

最小自乘法에 의한 入·反射波의 分離技法 Separation Technique of Incident and Reflected Waves Using Least Squares Method

朴佑善*·吳榮敏*·全仁植*

Woo Sun Park*, Young Min Oh* and In Sik Chun*

要旨: 本論文에서는 2차원 水理模型實驗時 入射波와 反射波를 分離할 수 있는 技法에 대해서 연구하였다. 計測誤差의 제공의 合을 最小化하는 方法을 이용하여 入, 反射波를 分離하는 體系的으로 數式化하였다. 이 分離技法은 規則 및 不規則 波浪條件에 대해서 適用이 가능하다. 本 方法의 妥當性 및 適用性을 把握하기 위한 規則 및 不規則波에 대한 數值實驗結果, 計測誤差가 없는 경우는 거의 완벽하게 分離가 가능하며, 計測誤差의 정도가 入射波高의 30% 정도일 경우에도 좋은 結果를 提示하는 것을 알 수 있었다. 또한 水理實驗을 통한 實際狀況으로의 適用性 檢討도 遂行하였다.

Abstract □ In this paper, a technique to separate the incident and reflected waves in the flume tests is investigated. Using a least squares method, the separation technique has been formulated systematically. This method is applicable to the regular and irregular wave conditions. To illustrate its validity and applicability, numerical experiments have been carried out for both regular and irregular wave conditions. It was found that the method gives perfect results for the conditions without signal noises, and yields reasonable results even for the conditions with 30% signal noises of incident wave height. Hydraulic experiments have been also performed to prove its applicability of the method for real situations.

1. 緒 論

水理實驗은 海洋工學的 諸問題를 해결하는데 있어 數值모델과 함께 중요한 역할을 擔當하고 있다. 특히, 水理實驗은 數學的으로 모형화하기 곤란한 현상을 糾明하는데 必須의이라 할 수 있다. 이러한 水理模型實驗에 있어서 入射波의 결정은 기본적인면서 도 대단히 중요한 問題이다. 실험결과로 導出되는 여러가지 결과들이 入射波高에 관련되어 분석되기 때문에 더욱 중요하다고 할 수 있다.

現在까지 사용되고 있는 주요 入射波 決定方法은 세가지로 要約할 수 있다. 1) 2次元 水槽를 길이 방향으로 分離하여 한쪽은 模型構造物을 위치시키고 다른 한쪽은 波浪에너지를 吸收할 수 있도록 消波工을 설치한 후 消波工쪽에서 계측된 파랑을 入射波로 사용하는 방법; 2) 모형구조물 前方에 두개의 파고계를

설치하여 이로부터 讀取된 동시 파고기록을 바탕으로 入사파와 反사파를 分離하여 결정하는 방법(Goda and Suzuki, 1976; Goda, 1985); 3) 세개의 파고계를 이용하여 분리하는 방법(Mansard and Funke, 1980). 이 외에 파랑에너지의 再反射影響을 考慮하여 결정하는 방법이 있다(Gravesen 등, 1974; Kit 등, 1986).

Goda and Suzuki(1976)의 파고계 두 개를 이용하는 2점법은 파고관측 두 지점사이의 距離에 따라 해가 存在하지 않는 波浪條件이 存在하여 적용범위가 너무 제한된다는 문제점이 있으며, 水槽에서 발생되는 橫波, 비선형 波浪相互干涉, 시그널 노이즈, 測定誤差 등에 敏感한 단점이 있다. 반면에 Mansard and Funke(1980)의 세개의 파고계를 이용하는 3점법은 이와 같은 현상에 덜 敏感하며 適用可能 波浪條件帶가 넓다.

本 연구에서 개발한 技法은 각 波高計로부터 계측된

*韓國海洋研究所 海洋工學研究室(Ocean Engineering Laboratory, Korea Ocean Research and Development Institute, P.O. Box 29, Ansan 425-600, Korea)

자료에 포함된 오차의 제곱의 합을 最小化하여 入射波와 反射波를 분리하는 방법으로 規則 및 不規則 파랑조건에 대해서 適用이 可能하며, 두 지점 또는 그 이상의 지점에서의 同時 波高記錄이 주어지면 분리가 가능하다. 본 방법은 最小自乘法에 根據한다는 면에서는 Mansard and Funke(1980)의 3點法과 同一하다고 할 수 있으나 數式化過程이 다르고 식의 최종적인 형태가 같지 않다. 본 방법의 妥當性 및 適用性을 把握하기 위한 規則 및 不規則波에 대한 數値실험을 수행하였으며, 實際로의 適用性 검토를 위한 水理實驗도 수행하였다.

2. 入 · 反射波의 分離

波高가 H_I 이고 振動數가 ω 인 規則波가 構造物에 入射할 경우 構造物 전면에서의 파랑은 入射波와 反射波의 重疊으로 표시가 가능하다. 入사파(η_I)와 反사파(η_R)를 다음과 같이 調和函數로 나타냈을 때,

$$\eta_I(t) = \frac{H_I}{2} \cos(kx - \omega t + \epsilon_I) \quad (1)$$

$$\eta_R(t) = \frac{H_R}{2} \cos(kx + \omega t + \epsilon_R) \quad (2)$$

Fig. 1에 보인 바와 같이 構造物의 前方설치된 波高計에 계측된 파랑은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\eta_k(t) = \frac{H_I}{2} \cos(kl_k - \omega t + \epsilon_I) + \frac{H_R}{2} \cos(kl_k + \omega t + \epsilon_R) + e_k(t) \quad (3)$$

여기서, $e_k(t)$ 는 k -번째 波高計에 計測된 波高기록에 포함된 波浪의 非線型 相互干涉, 시그널 노이즈 등에 起因한 계측오차를 나타내며, l_k 는 基準点으로부터 k -번째 波高計까지의 距離를 나타낸다. 下添字 I 와 R 은 각각 入射波와 反射波를 의미한다.

식 (3)은 다음과 같이 재정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \eta_k(t) = & X_1 \cos(\omega t - kl_k) \\ & + X_2 \cos(\omega t + kl_k) \\ & + X_3 \sin(\omega t - kl_k) \\ & - X_4 \sin(\omega t + kl_k) \\ & + e_k(t) \end{aligned} \quad (4)$$

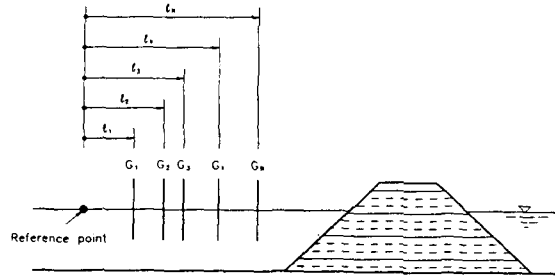


Fig. 1. Definition sketch.

여기서, X_j 는 入 · 反사파의 波高 및 位相에 관련된 未知의 계수로 다음과 같다.

$$X_1 = \frac{H_I}{2} \cos \epsilon_I \quad (5a)$$

$$X_2 = \frac{H_R}{2} \cos \epsilon_R \quad (5b)$$

$$X_3 = \frac{H_I}{2} \sin \epsilon_I \quad (5c)$$

$$X_4 = \frac{H_R}{2} \sin \epsilon_R \quad (5d)$$

入射波와 反射波를 分離하기 위한 計測시스템의 예러는 다음과 같이 $N(\geq 2)$ 개의 波高計로부터 T_m 시간 동안 計測된 시그널에 포함된 예러 제곱의 總合으로 定義할 수 있으며,

$$E = \sum_{k=1}^N \int_0^{T_m} (e_k(t))^2 dt \quad (6)$$

이때의 入 · 反사파의 波高 및 位相은 이를 X_j 에 대해서 最小化함으로써 구할 수 있다.

$$\frac{\partial E}{\partial X_j} = 0 \quad (7)$$

즉, 이로부터 얻어지는 다음의 선형 대수방정식에서 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ & & C_{33} & C_{34} \\ \text{symm.} & & & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

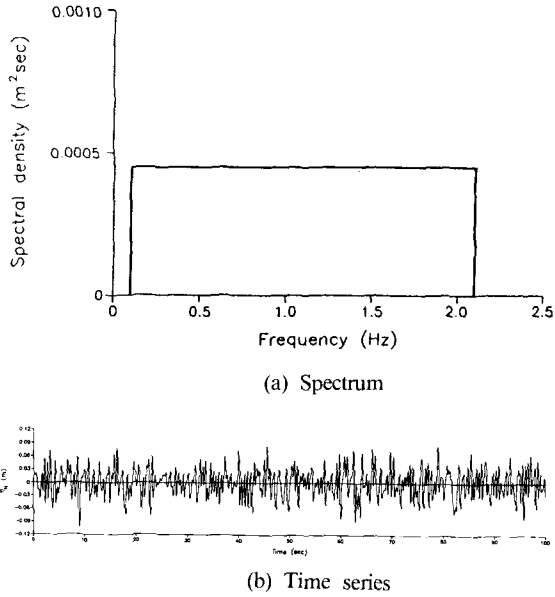


Fig. 2. Wide-banded signal noise.

여기서, c_{ij} 는 식 (4) 우변의 X_j 에 곱해진 계수에 관련되며, F_j 는 이 계수와 각 파고계로부터 측정된 시그널에 관련된다(부록 참조).

식 (8)로부터 X_j 가 계산되면, 入射波 및 反射波의 位相은 식 (5a~5d)의 관계로부터 다음과 같이 구할 수 있으며,

$$\epsilon_I = \tan^{-1} \frac{X_3}{X_1} \tag{9a}$$

$$\epsilon_R = \tan^{-1} \frac{X_4}{X_2} \tag{9b}$$

波高는 다음으로부터 계산된다.

$$H_I = \frac{2 X_1}{\cos \epsilon_I} \text{ or } \frac{2 X_3}{\sin \epsilon_I} \tag{10a}$$

$$H_R = \frac{2 X_2}{\cos \epsilon_R} \text{ or } \frac{2 X_4}{\sin \epsilon_R} \tag{10b}$$

實驗波浪이 規則波가 아닌 不規則波인 경우에도 上記의 과정을 적용할 수 있다. 즉, 각 파고계로부터 측정된 시스널을 Fourier 變換하여 각 波浪성분별로 적용하면 分離가 가능하다.

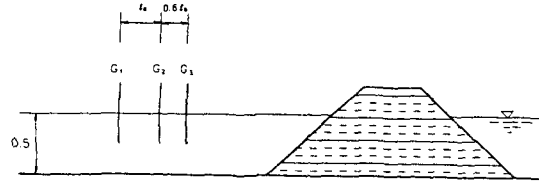


Fig. 3. Experimental condition for example analysis.

3. 例題解析

3.1 數值實驗

本 研究에서 開發한 方法의 妥當性 및 適用性을 把握하기 위하여 規則 및 不規則波에 대해서 數值實驗을 수행하였다. 두 경우 모두 0.5m 수심에 대해서 3개의 파고계를 사용하였으며, 計測오차를 再現시키기 위하여 入射波高의 30%에 해당하는 有義波高를 갖는 Wide banded 노이즈 시그널을 작성하여 使用하였다. Fig. 2에 노이즈 시그널로 사용한 스펙트럼과 시계열을 나타내었다.

規則波의 경우, 實驗波浪은 入射波高 H_I 0.4m, 反射波高 H_R 0.3m이며 位相 ϵ_I 와 ϵ_R 은 각각 1.0, 2.0, 주기는 入·反射波 모두 2.0초인 경우를 대상으로 하였다. 파고계간의 間隔은 Fig. 3에 나타난 바와 같이 첫번째와 두번째 파고계의 間隔을 l_0 라 할 때 두번째와 세번째의 파고계의 間隔은 $0.6l_0$ 로 設定하여 l_0 를 變化시켜 가며 실험을 수행하였다.

Fig. 4는 計測資料에 노이즈가 없는 경우에 대한 分離結果이며, Fig. 5는 入射波高의 30% 정도에 해당하는 Fig. 2에 보인 노이즈가 있는 경우에 대한 것이다. 두 결과를 살펴보면, 3개의 파고계를 사용한 경우는 모든 實驗波浪條件에 대해서 좋은 결과를 보이고 있지만, 2개의 파고계만 사용한 경우는 入射波長(L)에 대한 두 파고계간의 間隔(l_0) 比(l_0/L)가 0.5, 1.0 부근에서 잘 分離하지 못하고 있음을 알 수 있다. 이는 既存의 研究結果에도 잘 나타나 있는 것으로 두개의 파고계만을 사용하여 分離할 경우 必할 수 없는 問題點이다. 두개의 파고계를 사용하여 分離할 경우, $0.05 \leq l_0/L \leq 0.45$ 의 條件에서만 有效한 結果를 얻을 수 있는 것으로 報告되어 있다(Goda and Suzuki, 1976 ; Goda, 1985).

不規則波에 대한 適用性 數值實驗은 0.5m 수심에서 3개의 파고계를 사용하여 수행하였다. 파고계간의 간

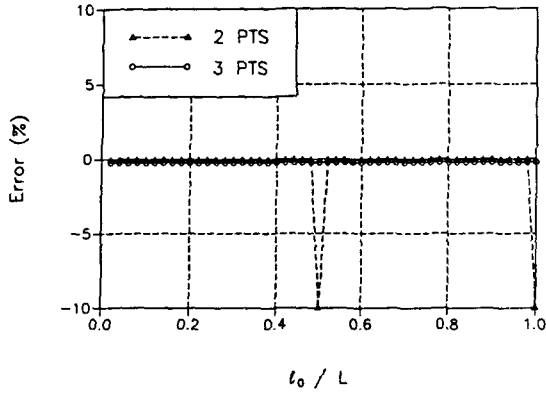


Fig. 4. Relative errors between target and estimated incident waves without noise.

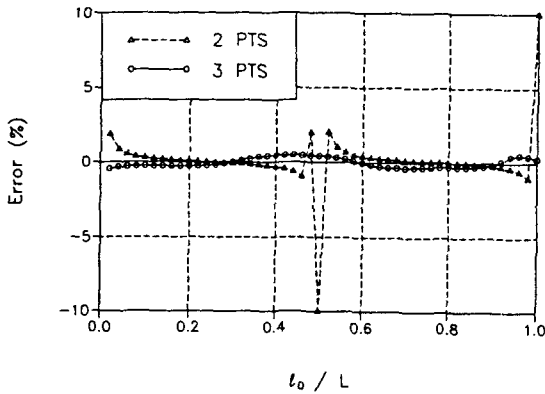


Fig. 5. Relative errors between target and estimated incident waves with noise.

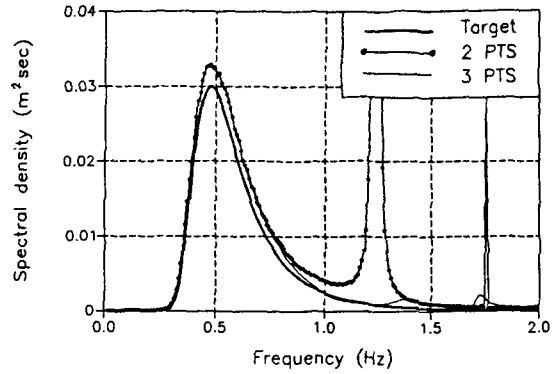


Fig. 6. Comparisons of estimated incident wave spectra: $T_{1/3}=2.0$ sec, $H_{1/3}=0.4$ m.

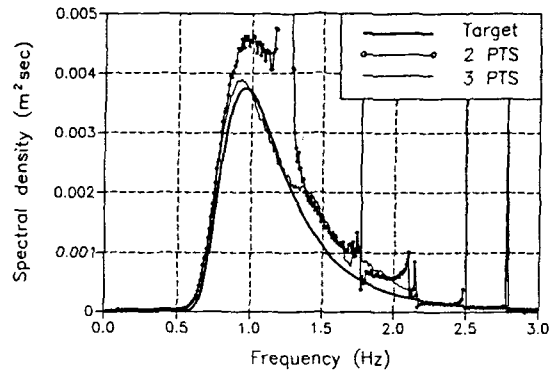


Fig. 7. Comparisons of estimated incident wave spectra: $T_{1/3}=1.0$ sec, $H_{1/3}=0.2$ m.

격은 첫번째와 두번째 0.5m, 두번째와 세번째 0.3m로 설정하였다. 實驗波浪은 有義波高($H_{1/3}$)와 有義週期($T_{1/3}$)로 나타내지는 Bretschneider-Mitsuyasu 스펙트럼(合田良實, 1987)을 사용하였다. 파고계 간격의 영향을 보기 위하여 두 가지 波浪條件을 선택하였다. 하나는 입사파랑의 유의파고가 0.4m이고, 유의주기($T_{1/3}$) 2.0초인 경우이며, 다른 하나는 유의파고 0.2m이고, 유의주기($T_{1/3}$) 1.0초인 경우이다. 두 경우 모두 反射波는 入射波의 75%에 해당하는 유의 파고를 갖는 것으로 선택하였으며, 노이즈 시그널은 규칙파의 경우와 같이 Fig. 2에 보인 입사파고에 30%에 해당하는 유의파고를 갖는 Wide banded 노이즈를 사용하였다.

Fig. 6은 有義波高 0.4m, 有義週期 2.0초인 경우에 대한 結果이며, Fig. 7은 유의파고 0.2m, 유의주기 1.0초인 경우에 대한 것이다. 3개의 파고계를 사용한

경우는 入射波浪의 스펙트럼과 거의 모든 주파수에 대해서 비교적 잘 일치하나, 2개의 파고계를 사용한 경우는 特定 周波數 부근 1.2~1.4 Hz에서 좋지 않은 결과를 보이고 있음을 알 수 있다. 이 주파수대는 入射波長(L)에 대한 파고계 間隔(l_0)의 비가 0.5에 해당하는 부근으로 규칙파에 대한 실험결과에서 言及한 바와 같이 두개의 파고계를 사용하는 경우에 必然的으로 발생하는 문제점이다. Fig. 6에 나타낸 유의주기 2.0초의 경우는 이 特定 周波數帶가 에너지가 작은 부근에 위치하게 되어 이 부근을 무시하면 어느 정도 사용할 수는 있지만, Fig. 7에 나타낸 유의주기 1.0초인 경우에 대한 결과는 에너지가 密集되어 있는 부근에 이 주파수대가 위치하게 되어 거의 사용할 수가 없다. 이와 같이 두개의 파고계만을 사용하여 入射波와 反射波를 分離할 경우 入射波浪의 조건에 따라 파고계의

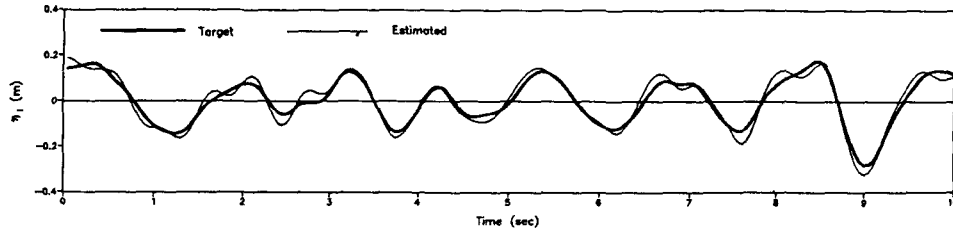


Fig. 8. Time series of target and estimated incident waves: $T_{1/3}=2.0$ sec, $H_{1/3}=0.4$ m.

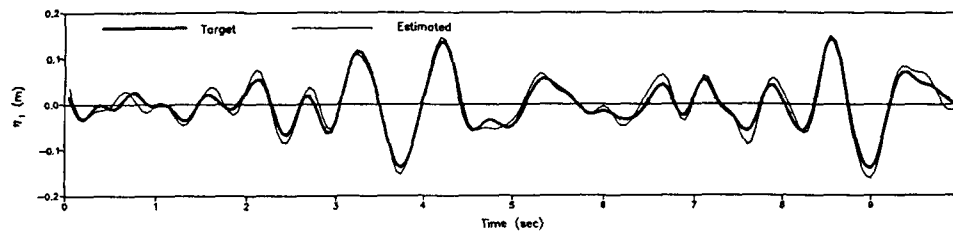


Fig. 9. Time series of target and estimated incident waves: $T_{1/3}=1.0$ sec, $H_{1/3}=0.2$ m.

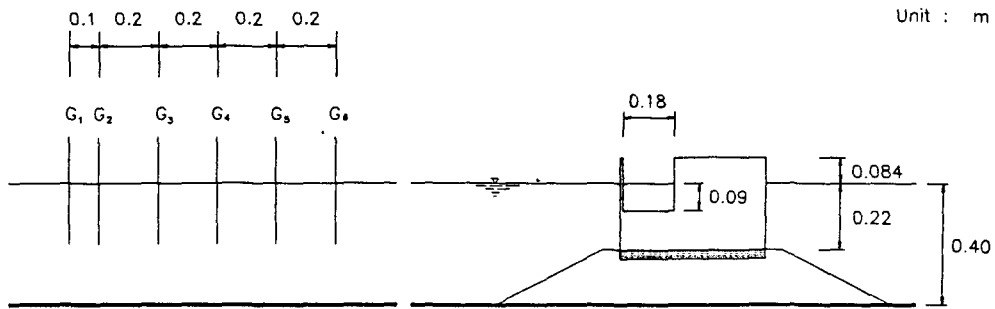


Fig. 10. Hydraulic model tests for perforated breakwater.

간격을 適切히 選擇해야만 타당한 결과를 얻을 수 있다. 그러나, 실제로 수리모형실험을 수행할 경우 여러 주기대의 파랑에 대해서 실험하게 되어, 波浪條件에 따라 매번 파고계의 간격을 조정한다는 것은 상당히 번거로운 일로 실수를 범할 가능성이 높다.

Fig. 8과 9는 上記의 두 경우에 대해 實驗 入射波浪의 시계열과 3개의 파고계를 사용하여 분리한 入射波浪의 시계열을 비교하여 나타낸 것으로 상당히 잘 맞고 있음을 알 수 있다. 入射波浪의 시계열은 식 (9a, b)와 식 (10a, b)를 逆 Fourier 變換하여 구한 것이다.

3.2 水理實驗

實際 水理實驗에의 適用性を 檢討하기 위하여 有孔

防波堤의 모형에 대해 反射率 측정실험을 수행하였다. Fig. 10에 보인 바와 같이 수심 0.4m에 설치된 有孔防波堤의 前方에 電氣抵抗식 파고계 6개를 설치하여 計測하였다. 파고계간의 間隔은 그림에 나타난 바와 같다. 實驗에 사용한 有孔防波堤는 전면 有孔率이 27%이고 유수실의 幅이 0.18m, 유수실 수심이 0.09m인 構造物로 아크릴로 제작되었다.

實驗波浪은 規則波로 주기가 다른 3개의 조건을 사용하였다. 각 경우에 대하여 두개의 파고계를 사용한 경우, 3개를 사용한 경우 및 6개 모두 사용한 경우에 대해 分離를 실시하였다. 2개를 사용하는 경우는 入射波長 대 파고계 간격이 다르도록 G_1 과 G_2 波高計를 기준으로 6개의 波高計를 적절히 組合하여

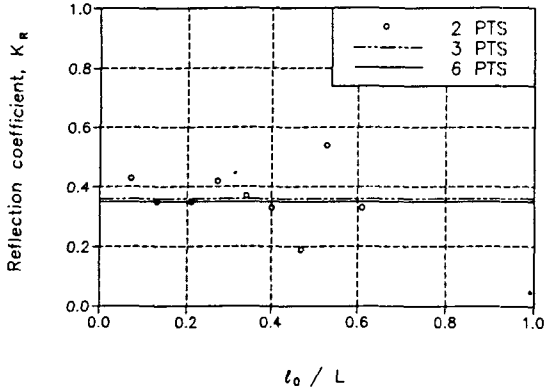


Fig. 11. Variation of reflection coefficients with respect to l_0/L for 3-different number of wave probes employed: $T=1.02$ sec.

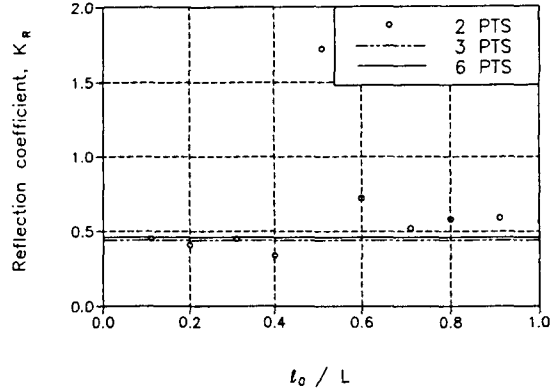


Fig. 13. Variation of reflection coefficients with respect to l_0/L for 3-different number of wave probes employed: $T=0.81$ sec.

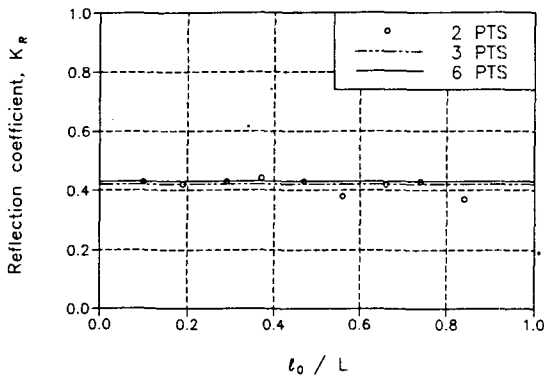


Fig. 12. Variation of reflection coefficients with respect to l_0/L for 3-different number of wave probes employed: $T=0.84$ sec.

분리하였으며, 3개의 波高計를 사용하는 경우는 $G_1 - G_3$ 의 波高計를 이용하였다.

Fig. 11~13에 分離한 結果를 反射率로 나타내어 提示하였다. 比較한 세 波浪條件에 대해서 6개의 파고계를 이용하여 얻은 結果와 3개의 波高計를 이용하여 분리한 結果는 서로 잘 一致함을 볼 수 있으나, 2개의 파고계를 이용하는 경우에는 l_0/L 이 0.5 또는 1.0이 되는 경우에서는 좋지 않은 結果를 주고 있음을 알 수 있다. 比較한 週期變化에 대한 反사율을 살펴 보면 주기 1.02초가 제일 작고 0.84, 0.81초 순으로 커짐을 볼 수 있다. 이 防波堤는 주기가 1.0초보다 길어지면 다시 反사율이 증가하게 된다(韓國海洋研究所, 1992). 이와 같이 反射率が 주기 1.0초 부근에서 最小가 되고 이 보다 주기가 길거나 짧아지면 反사

율이 增加하는 것은 실험에 사용한 有孔 防波堤의 特性으로 유수실의 폭에 密接한 關係를 가지고 발생하는 현상이다.

4. 結 論

本 論文에서는 水理模型實驗의 基本的 先決要件인 入射波의 결정을 위해 필요한 入·反射波의 分離方法에 대해서 研究하였다. 본 연구에서는 開發한 方法은 각 波高計로부터 計測된 資料에 포함된 오차의 제거의 함을 最小화하여 入射波와 反射波를 分離하는 技法이다.

본 方法의 妥當性 및 適用性을 把握하기 위한 規則 및 不規則波에 대한 數値실험결과, 계측오차가 없는 경우는 거의 완벽하게 分離가 가능하며, 계측오차의 정도가 入射波高의 30% 정도일 경우에도 좋은 結果를 얻을 수 있었다. 또한, 水理實驗을 통한 實際로의 適用性 검토도 수행하였다. 알고리즘상 2개 이상의 파고계를 사용하면 分離가 可能하나 2개를 사용할 경우 해가 존재하지 않는 特定 波浪條件帶가 존재하므로 3개 이상의 파고계 사용이 권장된다.

謝 辭

本 論文은 科學技術處에서 施行한 特定 研究開發事業의 一環으로 遂行된 “港灣水質 改善을 위한 防波設施의 開發研究(I)”의 結果中 一部를 補完·整理한

것입니다.

參考文獻

韓國海洋研究所, 1992. 混成防波堤의 케이슨에 作用하는 波壓分布 特性(I), BSPE00276-458-2.
 Goda, Y., 1985. Random seas and design of maritime structures. Univ. of Tokyo Press.
 Goda, Y. and Suzuki, Y., 1976. Estimation of incident and reflected waves in random wave experiments, *Proc. 15th Coastal Engineering Conference*, pp. 828-845.
 Gravesen, H., Frederiksen, E. and Kirkegaard, J., 1974. Model tests with directly reproduced nature wave trains, *Proc. 14th Coastal Engineering Conference*, pp. 372-385.
 Kit, E., Gottlieb, O. and Rosen Dov S., 1986. Evaluation of incident wave energy in flume tests, *Proc. 20th Coastal Engineering Conference*, pp. 1268-1280.
 Mansard, E.P.D. and Funke, E.R., 1980. The measurement of incident and reflected spectra using a least square method, *Proc. 17th Coastal Engineering Conference*, pp. 191-206.
 合田良實, 1987. 數値シミュレーションによる波浪のスペクトルと統計的性質, 第34回 海岸工學講演會論文集, pp. 131-135.

附錄 : 계수 C_{ij} 와 F_j 의 決定

식 (8)의 C_{ij} 는 식 (4)의 우변 X_j 의 係數에 關聯되어 다음과 같이 정의된다.

$$C_{11} = \sum_{k=1}^N \int_0^{T_m} \cos^2(\omega t - \kappa l_k) dt$$

$$C_{12} = \sum_{k=1}^N \int_0^{T_m} \cos(\omega t - \kappa l_k) \sin(\omega t + \kappa l_k) dt$$

$$C_{13} = \sum_{k=1}^N \int_0^{T_m} \cos(\omega t - \kappa l_k) \sin(\omega t - \kappa l_k) dt$$

$$C_{14} = \sum_{k=1}^N \int_0^{T_m} -\cos(\omega t - \kappa l_k) \sin(\omega t + \kappa l_k) dt$$

$$C_{22} = \sum_{k=1}^N \int_0^{T_m} \cos^2(\omega t + \kappa l_k) dt$$

$$C_{23} = \sum_{k=1}^N \int_0^{T_m} \cos(\omega t + \kappa l_k) \sin(\omega t - \kappa l_k) dt$$

$$C_{24} = \sum_{k=1}^N \int_0^{T_m} -\cos(\omega t + \kappa l_k) \sin(\omega t + \kappa l_k) dt$$

$$C_{33} = \sum_{k=1}^N \int_0^{T_m} \sin^2(\omega t - \kappa l_k) dt$$

$$C_{34} = \sum_{k=1}^N \int_0^{T_m} -\sin(\omega t - \kappa l_k) \sin(\omega t + \kappa l_k) dt$$

$$C_{44} = \sum_{k=1}^N \int_0^{T_m} \sin^2(\omega t + \kappa l_k) dt$$

積分을 수행하여 整理하면 다음과 같다.

$$C_{11} = \sum_{k=1}^N \left[\frac{T_m}{2} + \frac{1}{4\omega} (\sin 2(\omega T_m - \kappa l_k) + \sin 2\kappa l_k) \right]$$

$$C_{12} = \sum_{k=1}^N \left[\frac{T_m}{2} \cos 2\kappa l_k + \frac{1}{4\omega} \sin 2\omega T_m \right]$$

$$C_{13} = \sum_{k=1}^N \left[\frac{1}{4\omega} (\cos 2(\omega T_m - \kappa l_k) + \cos 2\kappa l_k) \right]$$

$$C_{14} = \sum_{k=1}^N \left[-\frac{T_m}{2} \sin 2\kappa l_k + \frac{1}{4\omega} (\cos 2\omega T_m - 1) \right]$$

$$C_{22} = \sum_{k=1}^N \left[\frac{T_m}{2} + \frac{1}{4\omega} (\sin 2(\omega T_m + \kappa l_k) - \sin 2\kappa l_k) \right]$$

$$C_{23} = \sum_{k=1}^N \left[-\frac{T_m}{2} \sin 2\kappa l_k - \frac{1}{4\omega} (\cos 2\omega T_m - 1) \right]$$

$$C_{24} = \sum_{k=1}^N \left[\frac{1}{4\omega} (\cos 2(\omega T_m + \kappa l_k) - \cos 2\kappa l_k) \right]$$

$$C_{33} = \sum_{k=1}^N \left[\frac{T_m}{2} - \frac{1}{4\omega} (\sin 2(\omega T_m - \kappa l_k) + \sin 2\kappa l_k) \right]$$

$$C_{34} = \sum_{k=1}^N \left[-\frac{T_m}{2} \cos 2\kappa l_k + \frac{1}{4\omega} \sin 2\omega T_m \right]$$

$$C_{44} = \sum_{k=1}^N \left[\frac{T_m}{2} - \frac{1}{4\omega} (\sin 2(\omega T_m + \kappa l_k) - \sin 2\kappa l_k) \right]$$

F_j 는 다음과 같이 정의되며, 積分값은 數值的으로 결정할 수 있다.

$$F_1 = \sum_{k=1}^N \int_0^{T_m} \cos(\omega t - \kappa l_k) \eta_k(t) dt$$

$$F_2 = \sum_{k=1}^N \int_0^{T_m} \cos(\omega t + \kappa l_k) \eta_k(t) dt$$

$$F_3 = \sum_{k=1}^N \int_0^{T_m} \sin(\omega t - \kappa l_k) \eta_k(t) dt$$

$$F_4 = \sum_{k=1}^N \int_0^{T_m} -\sin(\omega t + \kappa l_k) \eta_k(t) dt$$