한국수학교육학회지 〈수학교육〉
1992. 6. 제 31 권 제 1 호 35-37

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
June. 1992: Vol. 31, No. 1, 35-37

# $n$-차원 긴밀 다양체에 관한 연구

김 경호 (충주공업전문대학)

## I. 서론

J. Milnor 는 1956년에 그의 논문 "7-구면 (sphere) 에 동상 (homeomorphic) 인 다양체 (manifold) 에 관한 함수" 에서 오직 2개의 비퇴화 (nondegenerate) 임계점 (critical points) 를 갖는 모스 함수 (Morse function) 가 존재하는 7-다양체를 만들어 7-구면 ($S^7$) 과 미분동상 (diffeomorphic) 이 아님을 밝혔다. 본 논문에서는 $M$ 이 긴밀 다양체이고 $M$ 상에 임계점이 오직 2개뿐인 모스 함수 $f$ 가 존재한다면 $M$ 은 $S^n$ 과 동상임을 증명하였다.

## II. 본론

**정리 1.** $M$ 을 긴밀 미분 다양체 (compact differential manifold) 라 하고 $f : M \to R$ 을 미분가능 함수라 하면 $M_b^a = f^{-1}[a,b]$ 에는 $f$ 의 임계점이 존재하지 않다고 가정할 때 $M^a = f^{-1}(-\infty, a]$ 와 $M^b = f^{-1}(-\infty, b]$ 는 미분동상 (diffeomorphic) 이고 더우기 $M^a$ 는 $M^b$ 의 변위 리트랙트이다. 즉, $M^a \approx M^b$ 이다.

**정리 2.** $M$ 을 긴밀 미분 다양체라 하고 $f : M \to R$ 을 모스 함수 (Morse function) 이고, $f$ 의 임계점을 $p_1, p_2, \ldots, p_k$, 또 $f$ 의 각점에 있어서 지수 (index) 를 $r_1, r_2, \ldots, r_k$ 일 때 $M$ 은 $r_1, r_2, \ldots, r_k$ 차원 포체 (cell) $e^{r_1}, \ldots, e^{r_k}$ 을 갖는 C. W. 복체 (complex) 와 호모토피 동치 (homotopy equivalance) 이다. 즉, $M \cong e^{r_1} \cup e^{r_2} \cup \cdots \cup e^{r_k}$ 이다.

위 정리에서 긴밀 미분 다양체 $M$ 은 모스 함수 $f : M \to R$ 을 사용하여 그의 유한 C. W. 복체의 호모토피 형태가 결정되지만 $M$ 상에 모스 함수가 존재하느냐에 관해서는 문제가 생긴다. 여기에 대해서 다음 보조정리 3이 있다. $M$ 상의 미분가능함수전체의 집합 $C^\infty(M)$ 에 적당한 위상 (topology) 를 주어서

**보조정리 3.** 긴밀 다양체 $M$ 상의 모스함수 전체의 집합은 $C^\infty(M)$ 중에서 조밀 (dense) 인 개집합 (open set) 이다.

이 보조정리는 미분가능 함수 가까이에 반드시 모스 함수가 있고 또 모스함수 근방에 함수는 모스함수임을 보이고 있다. 특히 다양체 $M$ 상에는 무한히 많은 모스함수가 존재하여 위 보조정리 3이 거짓이 아님을 보이고 있다.

**매끄러운 다양체 트라이드** (smooth manifold traid) $(W;\ V_0, V_1)$ 위에 모스함수는 다음을 만족하는 매끄러운함수 $f : W \to [a,b]$ 이다.

1) $f^{-1}(a) = V_0,\ f^{-1}(b) = V_1\ (V_0 \neq \emptyset,\ \ V_1 \neq \emptyset)$

2) $f(W) = [a,\ b]$ 이면 $f$ 의 모든 임계점들은 내부 (interior) 이고 비퇴화 (nondegenerate) 이다.

**보조정리 4.** 모든 매끄러운 다양체 트라이드 $(W; V_0,\ V_1)$ 에는 모스 함수가 존재한다.

**보조정리 5.** $W$ 가 긴밀인 $(W;\ V_0,\ V_1)$ 상의 모스함수의 임계점의 갯수는 유한이다.

**정리 6.** 매끄러운 다양체 트라이드 $(W;\ V_0,\ V_1)$ 위에 모스함수 $f$ 가 $W$ 에서 임계점을 갖지 않는다면, $W$ 는 $V_0 \times I$ 와 미분동상이고 $V_0 = V_0 \times \{0\}$, $V_1 = V_1 \times \{0\}$ 및 $V_1 = V_0$ 이다.

**증명** $W$ 에 리만 계량 $<,\ \ >_p$ 을 정하고 $\mathrm{grad}\, f = \{\mathrm{grad}\, f(p); p \in W\}$ 을 생각하자. $\mathrm{grad}\, f$ 는 특이점을 갖지 않는 벡타장이다. 매끄러운 함수을 $\varphi; W \to R$ 을 $\varphi(p) =< \mathrm{grad}\, f(p),\ \ \mathrm{grad}\, f(p) >$ 로 정하고 $W$ 상의 $C^\infty$-벡타장 $X = \{X(p) :\ \ p \in W\}$ 를 $X(p) = \frac{1}{\varphi(p)} \mathrm{grad}\, f(p)$ 로 정의하자. $V_0$ 의 한 점 $\bar{p}$ 에 대해서 $\eta_{\bar{p}}(a) = \bar{p}$ 가 되는 $X$ 의 적분곡선 $\eta_{\bar{p}}$ 를 잡으면

$$
\begin{aligned}
\frac{df(\eta_{\bar{p}}(t))}{dt} &=< \mathrm{grad}\, f(\eta_{\bar{p}}(t)),\ \ \frac{d\eta_{\bar{p}}}{dt}(t) > \eta_{\bar{p}}(t) \\
&=< \mathrm{grad}\, f(\eta_{\bar{p}}(t)),\ \ X(\eta_{\bar{p}}(t)) >= \eta_{\bar{p}}(t) = 1
\end{aligned}
$$

이 성립한다.

$W$ 는 긴밀이므로 적분곡선 $\eta_{\bar{p}}$ 는 반드시 존재하고 $t$ 에 대하여 $f(\eta_{\bar{p}}(t))$ 를 대응하면 $[a,\ b] \to [a,\ b]$ 에의 항등사상이 생긴다. 따라서 $V_0 \times I \to (\bar{p},\ t)$ 에 $\eta_{\bar{p}}((1-t)a + ta)$ 를 대응함으로써 $V_0 \times I \to W$ 에로의 미분동상이 나온다.

## III. 결론

**정리 7.** $M$ 가 긴밀 미분 다양체이고 $M$ 상에 임계점이 오직 2개 뿐인 모스 함수 $f$ 가 $M$ 는 $S^n$ 과 동상이다.

**증명** $p_0$ 를 $f$ 의 극소점 $p_1$ 을 $f$ 의 극대점이라 하면 $p_0, p_1$ 은 $f$ 의 비퇴화 임계점이다.

$f(p_0) = a,\ f(p_1) = p_1$ 이라 하면 $f(M) = [a,\ b]$ 이다. $P_0 \in U_v$ 인 좌표근방 $(U_v,\ \varphi_v)$ 에서 $p_0$ 가 극소점이므로 지수 (index) 가 0 이므로

(i) $\varphi_v(p_0) = 0$

(ii) $f\cdot\varphi_v^{-1}(x_1,\ldots,x_n)=a+x_1^2+\cdots+x_n^2$ 가 된다.
여기서 $(x_1,\ldots,x_n)\in\varphi_v(U_v)$ 이다.
따라서 $\varepsilon>0$ 을 작게 잡으면 $f^{-1}([a,a+\varepsilon])=\varphi_v^{-1}(\{(x_1,\ldots,x_n)\in\varphi_v(U_v):x_1^2+\cdots+x_n^2\leq\varepsilon\})$ 로서 $f^{-1}([a,a+\varepsilon])$ 은 $n$ 차원 구체 $D^n$ 과 $c^\infty$-동상이다. $f^{-1}([a,a+\varepsilon])=D_0$ 라 쓰고 $p_0\in D_0$ 이다.

위와 같이 $\varepsilon'>0$ 을 충분히 작게 잡으면 $f^{-1}([b-\varepsilon,b])$ 을 $D_1$ 이라 $D_1$ 은 $n$ 차원 구체 $D^n$ 과 $C^\infty$-동상로서 $p_1\in$ 내부 $D_1$ 이다. $W=f^{-1}([a+\varepsilon,b-\varepsilon'])$ 이라 놓으면 $M=D_0\cup N\cup D_1$ 이고 $W$ 는 $S^{n-1}$ 과 $C^\infty$-동상인 2개의 경계 $f^{-1}(a+\varepsilon)$, $f^{-1}(b-\varepsilon')$ 을 갖는 $n$-차원 $C^\infty$-다양체이다. $f|W$ 는 $C^\infty$ 다양체 트라이드 $(W;f^{-1}(a+\varepsilon),\ f^{-1}(b-\varepsilon'))$ 에 적합한 모스함수로서 $W$ 에서는 임계점을 전혀 갖지 않는다. 따라서 정리 5 에 의해서 $W\cong S^{n-1}\times I$ (미분동상)이다. 한편 $f:S^n\to R$ 인 모스함수를 정의하고 $f^{-1}[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}]=\bar{W}$ 라 놓으면 $\bar{W}\cong S^{-1}\times I$ ($c$-동상), $f^{-1}[-1,-\frac{1}{2}]=\bar{D}_0$, $f^{-1}[\frac{1}{2},\ 1]=\bar{D}_1$ 라 놓으면 $\bar{D}_0$, $\bar{D}_1$ 는 모두 $D^n$ 과 $C^\infty$-동상이다. 그러므로 $S^n$ 는 $\bar{D}_0\cup\bar{W}\cup\bar{D}_1$ 으로 분해된다. 지금 $\bar{h}:W\to\bar{W}$ 는 $C^\infty$-동상으로 잡자. $D^n$ 의 원점을 0라 하면 $D^n$ 의 임의의 점 $x$ 는 반직선 $\overrightarrow{OX}$ 가 $S^{n-1}$ 과 만나는 점 $\hat{x}$ 및 0와 $x$ 와의 거리 $t$ 에 의해서 $x=t\hat{x}$ 로 표시된다. 이것을 사용하여 $h_0:D_0\to\widehat{D_0}$ 를 $D_0$, $\widehat{D_0}$ 를 $D^n$ 과 동일시하여 $h_0(t\hat{x})$ $(\hat{x}=\partial D_0\subset W)$ 로 정하고 같은 방법으로 $h_1:D_0\to\widehat{D}$ 로 정하자. 그러므로 $\bar{h}$, $h_0$, $h_1$ 을 위와 같이 정하여 $h:M\to S^n$ 을 정의하면, $h$ 는 동상 (homeomorphism)이다.

이 논문의 결론을 말하면 위 내용중에서 $h$ 에 관해서 $\bar{h}|\partial D_1:\partial D_1\to\partial\widehat{D_1}$ 은 $C^\infty$-동상이나, 이것은 $h_1:D_1\to\widehat{D_1}$ 으로 확장할 때 일반적으로 $h_1$ 은 $D_1$ 의 중심에서 연속이지만 $C^\infty$ 라 할 수 없다. 구면에 $C^0$-동상이지만 $C^\infty$-동상이 아닌 $C^\infty$-다양체가 존재하며 그와 같은 $C^\infty$-다양체에 대하여는 차원이 6보다 크면 임계점이 2개 뿐인 모스함수가 존재한다.

## References


1. 이 기안, *Topology 의 기초개념 (상)*, 학문사, 1984.
2. John Milnor, *On manifolds homeomorphic to the γ-Sphere*, Ann. of Math. 64 (1956), 399–405.
3. John Milnor, *Morse Theory*, Princeton Univ. Press, 1963.
4. John Milnor, *Lectures on the h-cobordism*, Princeton Univ. Press, 1965.
5. Gregory L. Naber, *Topological Methods in Euclidean Spaces*, Cambridge Univ. Press, 1980.