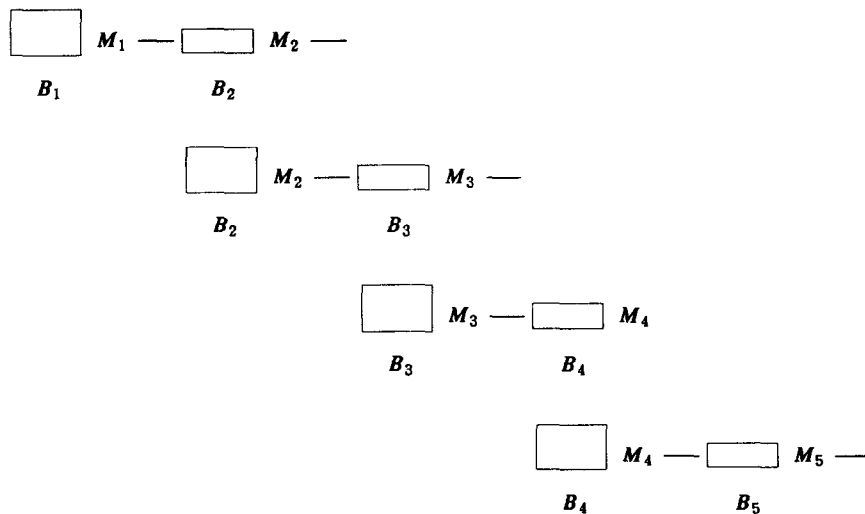


Fig.2.  $(k-1)$  Two-machine System

분할된 하나의 시스템에서는 블로킹이 첫번째 기계에서만 발생하며, 블로킹된 상태에서는 실제로 기계가 가동되지 못하는 효과를 가져온다. 따라서  $i$ 번째의 분할된 시스템에서  $M_i$ 이 가동될 확률은  $1-P_i(0)-P_i(C_i+1)$ 이 되며, 이러한 내용을 반영하여  $(i+1)$ 번째의 분할된 시스템의 도착분포의 모수를  $\mu_i\{1-P_i(0)-P_i(C_i+1)\}$ 로 변경시킨다. 이런 방법으로  $(k-1)$ 번째 시스템까지 풀면  $(k-1)$ 번째 기계의 가동확률  $1-P_k(0)$ 을 구할 수 있다.

다음에는 블로킹이 있는 직렬형 대기행렬이 갖는 可逆性(reversibility)을 적용한다[9]. 블로킹이 있는 직렬형 대기행렬에서의 가역성이란 시스템에 제품이 원래와는 반대의 순서로 움직여도 같은 확률분포를 갖는다는 것이다. 따라서 앞에서 정방향으로 풀  $(k-1)$ 번째 시스템의 결과를 이용하여 역방향으로 도착분포의 모수가  $\mu_k\{1-P_k(0)\}$ 인  $(k-1)$ 번째 역방향 시스템부터 풀어 나간다. 이때  $i$ 번째 역방향 시스템은  $B_k, M_{k-1}, B_{k-1}, M_{k-2}$ 의 순서로 배치되어 있다. 첫번째 역방향 시스템까지 도달하면 다시 첫번째의 정방향 시스템을 분석한다. 이러한 방법을 반복하면 원래의 시스템에 대한 근사해를 구할 수 있다. 지금까지의 내용을 정리하면 아래와 같다.

#### k대의 기계로 구성된 시스템의 해법

- 1 단계.  $(k-1)$ 개의 분할된 시스템을 정방향 으로 2대의 기계로 구성된 시스템의 해법을 이용하여 푼다. 이때  $i$ 번째 시스템의 도착분포의 모수는  $(i-1)$ 번째의 시스템에서 구한 확률을 이용하여  $\mu_{i-1}\{1-P_{i-1}(0)-P_{i-1}(C_{i-1}+1)\}$ 로 변경한다.
- 2 단계. 1단계의  $(k-1)$ 번째 정방향 시스템에서 얻은  $\mu_k\{1-P_k(0)\}$ 를 도착분포의 모수로하여  $(k-1)$ 번째 역방향 시스템을 풀고 첫번째까지의 역방향 시스템을 푼다. 이때  $i$ 번째 역방향 시스템의 도착분포의 모수는  $\mu_{i+1}\{1-P_{i+1}(0)-P_{i+1}(C_{i+1}+1)\}$ 이다.
- 3 단계. 수렴 조건(예를 들어 정방향과 역방향에서의 각 기계의 블로킹 확률의 차이의 절대값중 최대값)이 만족되면 반복을 끝내고, 아니면 첫번째 정방향 시스템의 도착분포의 모수를  $\mu_0\{1-P_1(0)\}$ 로 하고 1 단계로 간다.

#### V. 결 론

$k$ 대의 기계로 구성된 시스템을 분석하는 방법은 직렬형 대기 행렬로 모형화하여 분석할 수 있으나 제한된 크기의 버퍼를 가진 경우에는 문제의 크기가 기계의 수에 따라 기하 급수적으로 증가하기 때문에 정확한 해를 구하는 것이 실제로 거의 불가능하다. 본 논문에서는 이러한 시스템중 2대의 기계에 대한 방법을 기초로 하여 여러대의 기계로 구성된 시스템을 효과적으로 분석할 수 있는 방법을 제시하였다. 실제 프로그램에 의한 테스트 결과로는 대개 10회 전후의 반복 횟수 이내에 만족할 만한 수준의 정확도를 갖는 해를 얻는 것으로 나타났다.

본 연구에서는 도착 분포의 모수와 기계의 작업시간 분포의 모수를 고정시켰으나 이들 모수가 그 기계에 속한 버퍼의 재공품의 수에 따라 변하는 경우에도 분석 방법은 달라지지 않는다.

보다 실제적인 효용이 있는 연구중의 하나로 시스템의 성능을 최대로 할 수 있는 생산 시스템의 설계 문제가 있다. 본 논문의 결과가 그러한 문제를 해결하는 밑바탕이 된다면 더욱 좋으리라 생각된다.

## 참 고 문 헌

1. T. Ahtiok, "Approximate Analysis of Exponential Tandem Queues with Blocking," *European J. Operational Res.*, 11, 390-398, 1982.
2. F. Baskett, K. M. Chandy, R. R. Muntz, and F. G. Palacios, "Open, Closed, and Mixed Networks of Queues with Different Classes of Customers," *J. of ACM*, 22(2), 248-260, 1975.
3. A. Brandwajn and Y-L. L. Jow, "An Approximation Method for Tandem Queues with Blocking," *Operations Research*, 36(1) 73-83, 1988.
4. Y. F. Choong and S. B. Gershwin, "A Decomposition Method for Approximate Evaluation of Capacitated Transfer Lines with Unreliable Machines and Random Processing Times," *IIE Trans.*, 19(2), 150-159, 1987.
5. S. B. Gershwin, "An Efficient Decomposition Method for the Approximate Evaluation of Tandem Queues with Finite Storage Space and Blocking," *Operations Research*, 35(2), 291-305, 1987.
6. J. R. Jackson, "Jobshop-like Queueing Systems," *Management Science*, 10(1), 131-142, 1963.
7. H. G. Perros and T. Ahtiok, "Approximate Analysis of Open Networks of Queues with Blocking: Tandem Configurations," *IEEE Trans. Soft. Eng.*, 12(3), 450-461, 1986.
8. P. J. Schweitzer, W. E. Simon, and T. Ahtiok, "Aggregation Modelling of Tandem Queues with Blocking," in *Mathematical Computer Performance and Reliability*, G. Iazeolla, P. J. Courtois, and O. J. Boxma (Eds.), Elsevier (North Holland), 135-149, 1988.
9. G. Yamazaki, T. Kawashima, and H. Sakasegawa, "Reversibility of Tandem Blocking Queueing Systems," *Management Science*, 31(1), 78-83, 1985.