

複合要素法을 이용한 港内 波浪 應答 數值解析 Numerical Analysis of Wave Agitations in Arbitrary Shaped Harbors by Hybrid Element Method

鄭遠武* · 片宗根** · 鄭信澤* · 鄭景太*

Weon Mu Jeong*, Chong Kun Pyun**, Shin Taek Joeng* and Kyung Tae Jung*

要旨 : 短週期波의 港内 浸入·變形에 의한 水面攪亂 現象을 效果의으로 豫測하기 위한 數值模型을 제안하였다. 海底面 摩擦을 고려한 緩傾斜 方程式을 基本으로 하고 固體 境界面에서는 部分吸收 境界條件을 사용하였다. 防波堤 周邊과 港内 領域은 有限要素로 模型化하고 港外 領域에서는 Helmholtz 方程式의 解析解를 사용하는 複合要素法을 이용하였다. Chen과 Mei(1974)의 方法에 따라 境界值 問題의 凡函數를 구한 후 構成되는 最終的인 聯立方程式을 Gauss 消去法으로 푸는 數值模型을 樹立하였다. 兩翼防波堤에 의한 波의 廻折에 대한 水理模型實驗(Pos and Kilner, 1987)과 數值計算을 비교한 결과 兩者가 양호하게 일치하여 本 數值模型의 妥當성이 檢證되었다. 本 模型은 有限差分 模型에 비해 境界面과 反射의 처리가 精確한 반면 相對的으로 커다란 컴퓨터 記憶容量을 필요로 하므로 四角形 要素를 使用하는 등의 改善이 要求되었다.

Abstract □ A numerical model using Hybrid Element Method(HEM) is presented for the prediction of wave agitations in a harbor which are induced by the intrusion and transformation of incident short-period waves. A linear mild-slope equation including bottom friction is used as the governing equation and a partial absorbing boundary condition is used on solid boundaries. Functional derived in the present paper is based on the Chen and Mei(1974)'s concept which uses finite element net in the inner region and analytical solution of Helmholtz equation in the outer region. Final simultaneous equations are solved using the Gaussian Elimination Method. The model appears to be reasonably good from the comparison of numerical calculation with hydraulic experimental results of short-wave diffraction through a breakwater gap(Pos and Kilner, 1987). The problem of requiring large computational memory could be overcome using 8-noded isoparametric elements.

1. 緒 論

우리나라에서는 최근 道路, 港灣施設 等の 容量 不足으로 인한 經濟的 損失이 크게 증가되어 이에 대한 對策의 일환으로 既存 港灣의 擴張과 新港灣의 建設 및 港灣施設의 現代化가 계속 요구되고 있다. 이와 관련하여 既存 港灣 및 新港灣을 효율적으로 利用하기 위해서는 港灣의 주요 기능중의 하나인 港灣靜穩度를 확보할 수 있는 종합적인 研究가 遂行되어야 할 것으로 사료된다. 本 論文에서는 上記 港灣靜穩度에 영향을 미치는 因子인 短週期波, 長週期波,

바람 및 潮流 中에서도 과거부터 港内 水面攪亂現象의 主된 原因으로 평가되는 週期 수십초 미만의 短週期波의 港内浸入, 變形을 보다 精確하게 豫측할 수 있는 數值模型에 대해 研究하였다.

1960년대까지 屈折과 廻折을 달리 고려하던 波의 解析 方法은 Berkhoff(1972)가 緩傾斜方程式(mild-slope wave equation)을 유도하고 有限要素法을 이용하여 算 후 屈折과 廻折을 동시에 고려하게 되었다. Berkhoff(1972, 1975, 1976)는 境界值 問題에 대해 變分原理에 입각하여 緩傾斜方程式을 풀었으나 變分 問題에서 모든 未知 媒介變數를 포함시키지 않았기에

*韓國海洋研究所 沿岸工學研究室(Coastal Engineering Laboratory, Korea Ocean Research and Development Institute, Ansan P.O. Box 29, Seoul, 425-600, Korea)

**明知大學校 土木工學科(Department of Civil Engineering, Myong Ji University, Seoul, 120-728, Korea)

최종적인 線形方程式系는 非對稱이었다. Chen과 Mei (1974)는 Berkhoff(1972)와는 달리 變分 數式化를 도입하여 線形 淺海波 方程式을 풀었다. 對象領域 外部의 速度 포텐셜을 나타내기 위하여 級數 展開를 사용한 이 方法은 對稱인 線形 方程式系를 결과로서 제시하였다. 한편, 高山(1981)은 Sommerfeld의 解를 重疊하는 方法을 이용하여 規則波 및 不規則波를 이용한 港内波高 計算法을 제시하였다. 이후 Copeland (1985), 丸山과 鹿島(1985), 磯部 等(1987)이 屈折·廻折·多重反射에 의한 港内波高 計算方法을 제시하였다. 이들은 모두 有限差分法으로 問題의 解를 구하였으나 Bettess 등(1984)은 無限要素를 이용한 有限要素 模型을 開發하였다. 한편, 덴마크 水理研究所 (DHI)에서는 Boussinesq 方程式에 Sponge layer 境界를 사용한 有限差分 模型을 開發하여 效率性을 立證하였다. 그리고, 최근 Crawford와 Chen(1988), Lillycrop 등(1990)은 複合要素 模型을 이용하여 小規模 港灣에서 反射를 고려한 港内波高를 計算하였다. 短週期波의 多重反射를 포함한 港内波高 計算法에 대한 國內의 研究는 建設部(1987)와 釜山直轄市(1990)를 들 수 있는데 이는 Copeland(1985)의 方法과 매우 유사하다.

本 研究에서는 前述한 연구자들중 대부분이 채택한 有限差分法 대신 境界面과 反射의 처리에 장점을 지닌 有限要素法을 이용한 數値模型技法에 대해 연구하였다. 本 方法은 内部領域을 有限要素로 近似化하고 外部領域을 固有函數의 級數解로 나타내어 이들을 假想境界에서 接合시켜서 解를 구하는 複合要素法 (Hybrid Element Method)을 사용하였다. 基本方程式으로 淺海波 方程式을 사용한 Chen과 Mei(1974)와는 달리 海底面 摩擦을 고려한 緩傾斜 方程式을 사용하여 長·短週期波를 모두 解析할 수 있게 數値模型의 適用性을 提高하였다. 또한, 固體 境界面에서의 部分反射 效果도 고려하였다. 凡函數의 積分과 聯立方程式을 푸는 方法은 Chen과 Mei(1974)와 同一하다. 本 수치모형의 타당성과 적용성을 입증하기 위하여 完全開放 直四角形 港灣 및 兩翼防波堤를 통과하는 波의 廻折에 대해 실시된 水理模型實驗 結果와 비교하는 例題 解析을 수행하였다.

2. 境界值 問題의 數式化

2.1 基本方程式

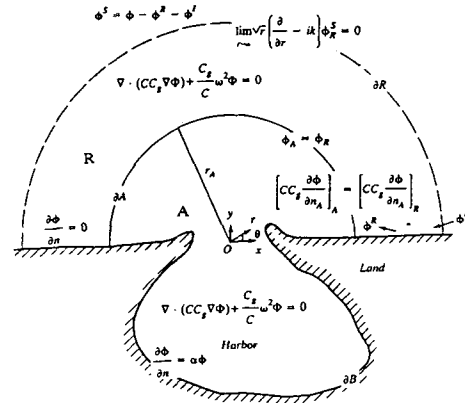


Fig. 1. Definition sketch for a harbor with a straight coastline.

非粘性 및 非壓縮性 流體에서의 非回轉流 假定下에서 緩傾斜 海底面의 變水深위를 傳播하는 微小振幅의 單調 入射波에 대한 波動場은 다음 式으로 표현할 수 있다(Chen, 1986).

$$\nabla \cdot (\lambda C C_g \nabla \phi) + \frac{C_g}{C} \omega^2 \phi = 0 \quad (1)$$

여기서, $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j$, C_g 는 群速度, C 는 波速, $h(x, y)$ 는 水深, ω 는 角周波數, $\phi(x, y)$ 는 空間速度포텐셜이다. 式에서 群速度 C_g 와 波速 C 는 각각 다음 式과 같다.

$$C_g = \frac{C}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (2)$$

$$C^2 = \frac{g}{k} \tanh kh \quad (3)$$

k 는 波數를 나타내며, 本 研究에서는 편의를 위해 Fig. 1에 제시한 바와 같이 直交座標系(x, y, z)와 圓筒座標系(r, θ, z)를 함께 사용하였다. 그리고, λ 는 다음 式으로 제시된다(Chen, 1986).

$$\lambda = \frac{1}{1 + i \frac{\beta a_0}{h \sinh kh} e^{i\gamma}} \quad (4)$$

上記 式에서 海底面 摩擦의 位相差($-\pi/4$)는 一般의 項 γ 로 置換되었으며, β 는 無次元의 空間海底面 摩擦係數이다. 그리고, a_0 는 入射波의 振幅을 나타낸다. 式 (1)의 誘導過程에서 다음의 分散關係式이 제시된

다.

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (5)$$

식 (1)이 본 研究에서 사용한 基本方程式으로 이는 海底面 摩擦을 나타내는 λ 를 1로 놓으면 Berkhoff (1972)가 제시한 다음 式이 된다.

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \phi) + \frac{C_g}{C} \omega^2 \phi = 0 \quad (6)$$

2.2 部分吸收 境界條件

構造物, 海岸 境界 等에서는 波의 完全吸收가 일어나기 어려우므로 部分吸收 境界條件을 도입하였다. 部分吸收는 일반적으로 複素數인 吸收係數에 의해 표현되며 이는 Mei와 Chen(1975), Berkhoff(1976), Rottmann과 Zielke(1983), Chen(1984, 1986, 1990), Lee(1989) 등이 사용한 바 있다. 긴 直線 形態의 海岸線에 入射하는 淺海波에 대해서는 半經驗的으로 複素數 反射係數 K_r 을 도입할 수 있다. 이 反射係數는 波浪의 周波數와 振幅, 海岸線이나 防波堤의 형태 및 空隙率(porosity)의 函數이다. x 방향으로 傳播하는 波가 海岸線에 대해 垂直으로 入射하는 것으로 하면 入射波와 反射波를 합한 全體 波浪은 다음 式으로 주어진다.

$$\phi e^{-i\omega t} = -\frac{iga_0}{\omega} (e^{ikx} + K_r e^{-ikx}) e^{-i\omega t} \quad (7)$$

그리고, 表面에 대한 垂直 傾斜(normal surface slope)는 다음과 같다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} e^{-i\omega t} = \frac{ga_0 k}{\omega} (e^{ikx} - K_r e^{-ikx}) e^{-i\omega t} \quad (8)$$

上記 式들로부터 海岸線이나 防波堤 等の 固體 境界面에서는 다음 式이 成立함을 알 수 있다.

$$\phi = -\frac{iga_0}{\omega} (1 + K_r) \quad (9a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{ga_0 k}{\omega} (1 - K_r) \quad (9b)$$

이를 정리하면 다음 式이 된다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \alpha \phi \quad \text{at } x=0 \quad (10)$$

여기서,

$$\alpha = ik \frac{1 - K_r}{1 + K_r} \quad (11)$$

긴 消波性 防波堤(long dissipative breakwater)를 가진 港灣에서는 상기 조건을 境界條件으로 취급할 수 있으며, 이는 完全 反射의 경우 다음 式이 된다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{at } x=0 \quad (12)$$

2.3 入射波와 反射波

單調(monochromatic) 平面 入射波만을 선택하면 極座標系에서 入射波의 포텐셜은 式 (13)으로 주어지며, 이는 Jacobi-Anger 展開에 의하여 級數 形態의

$$\phi' = -\frac{iga_0}{\omega} e^{ikr \cos(\theta - \theta')} \quad (13)$$

$$= -\frac{iga_0}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(kr) (\cos n\theta' \cos n\theta + \sin n\theta' \sin n\theta) \quad (14)$$

여기서, ϵ_n 은 Newman 係數($\epsilon_n = 1 : n=0 ; \epsilon_n = 2 : n=1, 2, 3, \dots$)이다.

Fig. 1에 제시된 直線 海岸線의 경우에는 다음과 같이 표현할 수 있는 反射波 ϕ^R 이 存在한다.

$$\phi^R = -\frac{iga_0}{\omega} K_r e^{ikr \cos(\theta + \theta')} \quad (15)$$

$$= -\frac{iga_0}{\omega} K_r \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(kr) (\cos n\theta' \cos n\theta - \sin n\theta' \sin n\theta) \quad (16)$$

入射波와 反射波의 合은 다음 式으로 제시될 수 있다.

$$\phi' + \phi^R = -\frac{iga_0}{\omega} [(1 + K_r) \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(kr) \cos n\theta' \cos n\theta + (1 - K_r) \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(kr) \sin n\theta' \sin n\theta] \quad (17)$$

만일 境界가 完全 反射($K_r = 1.0$)하면 上記 式은 다음과 같이 간단해진다.

$$\phi' + \phi^R = -\frac{2iga_0}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(kr) \cos n\theta' \cos n\theta \quad (18)$$

領域 R에서는 水深 h가 一定한 것으로 假定하므로 散亂波의 支配 方程式은 Helmholtz 方程式이 된다. n이 固定되고 |kr|→∞일 때 Hankel 函數를 漸近 展開(asymptotic expansion)하면 다음 近似式을 얻는다.

$$H_n^{(1)}(kr) = \left[\frac{2}{\pi kr} \right]^{1/2} e^{i \left(kr - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}, \quad 0 < \theta < \pi \quad (19a)$$

$$H_n^{(2)}(kr) = \left[\frac{2}{\pi kr} \right]^{1/2} e^{-i \left(kr - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}, \quad -\pi < \theta < 0 \quad (19b)$$

따라서, 遠海域 R에서 $H_n^{(2)}$ 는 제외되어야 한다. 그리고, $H_n^{(1)}$ 은 前述한 바와 같이 放射條件을 만족시켜야 하는 放出波(outgoing waves)의 解로 적합하다.

遠海域 R에서는 解析解가 可能하도록 一定 水深을 假定하며, 또한 遠海域에서의 海底面 摩擦은 적용시 主關心事가 아니므로 그 存在를 무시한다. 그러면, Complex argument를 가진 Hankel 函數의 計算을 피할 수 있을 뿐만 아니라 無限 遠方에서의 入射波도 의미를 가지게 된다. 遠海域에서의 解析解는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\phi^S = -\frac{iga_0}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(kr)}{H_n(kr_A)} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \quad (20)$$

여기서, α_n, β_n 는 결정해야 할 常數들로서 $\alpha_n = 0, 1, 2, \dots (n=1, 2, \dots), \beta_n = 0, 1, 2, \dots (n=1, 2, \dots)$ 이며, r_A 는 Fig. 1에 나타낸 것처럼 常數로 주어지는 有限領域의 半徑이다. 直線 海岸線을 가진 半無限領域에서는 海岸線에서 完全 反射를 假定하면 散亂波에 대하여 다음 式으로 제시할 수 있다.

$$\phi^S = -\frac{iga_0}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(kr)}{H_n(kr_A)} \alpha_n \cos n\theta \quad (21)$$

3. 變分 數式化

變分法의 理論에 의거, 境界值 問題는 관련된 凡 函數 $F(\phi)$ 가 $\delta F = 0$ 를 만족시키는 條件을 구하는 問題로 轉換하여 풀 수 있다. 이러한 문제에 대한 關聯 凡函數는 複素 變分(Complex variation) $\delta\phi$ 에 의해

支配方程式을 加重 積分하고 Green의 第1等式 (Green's first identity)과 發散定理(Divergence theorem)를 導入하며 境界條件을 線積分 또는 面積分에 代입함으로써 구할 수 있다.

Fig. 1에 제시한 바와 같이 境界 $\partial A, \partial B, \partial R$ 에 의해 원래의 領域이 2개의 副領域 A, R로 區分되는 것으로 한다. 領域 R은 ∂A 外側의 모든 遠海域(Far field)을 포함한다. 편의를 위해 境界 ∂A 는 圓을 선택하였으며 領域 R에서는 水深이 一定한 것으로 한다. 그리고, 境界 ∂B 가 固體境界面을 나타낼 때 境界值 問題를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\nabla \cdot (\lambda C C_g \nabla \phi) + \frac{C_g}{C} \omega^2 \phi = 0 \quad \text{in } A, R \quad (22a, b)$$

$$\phi_R = \phi_A \quad \text{on } \partial A \quad (23)$$

$$\left[\lambda C C_g \frac{\partial \phi}{\partial n_A} \right]_R = \left[\lambda C C_g \frac{\partial \phi}{\partial n_A} \right]_A \quad \text{on } \partial A \quad (24)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \alpha \phi \quad \text{on } \partial B \quad (25)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (r)^{1/2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik \right) \phi_R^S = 0 \quad \text{along } \partial R \quad (26)$$

아래 添字 A, R은 각각 領域 A, R에서의 값을 나타내며, n_A 는 영역 A에 垂直한 方向의 變位로 外向이 陽(+)의 값을 갖는다.

上記 境界值 問題는 前述한 方法에 따라 적절한 數學的 過程을 거치면 다음과 같이 關聯 凡函數를 구할 수 있다(鄭, 1991 參照).

$$\begin{aligned} F(\phi) = & \iint_A \frac{1}{2} \left[\lambda C C_g (\nabla \phi)^2 - \frac{C_g}{C} \omega^2 \phi^2 \right] \quad I_1 \\ & + \int_{\partial A} \frac{1}{2} \lambda C C_g (\phi_R - \phi') \frac{\partial (\phi_R - \phi')}{\partial n_A} \quad I_2 \\ & - \int_{\partial B} \frac{1}{2} C C_g \alpha \phi^2 \quad I_3 \\ & - \int_{\partial A} \lambda C C_g \phi_A \frac{\partial (\phi_R - \phi')}{\partial n_A} \quad I_4 \\ & - \int_{\partial A} \lambda C C_g \phi_A \frac{\partial \phi'}{\partial n_A} \quad I_5 \\ & + \int_{\partial A} \lambda C C_g \phi' \frac{\partial (\phi_R - \phi')}{\partial n_A} \quad I_6 \end{aligned}$$

$$-\int_{\partial A} \lambda CC_g \phi' \frac{\partial \phi'}{\partial n_A} \quad I_7 \quad (27)$$

變分 數式化에서 境界面에서의 에너지 吸收를 說明하기 위해서 I_3 項이 포함되었다.

4. 有限要素 近似

前述한 바와 같이 全體 計算領域은 副領域 A와 R로 구분된다(Fig. 1). 副領域 R에서는 係數形要素(coefficient type element)를 선택하며, 副領域 A는 3개의 節點(node)을 가진 微小 三角形要素로 分割한다. 各要素內에서 포텐셜 ϕ 는 要素의 節點(nodal point) i 에서 節點值(nodal value) ϕ_i 의 未知數를 가진 形象函數(shape function) N_i ($i=1, 2, 3$)의 線形的 結合으로 近似된다. 즉, e 번째 要素에서는 다음과 같다.

$$\phi^e = [N^e]^T \{\phi^e\} \quad (28)$$

方程式 (14), (17) 및 (21)로 주어지는 級數解들은 領域 R을 포함하는 式 (27)에서의 積分을 算定하는데 사용되는 반면, 式 (28)은 領域 A를 포함하는 積分을 산정하는데 사용된다. 간편을 위해 ∂A 를 반경 r_A 인 圓으로 선택하였다.

式 (27)의 첫번째 積分(I_1)은 다음과 같다.

$$I_1 = \frac{1}{2} \{\phi\}^T [K_1] \{\phi\} \quad (29)$$

여기서,

$$[K_i] = \left[\frac{\lambda CC_g}{4\Delta^e} K_{ij} \right]^e \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (30)$$

$$K_{ij} = \begin{cases} b_j^2 + c_j^2 - \frac{2(\Delta^e)^2}{3} \frac{\omega^2}{\lambda C^2} & (i=j) \\ b_i b_j + c_i c_j - \frac{(\Delta^e)^2}{3} \frac{\omega^2}{\lambda C^2} & (i \neq j) \end{cases} \quad (31)$$

行列 $[K_i]$ 는 要素 剛性行列(element stiffness matrix)로서 對稱이다.

式 (27)에서의 積分 I_2 를 算定하는 데는 式 (21)로 주어지는 補間函數를 사용하며 $n=S$ 로 無限級數의 數를 제한하였다.

$$I_2 = \frac{1}{2} \{\mu\}^T [K_2] \{\mu\} \quad (32)$$

여기서는 散亂波를 나타내는 다음의 行 벡터(row vector)를 導入하였다.

$$\{\mu\}^T = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_S\} \quad (33)$$

이는 $M=S+1$ 개의 成分을 가지며, $[K_2]$ 는 대각행렬(diagonal matrix)로 다음과 같다.

$$[K_2] = \pi r_A k \lambda CC_g \left(-\frac{iga_0}{\omega} \right)^2 \left[\text{diag} \left(\frac{H'_0}{H_0}, \frac{1}{2} \frac{H'_1}{H_1}, \frac{1}{2} \frac{H'_2}{H_2}, \dots, \frac{1}{2} \frac{H'_n}{H_n} \right) \right] \quad (34)$$

세번째 積分 I_3 는 固定境界 ∂B 의 節點인 nB 에서 하나의 頂點(Vertex)을, 그리고 境界에서 하나의 側面을 가지는 要素들의 境界 側面을 연하여 算定되어야 한다. 吸收 境界條件에 의한 既知값들을 全體 剛性行列(global stiffness matrix)에 再配置하기 위하여 ϕ_{nB} 에 관한 積分 I_3 의 1次 變分을 内部 節點인 各々の 節點 n 에 대해 유도해야 한다.

$$\frac{\partial I_3}{\partial \phi_{nB}} = - \sum_{nB=1}^{B-1} \left\{ L_L \frac{(\lambda CC_g \alpha)_{nB}}{6} (\phi_{nB-1} + 2\phi_{nB}) + L_R \frac{(\lambda CC_g \alpha)_{nB}}{6} (2\phi_{nB} + \phi_{nB+1}) \right\} \quad (35)$$

여기서, L_L 과 L_R 은 各各 nB 의 左側과 右側까지의 側面 길이이다. 그리고, B 는 吸收境界 ∂B 상의 全體 節點數를 나타낸다. 계산된 값은 全體 剛性行列(global stiffness matrix)에 할당된다.

4번째와 5번째 積分에 대해서는 半圓 ∂A 를 P 개의 節點에 의해 $(P-1)$ 개의 同一線分(Segment)으로 分割하며, ∂A 상의 節點值를 다음과 같이 行 벡터로 표시한다.

$$\{\bar{\phi}\}^T = \{\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \dots, \bar{\phi}_P\} \quad (36)$$

各 線分の 길이는 다음과 같다.

$$L_A = \frac{1}{2} \frac{2\pi r_A}{(P-1)} = \frac{\pi r_A}{(P-1)} \quad (37)$$

L_A 의 값을 매우 작게 취하면 ∂A 의 各 線要素(line element)에 대해 ϕ_A 를 2개의 節點에서의 ϕ_A 의 平均에 의해 近似化하게 된다. 한편, 積分 範圍를 L_A 로, 그리고 $(\phi_R - \phi')$ 에서의 θ 값을 線要素의 中央點에서의 값인 θ_c 로 대체하게 된다. 따라서, 4번째 積分은 다음

式으로 주어진다.

$$I_4 = \frac{1}{2} \{\bar{\phi}\}^T [K_4] \{\mu\} + \frac{1}{2} \{\mu\}^T [K_4]^T \{\bar{\phi}\} \quad (38)$$

여기서, $[K_4]$ 는 다음 式으로 주어지는 直四角形의 $P \times (S+1)$ 行列이다.

$$[K_4] = -\frac{1}{2} k \lambda C C_g L_A \left(-\frac{i g a_0}{\omega} \right) \begin{bmatrix} \frac{H'_0}{H_0} \cdots \frac{H'_n}{H_n} \cos n \theta_1 & \cdots \\ 2 \frac{H'_0}{H_0} \cdots \frac{H'_n}{H_n} (\cos n \theta_1 + \cos n \theta_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ 2 \frac{H'_0}{H_0} \cdots \frac{H'_n}{H_n} (\cos n \theta_{P-2} + \cos n \theta_{P-1}) & \cdots \\ \frac{H'_0}{H_0} \cdots \frac{H'_n}{H_n} \cos n \theta_{P-1} & \cdots \end{bmatrix} \quad (39)$$

여기서, $n=1, 2, \dots, S$ 이다. $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{P-1}$ 은 각각 ∂ A상의 첫번째, 두번째, ..., $P-1$ 번째 線要素에 대한 θ 의 값을 나타낸다. I_4 는 A에서의 節點 未知數(nodal unknown)와 R에서의 未知數사이의 相關關係(cross relation)를 제시한다.

5번째 積分은 다음 式과 같이 제시된다.

$$I_5 = \{Q_1\}^T \{\bar{\phi}\} \quad (40)$$

여기서, 荷重 向量(load vector) $\{Q_1\}^T$ 는 다음과 같은 $1 \times P$ 行 向量이다.

$$\{Q_1\}^T = \lambda C C_g \left(-\frac{i g a_0}{\omega} \right) \frac{k L_A}{2} \{q_1, q_1 + q_2, q_2 + q_3, \dots, q_{P-2} + q_{P-1}, q_{P-1}\} \quad (41)$$

여기서,

$$q_e = i \cos(\theta_e - \theta') e^{i k r_A \cos(\theta_e - \theta')} + i K_r \cos(\theta_e + \theta') e^{i k r_A \cos(\theta_e + \theta')} \quad (42)$$

여기서, $e=1, 2, \dots, P-1$ 이다.

凡函數의 6번째 積分은 I_2 를 算定할 때와 동일한 방법을 이용하면 다음 式으로 구해진다.

$$I_6 = -\{Q_2\}^T \{\mu\} \quad (43)$$

여기서는 $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ 및 $\cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$

를 이용하였으며, $\{Q_2\}^T$ 는 다음과 같은 $1 \times (S+1)$ 行 向量이다.

$$\{Q_2\}^T = \left(-\pi r_A k \lambda C C_g \right) \left(-\frac{i g a_0}{\omega} \right)^2 \left[(1 + K_r) J_0 \frac{H'_0}{H_0}, i J_1 \frac{H'_1}{H_1} (1 + K_r) \cos \theta', \dots, (i)^S J_S \frac{H'_S}{H_S} (1 + K_r) \cos S \theta' \right] \quad (44)$$

式 (44)중에서 '은 導函數를 나타내며, J_n, H'_n 는 kr_A 의 Argument를 가진다.

한편, 凡函數의 마지막 積分(I_7)은 常數이며, 따라서 極值化(extremization)에 重要하지 않다.

式 (27)의 凡函數에서 모든 積分을 要約하면 다음 式을 얻는다.

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \sum_{e \in A} \{\phi^e\}^T [K_1] \{\phi^e\} + \frac{1}{2} \{\mu\}^T [K_2] \{\mu\} + \frac{1}{2} \{\bar{\phi}\}^T [K_4] \{\mu\} + \frac{1}{2} \{\mu\}^T [K_4]^T \{\bar{\phi}\} - \{Q_1\}^T \{\bar{\phi}\} - \{Q_2\}^T \{\mu\} + \text{Constant} \quad (45)$$

여기서, $[K_1]$ 은 對稱이며, $[K_2]$ 는 對角行列이다. 모든 $\{\phi^e\}$ 의 집합인 전체 節點 向量 $\{\phi\}$ 를 정의하고 要素 行列 $[K_1]$ 를 단일 전체 行列 $[K]$ 로 모으면 다음과 같다.

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_1] & [0] \\ [0] & [K_4]^T & [K_2] \end{bmatrix} \quad (46)$$

全體 荷重 向量 $\{Q\}^T$ 는 다음과 같다.

$$\{Q\}^T = \{\{0\}^T, \{Q_1\}^T, \{Q_2\}^T\} \quad (47)$$

여기서, 零要素(zero element)의 行列에 대해서는 $[0]$.

그리고 零成分(zero component)의 벡터에 대해서는 $\{0\}^T$ 의 記號를 사용하였다. 마지막으로 凡函數 F의 停留性은 다음 式을 의미한다.

$$\frac{\partial F}{\partial \psi_i} = 0 \quad (i=1,2,\dots, N) \quad (48)$$

이는 式 (45)의 觀點에서 다음 式을 제공한다.

$$[K] \{\psi\} = \{Q\} \quad (49)$$

이것은 여러가지 方法에 의해 풀 수 있는 N개의 未知數에 대한 N개의 線形 聯立代數方程式이다(Wilkinson, 1965). 통상 이러한 대수방정식은 Gauss 消去法을 이용하여 푼다.

有限要素法에 의한 계산의 正確度는 波長, 境界形象 및 問題의 特性 等에 의존된다. 상식적으로 要素의 크기는 最短波長 및 最小 曲率半徑보다 작아야 할 것이다. Chen과 Mei(1974)는 數值實驗結果에 근거하여 $l/L < 0.1$ (l 는 三角形 要素의 변의 길이, L 은 波長)을 제시하였다. Crawford와 Chen(1988)은 New York의 Barcelona港에 관한 研究에서 週期 7.5초 및 9.9초의 入射波에 대해 각각 $l/L = 1/6, 1/7, 1/8$ 인 三角形 有限要素網을 작성하고 數值計算을 실시하였다. 이들은 그 결과를 水理模型實驗 結果와 비교하여 1波長當 필요한 三角形 有限要素의 最少數를 7개로 제시하였다.

5. 數值模型의 檢證

5.1 完全開放 直四角形 模型港灣

완전히 開放된 直四角形 港灣에 入射하는 長週期波의 港內 增幅現象에 대한 本 數值模型 適用結果를 Ippen과 Goda(1963), Lee(1969)가 실시한 水理模型實驗 結果와 비교하였다. 이 模型港灣은 Fig. 2에 圖示된 바와 같이 有限要素網으로 구성되는 近海域 A와 解析解로 주어지는 遠海域 R로 구성되었다. 模型港灣의 幅 $b = 2.38$ inch, 길이 $L = 12.25$ inch이며, 水深 h 는 有限要素網으로 構成된 領域 A 및 그 외측의 遠海域 R에서 모두 10.128 inch로 일정하다. 그리고, 港入口의 中心에서 遠海域까지의 半徑 r_A 는 港의 幅과 동일하게 2.38 inch로 하였으며, 入射角 θ' 는 x 축으로부터 反時計 方向을 나타낸다. 이 模型港灣의 有限要素網의 節點數는 309개, 要素數는 518개이며, 1

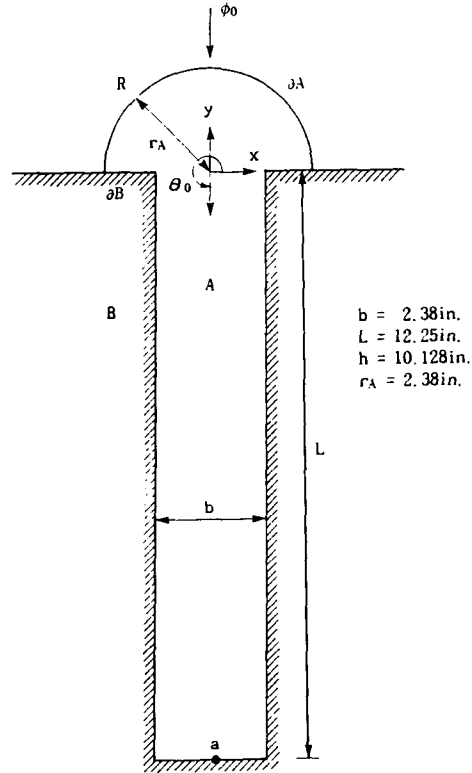


Fig. 2. Definition sketch for a fully open rectangular harbour.

波長當 10개 이상의 三角形 要素가 포함되도록 作成되었다.

入射角이 270°인 波에 대해 港灣의 가장 內側 中央點 $a(0.0, -12.25)$ 에서의 增幅比를 再現하여 水理模型實驗 結果와 비교하였다. Ippen과 Goda(1963) 및 Lee(1969)가 실시한 水理模型實驗과 數值模型實驗은 모두 境界面에서 波가 完全 反射하고 底面에서는 摩擦로 인한 에너지 손실이 없는 것으로 假定하였다. 그러나, 실제의 경우 直立 壁面에서도 약간의 에너지 吸收가 존재하므로 完全反射는 거의 不可能하며, 또한 模型港灣의 底面이 통상 콘크리트로 제작되는 점을 감안하면 어느 정도의 摩擦로 인한 損失이 存在하게 된다. 本 研究에서는 이러한 점을 고려하여 여러가지 反射係數와 摩擦係數로 組合하여 數值實驗을 실시하였다.

Fig. 3에는 直四角形 港灣의 港內 中央點(a)에서의 增幅比에 대한 Ippen과 Goda(1963), Lee(1969)의 水理模型實驗 結果와 本 數值模型에 計算 結果를 圖示

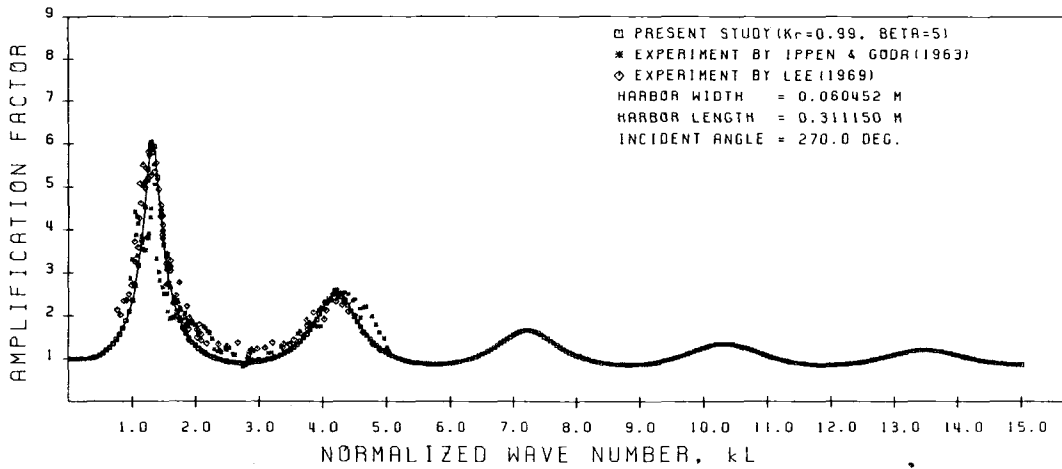


Fig. 3. Comparison of response curves between present study and hydraulic experiment.

하였다. 그림 중에서 가로축은 波數 k 에 港의 길이 L 을 곱한 無次元化된 波數(kL)이며, 세로축은 水面變位(η)를 停滯波의 振幅($2a_0$)으로 나눈 增幅比 $[\eta/2(a_0)]$ 를 나타낸다. 이 數值計算은 無次元 波數 $kL=0.025\sim 15.0$ 에 걸쳐 每 0.025간격으로 실시되었다. 反射係數 $K_r=0.99$, 摩擦係數 $\beta=5.0$, 그리고 波浪 入射角 $\gamma=3\pi/2$ 로 하여 本 數值模型을 적용한 결과 水理模型實驗 결과와 양호하게 일치하여 本 模型의 適用性이 立證되었다.

5.2 Pos와 Kilner(1987)의 模型港灣

短週期波의 경우 港内 多重反射에 관한 水理實驗資料의 입수가 어려워서 防波堤의 開口部를 穿하는 波浪의 廻折에 대해 Pos와 Kilner(1987)가 실시한 水理模型實驗 結果와 比較하였다. 水理模型實驗이 實施된 모형의 平面圖는 Fig. 4에 제시된 바와 같으며, 그림에서 波浪은 造波 地域(paddle area)에서 造波되어 完全 反射하는 壁面을 가진 水路를 통하여 直四角形의 港灣으로 進入한다. 造波 地域의 水深은 0.25 m, 直四角形 港灣의 水深은 0.125m이며, 水路의 시작 부분에는 水路 양쪽의 傾斜面(Slope)과 同一한 傾斜가 存在한다. 直四角形 港灣의 四方 境界中에서 Projector가 설치된 壁面은 完全 反射하는 鉛直 岸壁으로 構成되었으며, 기타 부분은 波가 완전히 吸收되도록 海岸(Beach)으로 構成되었다.

B/L (B 는 水路의 幅으로 0.99m, L 은 入射波長)= 1.64인 경우 Pos와 Kilner(1987)의 實驗 結果를 Fig. 5

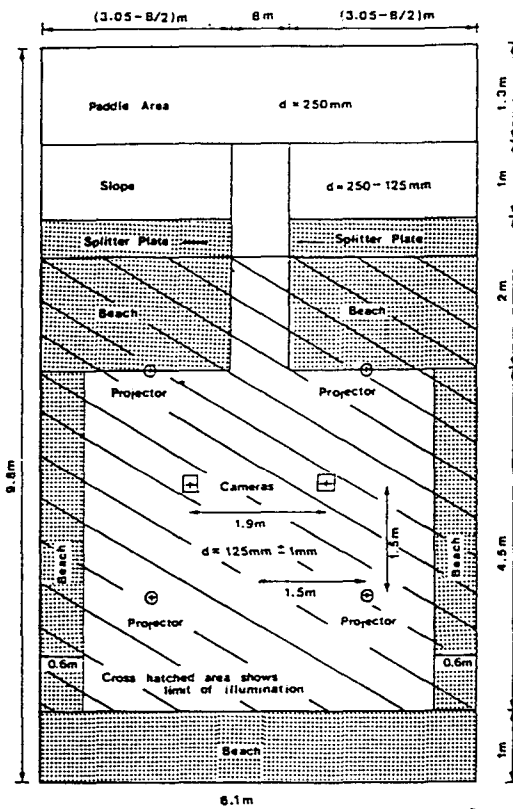


Fig. 4. Generalized breakwater gap configuration(Pos and Kilner, 1987).

에 제시하였다. 그림중에 제시된 等值線의 값은 廻折係數(廻折波高/入射波高)를 나타낸다. Fig. 6은 Bettess 등(1984)이 開發한 有限要素와 無限要素를 이용

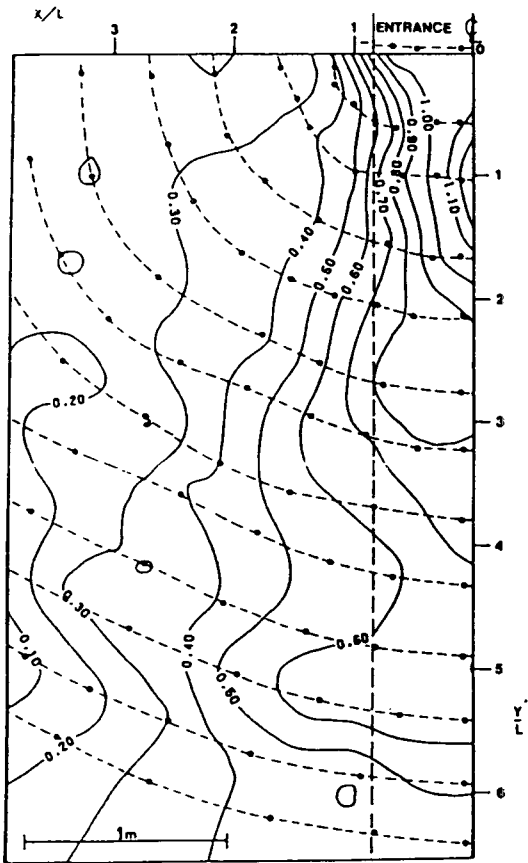


Fig. 5. Breakwater gap diffraction diagram obtained from experiment with $B/L=1.64$ (Pos and Kilner, 1987).

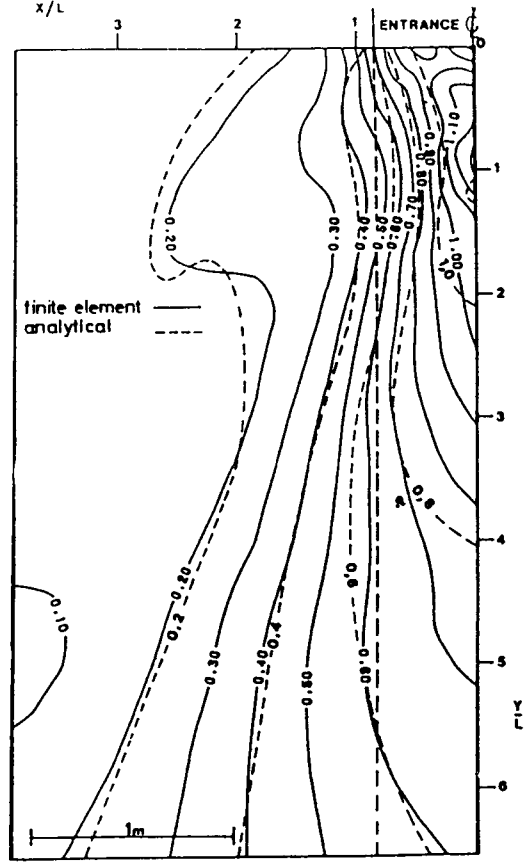


Fig. 6. Breakwater gap diffraction diagram obtained from numerical calculation with $B/L=1.64$ (Pos and Kilner, 1987).

하여 緩傾斜 方程式의 解를 구하는 數值模型 “WAVE”에 의한 計算 結果와 美陸軍 工兵團(CERC)의 Shore Protection Manual(CERC, 1984)에 제시된 解析解를 함께 圖示한 것이다. 그림중에서 實線은 “WAVE”에 의한 計算 結果를, 그리고 點線은 解析解를 각각 나타낸다.

本 研究에 사용된 有限要素網은 1波長當 10개 이상의 三角形 要素가 포함되도록 作成되었으며 6,386개의 節點과 16,303개의 要素로 構成되었다. 前述한 것과 同一한 조건에서 계산한 廻折 係數의 等值線圖를 Fig. 7에 圖示하였다. 이 그림을 살펴보면 等值線의 形態는 기타 數值計算結果들과 비슷하지만 廻折 係數의 크기는 보다 水理實驗 結果에 접근하였음을 알 수 있다. Pos와 Kilner(1987)의 水理模型實驗 結果를 자세히 살펴보면 海岸으로부터 어느 정도의 反射波가 發生하는 것으로 추측할 수 있으며, 이는 水理實驗

與件上 波의 完全 吸收를 달성하기가 매우 어려운 점을 고려할 때 상당한 설득력을 지닌다. 따라서, 本 模型에서는 海岸에서 完全 吸收하는 대신에 $K_r=0.05$ 를 適用하였으며, 그 결과 $K_r=0.0$ 을 適用한 경우보다 廻折係數의 等值線이 외측으로 擴張되어 數值模型이 正確성이 向上되었다.

6. 結論 및 討議

基本方程式으로 海底面 摩擦을 고려한 緩傾斜 方程式을 사용하였으며, 固體 境界面에서는 部分吸收 境界條件을 사용하였다. 計算領域의 縮小를 위하여 防波堤 周邊과 港內 領域은 有限要素로 模型化하고 港外 領域에서는 Helmholtz 方程式의 解析解를 이용하는 複合要素法을 사용하였다. Chen과 Mei(1974)의

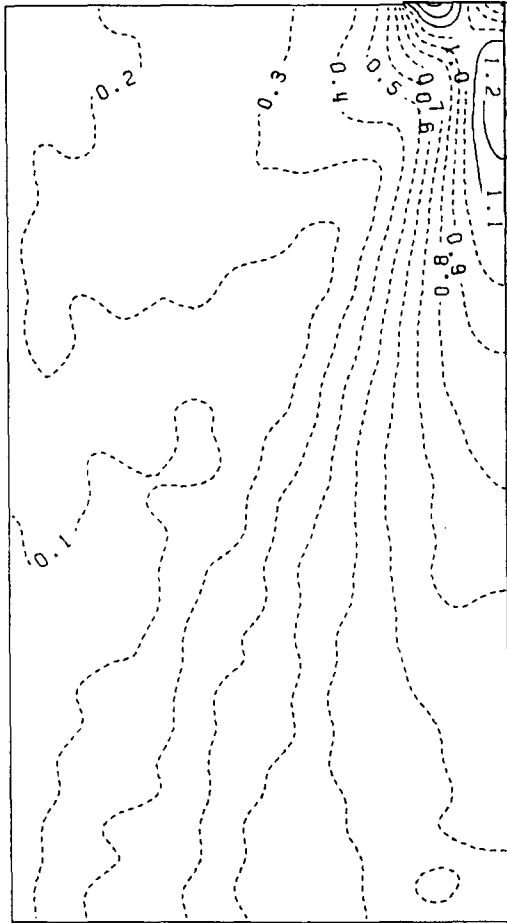


Fig. 7. Calculated amplitude ratios of the incident waves normal to x-axis.

方法을 이용하여 境界值 問題의 凡函數를 구한 후 이를 積分하여 全體行列을 構成하고 最終적으로 聯立方程式을 Gauss 消去法으로 푸는 數值模型을 樹立하였다.

樹立된 數值模型의 適用性を 檢證하기 위하여 兩翼防波堤에 의한 波의 廻折에 대한 Pos와 Kilner(1990) 果 計算된 波高比가 水理實驗 結果와 양호하게 일치하여 本 數值模型의 正確성이 檢證되었다.

短週期波의 경우 計算時間의 制約으로 反射係數의 變化에 따른 港内 廻折波高는 구하지 못하였다. 그러나, Pos와 Kilner(1987)가 完全吸收 境界로 假定한 海岸을 本 數值模型에서 反射係數 $K_r=0.05$ 로 계산한 결과 水理模型實驗 結果에 더 近接하여 部分吸收 境界條件의 適用성이 立證되었다.

本 數值模型은 反射係數와 摩擦係數를 포함하므로 實際 現象과 유사한 結果를 再現할 수 있을 것으로 사료된다. 그러나, 이에 대한 구체적인 現場觀測 및 水理模型實驗 資料가 부족하므로 反射係數와 摩擦係數의 適切한 選定을 위한 研究가 요구된다. 따라서, 상세한 實驗資料를 이용하여 境界 및 海底面의 狀態에 따른 反射係數와 摩擦係數를 定義함으로써 數值模型 結果의 正確度를 向上시켜야 할 것이다.

한편, 本 數值模型은 有限差分 模型과 비교하여 境界面과 反射의 處理가 보다 精確한 반면 컴퓨터의 記憶容量을 더 많이 필요로 하는 短點을 가지고 있어서 大型港灣에 적용하기 어렵다. 그러나, 앞으로 四角形 要素를 사용하여 記憶容量을 줄이는 등의 改善作業이 이루어지면 大型港灣에도 適用할 수 있을 것으로 사료된다.

參考文獻

- 建設部. 1987. 浦項新港 波浪調查 및 모델實驗 用役 報告書, 第2卷 波浪調查 및 모델 實驗編, 440pp.
- 釜山直轄市. 1990. 海上新都市建設 基本計劃 研究用役 數值模型實驗 報告書, 237pp.
- 鄭遠武. 1991. 複合要素法에 의한 港内 波浪 浸入·變形 研究 明知大學校 土木工學科, 碩士學位論文, 169pp.
- Berkhoff, J.C.W. 1972. Computation of combined refraction and diffraction, Proc. 13th Conf. on Coastal Engineering.
- Berkhoff, J.C.W. 1975. Linear wave propagation problems and the finite element method, Finite Elements in Fluids, Vol.1, edited by R.H. Gallagher, et al., London, pp.251-280.
- Berkhoff, J.C.W. 1976. Mathematical models for simple harmonic linear water waves: Wave diffraction and refraction, Delft Hydraulics Lab., Publication No. 163.
- Bettess, P., Liang, S.C. and Bettess, J.A. 1984. Diffraction of waves by semi-infinite breakwater using finite and infinite elements, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol.4, pp. 813-832.
- CERC. 1984. Shore protection manual, Vol.1, U.S. Army Coastal Research Center, Fourth Edition.
- Chen, H.S. 1984. Hybrid element modelling of harbor resonance, 4th Intern. Conf. on Applied Numerical Modelling.
- Chen, H.S. 1986. Effects of bottom friction and boundary absorption on water wave scattering, *Applied Ocean Research*, Vol.8, No.2, pp.99-104.
- Chen, H.S. 1990. Infinite elements for water wave radiation and scattering, *Intern. J. for Numerical Methods for Fluids*, Vol.11, pp.555-569.
- Chen, H.S. and Mei, C.C. 1974. Oscillations and wave forces in an offshore harbor, Ralph M. Parsons Lab., Report No.190, M.I.T.

- Copeland, G.J.M. 1985. A practical alternative to the "mild-slope" wave equation, *Coastal Engineering*, Vol.9, pp. 125-149.
- Crawford, P.L. and Chen, H.S. 1988. Comparison of numerical and physical models of wave response in a harbor, Miscellaneous Paper CERC-88-11, Department of the Army, WES, Corps of Engineers.
- Ippen, A.T. and Goda, Y. 1963. Wave induced oscillations in harbor: The solution for a rectangular harbor connected to the open-sea, Report No.59, Hydrodynamic Laboratory, M.I.T.
- Lee, J.J. 1969. Wave induced oscillations in harbors of arbitrary shape, Ph.D. Thesis, California Institute of Technology.
- Lee, J.W. 1989. Hybrid element analysis of water waves for harbor design, Ph.D. Thesis, University of Hawaii, 242pp.
- Lillycrop, L.S., Bratos, S.M. and Thompson, E.F., 1990. Wave response of proposed improvements to the shallow-draft harbor at Kawaihae, Hawaii, Miscellaneous Paper CERC-90-8, Department of the Army, WES, Corps of Engineers.
- Mei, C.C. and Chen, H.S. 1975. Hybrid-element method for water wave, Proceeding of Symposium on Modeling Techniques, San Francisco.
- Pos, J.D. 1985. Asymmetrical breakwater gap wave diffraction using finite and infinite elements, *Coastal Engineering*, Vol.9, pp.101-123.
- Pos, J.D. and Kilner, F.A. 1987. Breakwater gap wave diffraction: An experimental and numerical study, *J. of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, Vol.113, No.1, pp.1-21.
- Rottman, W. and Zielke, W. 1983. FEM-analysis of combined diffraction and refraction in harbors, including partially-reflecting boundaries, Proc. Intern. Conf. Coastal and Port Engineering in Developing Countries, Colombo, Vol.2, pp.1319-1329.
- Wilkinson, J.H. 1965. The algebraic eigenvalue problem, Oxford University Press.
- 高山 知司. 1981. 波の回折と港湾波高分布に関する研究. 港湾技術資料, No.367.
- 丸山 康樹, 鹿島 遼一. 1985. 碎波減衰を考慮した碎波帯内外の波浪場計算法の提案とその應用. 電力中央研究所 研究報告, No.384041.
- 磯部 雅彦, 佐藤 典之, 杉浦 淳, 泉宮 尊司. 1987. 港内波高分布の数値計算における境界条件に関する研究. 第34回海岸工学講演會論文集, pp.86-90.