

공분산형 ARMA 고속 Transversal 필터에 관한 연구

A Covariance Type ARMA Fast Transversal Filter

이 철 회*, 장 영 수*

(Chul-Heui Lee*, Young Soo Jang**)

요 약

적용방식이나 실시간 처리에 적합한 온라인 ARMA 계수추정을 위하여 공분산형 ARMA 고속 transversal 필터 알고리즘을 제안하였다. 제안된 알고리즘은 ARMA 모델의 경우 상관행렬의 이동불변 특성이 각 블록 별로 만족함을 이용하여 ELS(Extended Least Squares)를 공분산형의 경우에 대해 고속 시행신 알고리즘으로 구현한 것으로서, 알고리즘의 유도에는 사영연산자를 이용한 기하학적 접근방식을 사용하였다. 제안된 알고리즘은 $13N+37$ MADPR의 연산량을 필요로 하며, AR부분과 MA부분의 차수를 달리할 수 있다.

ABSTRACT

For effective on-line ARMA parameter estimation, a covariance type ARMA fast transversal filter(FTF) algorithm is presented. The proposed algorithm is a covariance type implementation of ELS(Extended Least Squares) estimator and it is a fast time update recursion which is based on the fact that the correlation matrix of ARMA model satisfies the shift invariance property in each sub-block. The geometric approach is used in the derivation of the proposed algorithm. It takes small computational burden of $13N+37$ MADPR(Multiplication And Division Per Recursion). Also, AR and MA orders can be independently and arbitrarily specified.

I. 서 론

신호 또는 시스템을 모형화한 뒤 관측데이터로부터 모델의 계수를 추정하여 특성을 해석하고 시스템 또는 필터를 구성하는 기법은 통계학, 신호처리, 통신, 제어공학 및 시스템 이론 등의 여러 분야에서 폭넓게 사용되고 있다.^{1) 2)} 그러므로 적합한 모델의 선정 및 계수추정 방식의 선택은 중요하다.

신호의 모형화에는 선형 히르포먼트인 시계열 모델이 주로 이용되는데, AR모델의 계수추정의 용이성으로 인하여 LMS(Least Mean Squares), LS(Least

Squares) 등의 계수 추정자와 함께 널리 사용되어 왔으나, 유색잡음이 존재할 경우 추정계수의 편이가 생기게 된다. 따라서 많은 경우 실시간 및 잡음의 특성을 고려할 때 ARMA모델로 모형화하는 것이 보다 적합한 경우가 많으나 계수추정의 비선형으로 인하여 계수추정 알고리즘이 복잡할 뿐 아니라, 특히 온라인 계수추정의 경우 최적 계수추정자의 구현이 어려우므로 RML(Recursive Maximum Likelihood), EIV(Extended Instrumental Variables), ELS(Extended Least Squares) 등의 준최적 계수추정자가 사용하게 되나 LS알고리즘보다 계산량의 부담이 많고 수렴속도도 늦다.^{3) 4)}

계수추정 알고리즘은 데이터 처리 형태에 따라 오프라인 처리방식인 batch 알고리즘과 온라인 처리방

* 강원대학교 전기공학과

** 서울대학교 대학원 전기공학과

접수일자: 1991. 12. 27.

적인 순환알고리즘으로 나눌 수 있으며, 정규방정식의 상관함수의 근사화에 이용되는 데이터 집합의 형태에 따라 상관계수형(autocorrelation form), 전치 윈도우형(prewindowed form), 공분산형(covariance form)으로 나눌 수 있는데, 관측구간 외의 데이터에 대한 가정으로 인한 윈도우 동작에 의해 상관계수형과 선치윈도우형은 공분산형의 경우보다 해상도가 떨어지게 된다.^(4,5)

한편 적응 방식이나 실시간 처리에 필요한 온라인 계수추정 문제에서는 처리시간 즉 계산량의 부담이 중요한 문제가 되어 알고리즘의 연산량 감소가 요구되므로 최근에는 순환 계수추정 알고리즘의 매 순환 스텝당 연산량을 모델차수 차원으로 줄인 고속 알고리즘에 관하여 많은 연구들이 진행되었다. 고속알고리즘은 정규방정식의 상관함수 행렬의 이동불변 특성(shift invariance property)을 이용하여 Levinson순환식을 확장시킨 것으로서 고속 transversal 필터(FTF)와 격자 필터의 두 형태가 있는데, FTF의 경우 AR모델에 대한 전치윈도우형과 공분산형 알고리즘 및 이들의 변형, 규준화 및 초기화에 관하여 많이 연구되고 있다. ARMA모델의 경우에는 이동불변 특성의 문제로 인하여 RML, EIV, ELS 등의 계수추정자를 바로 고속 알고리즘으로 구현할 수 없으므로 아직 연구가 제대로 되지 않고 있다.^(4,16)

따라서 본 논문에서는 온라인 ARMA 계수추정을 위하여, ELS가 상관함수 행렬의 블록 별로 이동불변 특성을 만족함을 이용하여 공분산형의 경우에 대해 고속알고리즘으로 구현한 공분산형 ARMA FTF를 제안하였다. 제안된 알고리즘은 embedding기법을 사용한 2채널 AR방식과 달리 AR계수와 MA계수의 차수를 달리할 수 있고, 13N+37 MADPR(Multiplication And Division Per Recursion)의 연산량을 필요로 하므로 실시간 처리가 요구되는 적응 필터링, 온라인 스펙트럼 추정, 현대역 신호의 추정 등 여러 분야에 유용하게 사용될 수 있다.

II. ELS 계수추정과 사영연산자

신호 발생 시스템이 극(poles) 외에 영점(zeros)을 갖고 있거나 유색잡음이 존재할 경우에는 AR모델로 모형화하게 되면 차수가 커질 뿐만 아니라 정확도가

떨어지게 되므로 ARMA 모델로 모형화하는 것이 바람직하다.

신호(시스템)가 다음과 같이 ARMA 모델로 모형화된다고 하자.

$$y(t) = -\sum_{i=1}^p a_i y(t-i) + \sum_{j=0}^q b_j w(t-j) \quad (2.1)$$

여기서 $b_0=1$ 이며 $\{w(\cdot)\}$ 는 백색잡음 프로세스이다.

(2.1)에 대한 온라인 계수추정자들 중에서 ELS(Extended Least Squares)는 추정자 구조의 단순성과 계산량에서의 이점으로 인하여 많이 사용되고 있다. (2.1)의 ARMA모델에서 시간 $t-1$ 까지의 백색잡음 시퀀스 $\{w(\cdot)\}$ 의 값을 안다고 가정하면 (2.1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$y(t) = -\phi'(t)\theta + w(t) \quad (2.2)$$

$$\text{여기서 } \theta = [a_1 \dots a_p, -b_1 \dots -b_q]' \quad (2.3)$$

$$\phi(t) = [y(t-1) \dots y(t-p), w(t-1) \dots w(t-q)]' \quad (2.4)$$

그러면 계수추정 문제는 다음의 예측오차 파워를 최소화하는 해를 구하는 단순한 LS 계수추정 문제로 변환된다.

$$E(t) = \sum_{\tau=1}^t e^2(\tau) = \sum_{\tau=1}^t (y(\tau) + \phi'(\tau)\theta(\tau))^2 \quad (2.5)$$

따라서 ELS는 RLS와 같은 구조를 갖는다. 그런데 실제로는 $\{w(\cdot)\}$ 의 값을 모르므로 (2.2)로부터 $w(t)$ 의 추정치는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{w}(t) = y(t) + \phi'(t)\theta(t) = e(t) \quad (2.6)$$

이와 같이 $\{w(\cdot)\}$ 를 예측오차 시퀀스 $\{e(\cdot)\}$ 로 대체하여 RLS 구조로 계수추정을 수행하는 것이 ELS로서 RML과 유사하나 RML에식화한 달리 prefilter를 사용하지 않으므로 계산량의 부담이 작다.^(2,3)

데이터 집합이 공분산형의 경우 ELS 계수추정자는 다음과 같이 주어진다.

$$\theta(t) = -[X_0'(t)X_0(t)]^{-1}X_0'(t)y(t) = -R^{-1}(t)r(t) \quad (2.7)$$

여기서

$$X_0(t) = [s^{-1}y(t) \dots s^{-p}y(t) \quad s^{-1}w(t) \dots s^{-q}w(t)] \\ = [Y_{1,p}(t) \quad W_{1,q}(t)] = [\phi(p) \dots \phi(t)]' \quad (2.8)$$

$$y(t) = [y(p) \dots y(t)]' \quad (2.9)$$

$$w(t) = [w(p) \dots w(t)]' \quad (2.10)$$

이고 (2.8)의 s는 다음과 같이 정의되는 이동연산자이다.

$$s^{-1}y(t) = [y(p-1) \dots y(t-1)]' \quad (2.11)$$

추정오차의 파워를 최소화하는 최소자승 개념에 근거한 순환 계수추정 알고리즘, 특히 고속알고리즘을 유도할 때 기하학적인 접근방식으로 Hilbert 공간에서의 사영의 개념을 사용하면 편리하다.^{14,15)} ELS 계수추정의 경우를 생각해 보면, (2.7)에서 y(t)가 Hilbert공간 H의 요소이고 (y(t) ∈ H), X₀(t)의 열 벡터들에 의해 생성되는 열공간 X_{0,t}이 H의 부분공간 이라면(X_{0,t} ⊂ H), θ(t)를 구하는 문제는 선형공간 X_{0,t}상에 y(t)를 사영시키는 문제로 되며, 이때 추정 오차의 파워를 최소화하는 최소자승 개념은 사영조건을 규정하게 된다. 즉, y(t)와 선형공간 X_{0,t}상의 y(t)의 image벡터 $\hat{y}(t) (= -X_0(t)\theta(t))$ 를 잇는 오차 벡터 e(t)의 norm을 최소화하도록 규정하게 되며, 이를 만족하는 경우는 사영정리로부터 정사영(orthogonal projection)일 때임을 알 수 있다. 따라서

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t) = y(t) - X_0(t)[X_0'(t)X_0(t)]^{-1}X_0'(t)y(t) \\ = [I - X_0(t)[X_0'(t)X_0(t)]^{-1}X_0'(t)]y(t) \quad (2.12)$$

(2.12)로부터 선형공간 X_{0,t}에 대한 사영연산자 P_{0,t}와 정사영연산자 P_{0,t}⁺는 다음과 같이 주어짐을

알 수 있다.

$$P_{0,t} = X(t)[X'(t)X(t)]^{-1}X'(t) \quad (2.13)$$

$$P_{0,t}^+ = I - X(t)[X'(t)X(t)]^{-1}X'(t) \quad (2.14)$$

사영연산자와 정사영연산자는 자기멱적(idempotent)이고 대칭이다. 즉

$$P_{0,t} \cdot P_{0,t} = P_{0,t}, \quad P_{0,t}' = P_{0,t} \quad (2.15a)$$

$$P_{0,t}^+ \cdot P_{0,t}^+ = P_{0,t}^+, \quad P_{0,t}^{+'} = P_{0,t}^+ \quad (2.15b)$$

또한 행렬 X₀(t)에서 최근의 데이터 벡터 ϕ'(t)가 빠진 행렬을 X₀⁻(t), 최초의 데이터 벡터 ϕ'(p)가 빠진 행렬을 X₀⁺(t)라고 하면 이와 관련하여 다음과 같이 전향 및 후향 사영(oblique projection) 연산자를 정의할 수 있다.

$$P_{0,t}^- = X_0(t)[X_0^{-'}(t)X_0^-(t)]^{-1}X_0^{-'}(t) \quad (2.16)$$

$$P_{0,t}^+ = X_0(t)[X_0^{+'}(t)X_0^+(t)]^{-1}X_0^{+'}(t) \quad (2.17)$$

공분산형 ARMA FTF의 유도에 유용한 사영연산자의 성질은 부록 A에 주어져 있다.

III. 공분산형 ARMA 고속 transversal 필터(FTF)

고속 transversal 필터(FTF)는 순환 알고리즘에서 이동불변 특성에 의하여 시간 t에서 t+1로 시퀀스 신호를 처리해야 할 상당량의 정보가 보존되는 점을 이용하여 치수순환식인 Levinson순환식을 확장하여 시순환식을 구현한 것으로서 고속 Kalman 이득의 갱신이 알고리즘의 핵심이다. 그런데 공분산형의 경우 데이터 근사 상관함수 행렬의 Toeplitz 구조가 전치 원도우형의 경우보다 많아 파괴되어 이동불변 특성의 만족도가 떨어지므로 고속 Kalman 이득을 생성하는 과정에서 사영공간의 변화가 전치원도우형보다 복잡하게 되어 알고리즘의 유도도 훨씬 까다롭고 연산량도 증가하게 된다.^(4,13-15)

(2.7)의 공분산형 ELS 계수추정자에서 데이터 근사 상관함수 행렬을 살펴보면 다음과 같이 된다.

$$R(t) = X_o'(t)X_o(t) = \begin{bmatrix} Y_{1,p}(t)Y_{1,p}(t) & Y_{1,p}(t)W_{1,q}(t) \\ W_{1,q}(t)Y_{1,p}(t) & W_{1,q}(t)W_{1,q}(t) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

그러므로 ARMA 모델에서는 이동불변 특성이 상관함수 행렬 전체가 아니라 (3.1)의 각 블록 별로 만족되어 AR 모델에서의 LS계수추정자처럼 바로 고속알고리즘으로 구현할 수 없게 된다. 이 문제를 해결하기 위하여 $y(t)$ 와 $w(t)$ 에 대한 FLP(Forward Linear Predictor)와 BLP(Backward Linear Predictor)를 구성하여 이들을 결합시켜 FTF 알고리즘으로 구현한다.

우선 다음과 같은 데이터 행렬을 정의하자.

$$X_1(t) = [\phi(p+1) \dots \phi(t+1)]' \quad (3.2)$$

$$X_e(t) = [\phi_e(p) \dots \phi_e(t)]' \quad (3.3)$$

여기서

$$\phi_e(t) = [y(t) \dots y(t-p) \ w(t) \dots w(t-q)]' \quad (3.4)$$

그러면 ARMA 계수를 시계신하는 데 중요한 역할을 하는 고속 Kalman 이득의 시계신은 사영공간을 $X_{o,t} \Rightarrow X_{e,t} \Rightarrow X_{1,t} \Rightarrow X_{o,t+1}$ 으로 바꾸면서 이루어지게 되는데, 표 1에 각 사영공간에 대한 고속 Kalman 이득 행렬과 벡터가 정의되어 있다.

여기서 σ 는 다음과 같이 정의되는 pinning 벡터이다.

표 1. 사영공간에 따른 고속 Kalman 이득 행렬 및 벡터

변수	사영공간	정 의	식 번호
$K(t)$	$X_{o,t}$	$X_o(t)[X_o'(t)X_o(t)]^{-1}$	(3.5)
$K_1(t)$	$X_{1,t}$	$X_1(t)[X_1'(t)X_1(t)]^{-1}$	(3.6)
$K_e(t)$	$X_{e,t}$	$X_e(t)[X_e'(t)X_e(t)]^{-1}$	(3.7)
$g(t)$	$X_{o,t}$	$\sigma K(t) = \phi'(t)[X_o'(t)X_o(t)]^{-1}$	(3.8)
$g_1(t)$	$X_{1,t}$	$\sigma K_1(t) = \phi'(t+1)[X_1'(t)X_1(t)]^{-1}$	(3.9)
$g_e(t)$	$X_{e,t}$	$\sigma K_e(t) = \phi_e'(t)[X_e'(t)X_e(t)]^{-1}$	(3.10)

$$\sigma = [0 \dots 0 \ 1]' \quad (3.11)$$

앞에서 언급한 것처럼 (2.7)의 계수추정자에 대해 직접 고속 알고리즘을 구현할 수 없으므로 다음과 같은 새로운 데이터 벡터를 생각한다.

$$x_r(t) = [y(t) \ w(t)] \quad (3.12)$$

$$x_b(t) = [s^{-p}y(t) \ s^{-q}w(t)] \quad (3.13)$$

위의 $x_r(t)$ 에 대한 FLP와 $x_b(t)$ 에 대한 BLP를 구성하면 관련변수들은 다음의 표 2와 같이 정의된다.

그러면 $x_r(t) = [y(t) \ w(t)]$ 의 전향예측오차 $e_r(t)$ 와 $x_b(t) = [y(t-p) \ w(t-q)]$ 의 후향예측오차 $e_b(t)$ 는 (3.14)와 (3.16)으로부터

$$\begin{aligned} e_r'(t) &= e_r'(t)\sigma = [I - x_r'(t)K(t)]J_b\phi_e(t) \\ &= A(t)J_b\phi_e(t) \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} e_b'(t) &= e_b'(t)\sigma = [-x_b'(t)K_1(t) \ I]J_b\phi_e(t) \\ &= B(t)J_b\phi_e(t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

표 2. FLP와 BLP의 주요 변수

변 수 명	변 수	정 의	식 번호
FLP 예측오차	$e_r(t)$	$P_{o,1}^+(t)$	(3.14)
FLP 사사영예측오차	$e_r^o(t)$	$P_{o,1}^{o+}(t)$	(3.15)
BLP 예측오차	$e_b(t)$	$P_{e,1}^+(t)$	(3.16)
BLP 사사영예측오차	$e_b^o(t)$	$P_{e,1}^{o+}(t)$	(3.17)
FLP 예측오차파워	$E_r(t)$	$e_r'(t)e_r(t) = x_f'(t)P_{o,1}^+(t)$	(3.18)
BLP 예측오차파워	$E_b(t)$	$e_b'(t)e_b(t) = x_b'(t)P_{e,1}^+(t)$	(3.19)

여기서 $A(t)=[I-xr'(t)K(t)]$

$$B(t)=[-xb'(t)K_1(t)I] \quad (3.23)$$

이고 J_r 와 J_b 는 다음과 같이 정의되는 순열행렬로서

$$J_r \phi_e(t)=[y(t), w(t), \phi'(t)]' \quad (3.24)$$

$$J_b \phi_e(t)=[\phi'(t+1), y(t-p), w(t-q)]' \quad (3.25)$$

각 행의 한 요소만 1이며, $J'J=I$ (즉 $J^{-1}=J'$)이다.

위와 같이 구성된 FLP와 BLP를 결합시켜 AR모델의 경우와 같은 형태로 FTF 알고리즘을 유도하게 되며, 이때 (2.1)의 ARMA 계수는 $A(t)$ 의 첫행으로 부터 얻어지게 된다. 즉

$$\theta(t)=[A(t)]_{1st\ row\{3, N\}} \quad (3.26)$$

그런데 $X_0(t)=[X_0(t-1)0]'$, $X_1(t)=[X_1(t-1)0]'$ 의 관계로부터 전향 사사영 연산자 $P_{0,t}^{f,t}$ 와 $P_{1,t}^{f,t}$ 는 다음의 관계를 만족하므로

$$P_{0,t}^{f,t} = \begin{bmatrix} P_{0,t-1}^{f,t} & 0 \\ -\phi'(t)K_1(t-1) & 1 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$P_{1,t}^{f,t} = \begin{bmatrix} P_{1,t-1}^{f,t} & 0 \\ -\phi'(t)K_1(t-1) & 1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$e_0^o(t)$ 와 $e_1^o(t)$ 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} e_r^o(t) &= [I - xr'(t-1)K(t-1)]J_r \phi_e(t) \\ &= A(t-1)J_r \phi_e(t) \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} e_b^o(t) &= [-xb'(t-1)K_1(t-1)I]J_b \phi_e(t) \\ &= B(t-1)J_b \phi_e(t) \end{aligned} \quad (3.31)$$

위에서 보면 $e_r^o(t)$ 와 $e_b^o(t)$ 는 FLP와 BLP 계수를 갱신하기 전의 사전(apriori) 예측오차와 같음을 알 수 있다. 이러한 사실을 이용하여 연산량을 더 감소시키기 위해 표 3과 같은 변형된 고속 Kalman 이득

과 각변수를 생각하자.

표 3. 변형된 고속 Kalman 이득 행렬 및 벡터와 각변수

변 수	정 의	식번호
$K^*(t)$	$X_0(t)[X_0'(t-1)X_0(t-1)]^{-1}$	(3.31)
$K_1^*(t)$	$X_1(t)[X_1'(t-1)X_1(t-1)]^{-1}$	(3.32)
$K_e^*(t)$	$X_e(t)[X_e'(t-1)X_e(t-1)]^{-1}$	(3.33)
$g^*(t)$	$\sigma^2 K^*(t) = g(t) \gamma^{-1}(t)$	(3.34)
$g_1^*(t)$	$\sigma^2 K_1^*(t) = g_1(t) \gamma_1^{-1}(t)$	(3.35)
$g_e^*(t)$	$\sigma^2 K_e^*(t) = g_e(t) \gamma_e^{-1}(t)$	(3.36)
$\gamma(t)$	$\sigma^2 P_{0,t}^{f,t} \sigma$	(3.37)
$\gamma_1(t)$	$\sigma^2 P_{1,t}^{f,t} \sigma$	(3.38)
$\gamma_e(t)$	$\sigma^2 P_{e,t}^{f,t} \sigma$	(3.39)

(3.34)-(3.36)의 관계는 각변수의 정의에 (A.11), (A.12)를 적용해 얻어지며 각변수 $\gamma(t)$ 는 사영공간 $X_{0,t}$ 와 $X_{0,t}$ 의 교각을 $\omega_0(t)$ 라고 하면 $\cos^2 \omega_0(t)$ 가 되며, $\gamma_1(t)$ 는 사영공간 $X_{1,t}$ 와 $X_{1,t}$ 가 이루는 각이 $\omega_1(t)$ 라면 $\cos^2 \omega_1(t)$ 가 되며, $\gamma_e(t)$ 는 사영공간 $X_{e,t}$ 와 $X_{e,t}$ 가 이루는 각이 $\omega_e(t)$ 라면 $\cos^2 \omega_e(t)$ 가 되므로 이들은 최근의 데이터에 포함된 새로운 정보량의 정도를 판단하는 하나의 기준이 될 수 있다. 그리고 이를 이용하여 최근의 데이터에 포함된 정보량의 영향만 첨가하는 형태로 하여 연산량을 더 감소시킬 수 있게 된다.

이제 정의된 각 필터변수들에 대해 우선 사영공간을 $X_{0,t} \Rightarrow X_{e,t} \Rightarrow X_{1,t}$ 로 바꾸면서 갱신식을 구하는데 그 유도과정은 표 4에 정리되어 있다.

$$e_r(t) = e_r^o(t) \gamma(t) \quad (3.40)$$

$$e_b(t) = e_b^o(t) \gamma_1(t) \quad (3.41)$$

$$E_r(t) = E_r(t-1) + e_r'(t) = e_r^o(t) \quad (3.42)$$

$$E_b(t) = E_b(t-1) + e_b'(t) = e_b^o(t) \quad (3.43)$$

$$A(t) = A(t-1) - e_r'(t)[0 \ 0 \ g^*(t)] \quad (3.44)$$

$$B(t) = B(t-1) - e_b'(t)[g_1^*(t) \ 0 \ 0] \quad (3.45)$$

표 4. 공분산형 ARMA FTF 알고리즘의 유도과정

결과식	관련식
(3.40)	(A.15)(3.14)(3.15)(3.37)
(3.41)	(A.15)(3.16)(3.17)(3.38)
(3.42)	(A.7)(3.18)(3.37)(3.40)
(3.43)	(A.7)(3.19)(3.38)(3.41)
(3.44)	$K'(t) \times (3.14), (A.15)(3.22)(3.34)$
(3.45)	$K_i'(t) \times (3.16), (A.15)(3.23)(3.35)$
(3.46)	(A.1)(A.5)(3.18)(3.37)(3.39)
(3.47)	(A.1)(A.5)(3.19)(3.38)(3.39)
(3.48)	(B.1)(B.4)(3.34)(3.36)(3.44)(3.46)
(3.49)	(B.1)(B.3)(3.35)(3.36)(3.44)(3.46)
(3.52)	(3.41)(3.47)(3.50)
(3.53)	(3.41)(3.43)(3.50)(3.52)

$$\gamma_e(t) = \gamma(t) - e_f(t) E_f^{-1}(t) e_f'(t) \quad (3.46)$$

$$\gamma_e(t) = \gamma_1(t) - e_b(t) E_b^{-1}(t) e_b'(t) \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_e^*(t) &= g_e^*(t) J_f' = [0 \ 0 \ g^*(t)] + e_f(t) E_f^{-1}(t) \\ &\quad \cdot \gamma_e^{-1}(t) A(t-1) \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} [g_1^*(t) \ 0 \ 0] &= \bar{g}_e^*(t) J_f J_b' - e_b(t) E_b^{-1}(t) \\ &\quad \cdot \gamma_e^{-1}(t) B(t-1) \end{aligned} \quad (3.49)$$

그런데 $\bar{g}_e^*(t) = \bar{g}_e^*(t) J_f J_b'$ 라 하고 이의 끝 두 요소를 $\mu(t)$ 라고 하면 (3.49)로부터

$$\mu(t) = e_b(t) E_b^{-1}(t) \gamma_e^{-1}(t) \quad (3.50)$$

$$[g_1^*(t) \ 0 \ 0] = \bar{g}_e^*(t) - \mu(t) B(t-1) \quad (3.51)$$

따라서

$$\gamma_1(t) = \gamma_e(t) [1 - \mu(t) e_b'(t) \gamma_e(t)]^{-1} \quad (3.52)$$

$$e_b^0(t) = \mu(t) E_b(t-1) \quad (3.53)$$

데이터 집합의 형태가 전치원도우형일 경우 $X_0(t+1) = [0 \ X_1'(t)]'$, 즉 사영공간 $X_{0,t+1} = X_{1,t}$ 가 되

므로 필터변수에 대한 표현이 조금 다르지만 알고리즘의 유도는 이상의 과정과 동일하다. 그러나 공분산형에서는 고속 Kalman 이득갱신의 최종 과정인 $X_{1,t} := X_{0,t+1}$ 에 해당되는 갱신식을 구해야 하는데 이에 필요한 필터변수들의 정의와 유도과정이 표 5에 나타나 있다.

앞에서 설명한 것처럼 $\tilde{\gamma}(t)$ 와 $\alpha(t)$ 는 필터의 각변수로서, 사영공간 $X_{0,t}$ 와 $X_{1,t}$ 의 교각이 $\tilde{\omega}_0(t)$ 라면 $\gamma(t)$ 는 $\cos^2 \tilde{\omega}_0(t)$ 가 되고 $\alpha(t)$ 는 $\omega_0(t)$ 와 $\tilde{\omega}_0(t)$ 에 관련된 변수이다. 따라서 그 절대값이 1보다 작다.

표 5. 필터변수 및 유도과정

변수	정의	관련식	결과식
$g(t)$	$\pi' K(t)$		
$\tilde{\gamma}(t)$	$\pi' P_{0,t}^{-1} \pi$	(A.15)	(3.58)
$h^*(t)$	$h(t) \tilde{\gamma}^{-1}(t)$	(3.57)(3.61)(3.62)	(3.64)
$\alpha(t)$	$\pi' P_{0,t}^{-1} \sigma$	(A.15)(3.37)	(3.56)
$\beta(t)$	$\alpha(t) \gamma^{-1}(t)$	(3.56)	(3.59)
$\beta^*(t)$	$\alpha(t) \tilde{\gamma}^{-1}(t)$	(3.56)(3.57)(3.58)	(3.60)
$\zeta(t)$	$-h^*(t-1) \phi(t)$		(3.54)

여기서 π 는 다음과 같이 정의되는 pinning 벡터이다.

$$\pi = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (3.55)$$

$$\alpha(t) = -h^*(t-1) \phi(t) \tilde{\gamma}(t-1) \gamma(t) \quad (3.56)$$

$X_0^*(t+1) = [0 \ X_1'(t)]'$ 이므로, (A.17)과 표 5의 변수의 정의로부터

$$\gamma(t+1) = \gamma_1(t) [1 - \beta(t+1) \beta^*(t+1)]^{-1} \quad (3.57)$$

또한 $X_0^-(t+1) = [X_0(t) \ 0]$ 이므로

$$\tilde{\gamma}(t+1) = \tilde{\gamma}(t) [1 - \beta(t+1) \beta^*(t+1)]^{-1} \quad (3.58)$$

$$\beta(t+1) = -h^*(t) \phi(t+1) \gamma(t) = \zeta(t+1) \tilde{\gamma}(t) \quad (3.59)$$

$$\beta^*(t+1) = -h^*(t) \phi(t+1) \tilde{\gamma}(t) \gamma(t+1) \tilde{\gamma}^{-1}(t+1)$$

$$= \zeta(t+1) \gamma_i(t) \quad (3.60)$$

이제 마지막으로 $g^*(t+1)$ 과 $h^*(t+1)$ 을 계산하면 된다. 우선 (A.16)과 (A.14)로부터

$$P_{0:t+1} \sigma_{t+1} = P_{0:t+1}^b \sigma_{t+1} + P_{0:t+1} \pi_{t+1} (\pi_{t+1}' P_{0:t+1}^{-1} \pi_{t+1})^{-1} \cdot \pi_{t+1}' P_{0:t+1}^{-1} \sigma_{t+1} \quad (3.61)$$

$$P_{0:t+1} \sigma_{t+1} = P_{0:t+1}^b \sigma_{t+1} + P_{0:t+1} \pi_{t+1} (\sigma_{t+1}' P_{0:t+1}^{-1} \sigma_{t+1})^{-1} \cdot \sigma_{t+1}' P_{0:t+1}^{-1} \pi_{t+1} \quad (3.62)$$

그러면 (3.57), (3.61) 그리고 (3.62)로부터

표 6. 공분산형 ARMA 고속 transversal 필터

순 환 식	MADPR
$\hat{e}_t(t) = A(t-1) J_1 \phi(t)$	2N
$e_t(t) = \hat{e}_t(t) \gamma(t)$	2
$E_t(t) = E_t(t-1) + e_t'(t) \hat{e}_t(t)$	4
$\gamma_e(t) = \gamma(t) - e_t(t) E_t^{-1}(t) e_t'(t)$	10
$\hat{g}_e^*(t) = [0 \quad 0 \quad g^*(t)] + e_t(t) E_t^{-1}(t) \gamma_e^{-1}(t) A(t-1)$	2N+2
$\hat{g}_e^*(t) = \hat{g}_e^*(t) J_1 J_1'$	0
$\mu(t) = [\hat{g}_e^*(t)]_{N+1, N+2}$	0
$A(t) = A(t-1) - e_t'(t) [0 \quad 0 \quad g^*(t)]$	2N
$\theta(t) = [A(t)]_{1st \text{ row}}$	0
$\hat{e}_b(t) = \mu(t) E_b(t-1)$	4
$\gamma_i(t) = \gamma_e(t) / [1 - \mu(t) e_b^0(t) \gamma_e(t)]$	4
$e_b(t) = e_b^0(t) \gamma_i(t)$	2
$E_b(t) = E_b(t-1) + e_b'(t) e_b^0(t)$	4
$[g^*(t) \quad 0 \quad 0] = \hat{g}_e^*(t) - \mu(t) B(t-1)$	2N
$B(t) = B(t-1) - e_b(t) [g^*(t) \quad 0 \quad 0]$	2N
$\zeta(t+1) = -h^*(t) \beta(t+1)$	N
$\beta(t+1) = \zeta(t+1) \tilde{\gamma}(t)$	1
$\beta^*(t+1) = \zeta(t+1) \gamma(t)$	1
$\gamma(t+1) = \gamma_i(t) / [1 - \beta(t+1) \beta^*(t+1)]$	2
$\tilde{\gamma}(t+1) = \tilde{\gamma}(t) / [1 - \beta(t+1) \beta^*(t+1)]$	1
$g^*(t+1) = g^*(t) + h^*(t) \beta(t+1)$	N
$h^*(t+1) = h^*(t) + g^*(t) \beta^*(t+1)$	N

$$g^*(t+1) = g^*(t) + h^*(t) \beta(t+1) \quad (3.63)$$

또한

$$h^*(t+1) = h^*(t) + g^*(t) \beta^*(t+1) \quad (3.64)$$

이상의 결과를 정리한 공분산형 ARMA FTF 알고리즘이 표 6에 주어지 있다. 표 6에서 먼저 첫번째와 두번째 식의 제 1요소를 먼저 계산하면 그 결과가 바로 (2.6)의 $\hat{w}(t)$ 가 되므로 이를 사용하여 첫번째와 두번째 식의 제 2요소를 계산하면 된다. 공분산형 ARMA FTF 알고리즘은 13N+37 MADPR의 연산량을 필요로 하여 (N=p+q) 모델 차수 차원에 연산량이 비례하기 때문에 온라인 계수추정에 효과적이며, 또한 embedding 기법을 사용한 2채널 AR모델 기법과는 달리 AR부분과 MA부분의 차수를 달리할 수 있는 이점이 있다.

초기값에 대한 사전정보가 전혀 없을 경우, 일반적으로 공분산형 알고리즘의 초기화는 모델차수만큼의 데이터가 들어올 때까지 전치윈도우형 시갱신 계수 추정 알고리즘이나 시-차수갱신 계수추정 알고리즘으로 추정을 한 뒤 이를 초기조건으로 사용하게 된다. 그런데 공분산형 ARMA FTF 알고리즘의 경우에는 AR계수와 MA계수의 차수가 달라서 효과적인 시-차수 순환식의 구성이 여의치 않으므로 전치윈도우형 시갱신 계수추정 알고리즘으로 초기화하여야 한다. 다른 계수추정 알고리즘을 사용하지 않고 공분산형 ARMA FTF 알고리즘을 돌리고자 할 경우에는 다음의 근사 초기화 조건을 사용하면 된다.

$$A(p-1) = [I \quad 0], \quad B(p-1) = [0 \quad I] \quad (3.65a)$$

$$\gamma(p) = 1, \quad \dot{\gamma}(p) = 1 \quad (3.65b)$$

$$E_t(p-1) = E_b(p-1) = \delta I \quad (3.65c)$$

$$g^*(p) = h^*(p) = \phi'(p) / \Sigma \quad (3.65d)$$

$$\Sigma = \delta + y^2(0) + \dots + y^2(p-1) \quad (3.65e)$$

$$\phi(p)=[y(p-1)\dots\dots y(0) 0\dots\dots 0]' \quad (3.65f)$$

(3.65b)와 (3.65d)는 변수의 정의로부터 주어지는데, 이때 백색잡음 $w(0), \dots, w(p-1)$ 의 추정값이 없으므로 (3.65e)와 (3.65f)에서 보듯이 0으로 대체하게 되며 그 결과 계수의 수렴이 늦어지게 된다.

IV. 시뮬레이션 및 검토

제안된 알고리즘의 유효성을 검증하기 위하여 스펙트럼 추정이 까다로운 신호 데이터로서 다음과 같은 ARMA 프로세스와 정현파 데이터의 두가지 경우에 대해 스펙트럼 추정 시뮬레이션을 수행하였다.

예 1) 신호 데이터가 다음의 ARMA(4,2) 모델로부터 발생된다.

$$y(t)=2.7607y(t-1)-3.8106y(t-2)+2.6535y(t-3)-0.9238y(t-4)+v(t) \quad (4.1)$$

$$v(t)=w(t)-0.5w(t-1)+0.3w(t-2) \quad (4.2)$$

그림 1은 신호 데이터의 참 파워 스펙트럼이다. 시뮬레이션은 512개의 데이터를 사용했으며 그림 2와 3에 각각 EIV와 공분산형 ARMA FTF로 추정된 결과를 나타내었다. 그림 2.a와 그림 3.a에 나타낸 표준화 제곱오차는 다음과 같이 계산된 것이다.

$$NE = \frac{\sum (a_i - \hat{a}_i)^2 + \sum (b_j - \hat{b}_j)^2}{\sum a_i^2 + \sum b_j^2} \quad (4.3)$$

시뮬레이션 결과에서 볼 수 있듯이, 제안된 알고리즘은 EIV보다 훨씬 작은 계산량을 필요로 하며(EIV는 $3N^2+5N$ MADPR, 공분산형 ARMA FTF는 $13N+37$ MADPR으로 ARMA모델의 차수 N 이 클수록 계산량의 차이가 커진다), 수렴 속도가 EIV에 비해 조금 느리나 양호한 수렴 특성을 보이고 있으며 스펙트럼도 잘 추정하고 있다.

예 2) 두 개의 인접한 정현파 신호가 유색 잡음에 오염된 경우이다.

$$y(t) = \sqrt{6.3} \sin(2\pi f_1 t) + \sqrt{20} \sin(2\pi f_2 t) + v(t) \quad (4.4)$$

여기서 $v(t)$ 는 식 (4.2)의 유색잡음이며, $f_1=0.15$, $f_2=0.165$ 이고, SNR은 두 정현파에 대해 각각 5dB, 10dB이다.

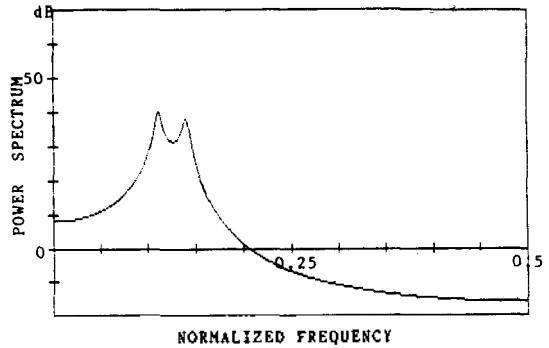


그림 1. ARMA(4,2) 프로세스의 참 스펙트럼(예 1)

Fig. 1. True spectrum of ARMA(4,2) process(ex. 1)

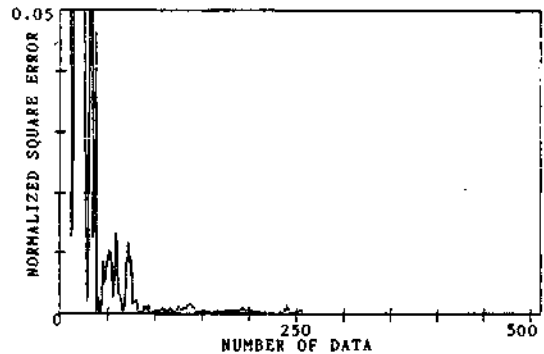


그림 2a. 추정 ARMA 계수의 표준화 제곱 오차

Fig. 2.a. Normalized Square Error of estimated ARMA parameters

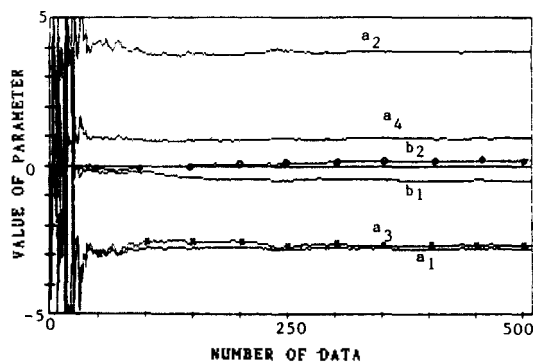


그림 2b. 추정 ARMA 계수

Fig. 2.b. Estimated ARMA parameters

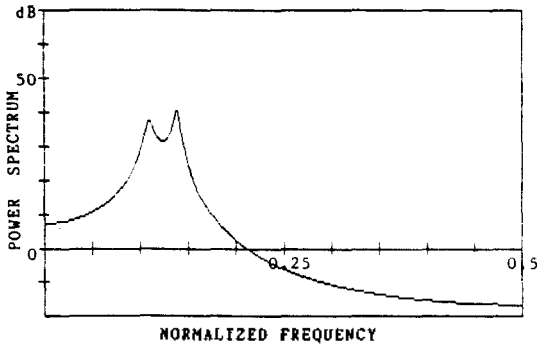


그림 2.c. ARMA 프로세스의 추정 스펙트럼
 Fig. 2.c. Estimated spectrum of ARMA process
 그림 2. EIV에 의한 ARMA(4,2) 프로세스의 추정(예 1)
 Fig. 2. Estimation of ARMA(4,2) process using EIV (ex. 1)

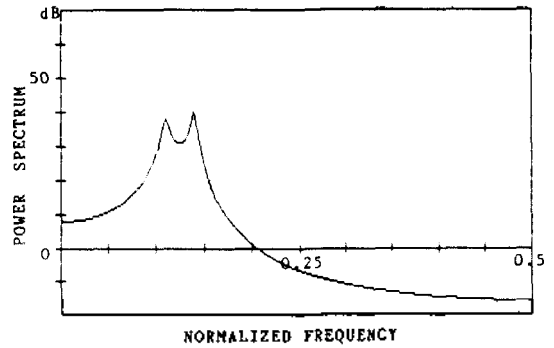


그림 3.c. ARMA 프로세스의 추정 스펙트럼
 Fig. 3.c. Estimated spectrum of ARMA process
 그림 3. 공분산형 ARMA FTF에 의한 ARMA(4,2) 프로세스의 추정(예 1)
 Fig. 3. Estimation of ARMA(4,2) process using covariance type ARMA FTF(ex. 1)

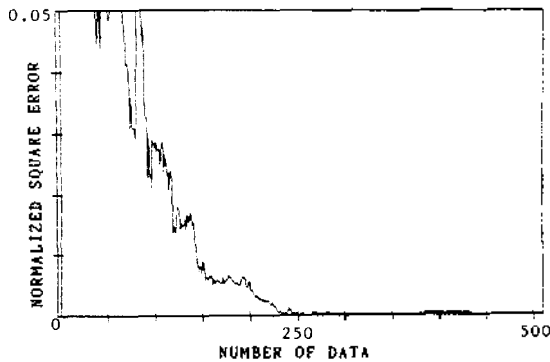


그림 3.a. 추정 ARMA 계수의 표준화 제곱 오차
 Fig. 3.a. Normalized square error of estimated ARMA parameters

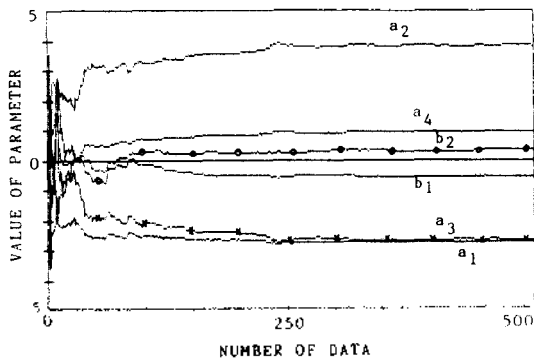


그림 3.b. 추정 ARMA 계수
 Fig. 3.b. Estimated ARMA parameters

예 2의 신호 데이터는 협대역 신호로서 두 정현파의 크기가 다르며 유색잡음에 오염되어 있으므로 두 개의 정현파를 분리해내기 힘든 예제이다. 시뮬레이션은 역시 512데이터를 사용하였으며, 비교를 위하여 그림 4에 전치윈도우형 AR FTF에 의한 추정 스펙트럼을($p=30$), 그림 5에는 공분산형 ARMA FTF에 의한 추정 스펙트럼을 나타내었다($p=14, q=4$). 시뮬레이션 결과에서 볼 수 있듯이 제안된 알고리즘은 AR FTF에서보다 작은 차수로 두 개의 인접한 정현파를 잘 찾아내고 있다.

그런데 공분산형 ARMA FTF도 다른 FTF와 마찬가지로 계산량의 감소를 위하여 필터 변수들 간에 복잡하게 연관되어 있으므로 round-off 오차의 누적 등으로 인하여 특히 장시간 동작(long run)시에 수리

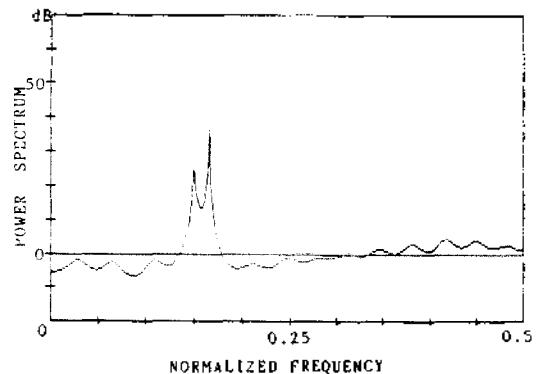


그림 4. 전치윈도우형 AR FTF에 의한 추정 스펙트럼(예 2)
 2)

Fig. 4. Estimated spectrum by prewindowed type AR FTF(ex. 2)

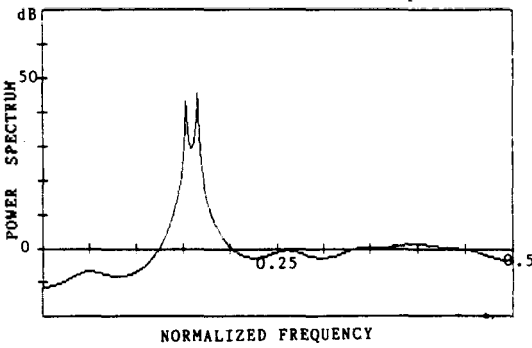


그림 5. 공분산형 ARMA FTF에 의한 추정 스펙트럼(예 2)

Fig. 5. Estimated spectrum by covariance type ARMA FTF(ex. 2)

적 불안정성을 나타내는 경향이 있다. 이러한 수리적 불안정성의 문제는 알고리즘의 정규화 등으로 개선될 수 있을 것으로 기대된다.⁽¹⁷⁾

V. 결 론

신호 또는 시스템을 ARMA모델로 모형화하여 적응방식이나 실시간처리 기법을 적용할 경우 연산량의 부담이 작은 계수추정 알고리즘이 필요하다. 따라서 본 논문에서는 온라인 ARMA 계수추정에 널리 사용되고 있는 ELS에 대해 이동불변 특성이 데이터 근사 상관함수 행렬의 블록 별로 만족함을 이용하여 공분산형의 구조를 갖는 공분산형 ARMA FTF 알고리즘을 구현하였다.

알고리즘의 유도에는 기하적인 접근 방식으로 사영연산자를 사용하였으며, 따라서 유도과정 중에 전치윈도우형의 ARMA FTF를 얻을 수 있다. 제안된 알고리즘은 모델차수 차원에 비례하는 $13N+37$ MADPR의 연산량을 필요로 하므로 온라인 추정에 효과적이다. 또한 제안된 공분산형 ARMA FTF 알고리즘은 2채널 AR 모델 방식과는 달리 AR계수와 MA계수의 차수를 달리할 수 있는 장점이 있다.

시뮬레이션 결과에서도 볼 수 있듯이 적응필터링 및 계수추정, 온라인 스펙트럼 추정, 협대역 신호 추

정 등 여러 응용분야에 유용하게 사용할 수 있다.

공분산형 ARMA FTF에 대한 시-차수 순환식을 이용한 정확한 초기화, 그리고 알고리즘의 정규화에 의한 수리적 안정성의 개선 등은 앞으로 계속 연구되어야 할 과제이다.

참 고 문 헌

1. L.H.Koopmans, The Spectral Analysis of Time Series, New York, Academic Press, 1974.
2. L.Ljung, System Identification: Theory for the User, New York, Prentice Hall, 1987.
3. T.Soderstrom and P.Stoica, System Identification, London, Prentice Hall, 1989.
4. M.L.Honig and D.G.Messerschmitt, Adaptive Filters: Structures, Algorithms, and Applications, Boston, Kluwer Academic Publishers, 1984.
5. R.L.Moses, "Design and Analysis of Fast Recursive ARMA Spectral Estimators", Ph. D. Dissertion, Dept. of Elec. Eng., Virginia Polytech. Inst. and State Univ., Blacksburg, Virginia, 1984.
6. L.Ljung, M.Morf and D.Falconer, "Fast Calculation of Gain Matrices for Recursive Estimation Schemes", Int. J. Contr., Vol.27, pp.1-19, 1978.
7. M.Morf and D.T.L.Lee, "Fast Algorithms for Speech Modeling", Inform. Syst. Lab., Stanford Univ., Stanford, CA, Tech. Rep. M303-1, 1978.
8. A.J.Robins and P.E.Wellstead, "Recursive System Identification Using Fast Algorithms", Int. J. contr., Vol.33, pp.455-480, 1981.
9. J.M.Cioffi and T.Kailath, "Fast Recursive Least Squares Transversal Filters for Adaptive Filtering", IEEE Tr. Acoust., Speech, Signal Processing, ASSP-32, pp.304-337, 1984.
10. J.M.Cioffi and T.Kailath, "Windowed Fast Transversal Filters Adaptive Algorithms with Normalization", IEEE Tr.Acoust., Speech, Signal Processing, Vol.ASSP-33, pp.607-625, 1985.
11. N.Kalouptsidis and B.Theodoridis, "Fast Adaptive Least Squares Algorithms for Power Spectral Estimation", IEEE Tr. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol.ASSP-35, pp.601-670, 1987.
12. S.H.Ardalan and L.J.Faber, "A Fast ARMA Transversal RLS Filter Algorithm", IEEE Tr. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol.ASSP-36, pp.349-358, 1988.

13. C.L.Nikias and P.D.Scott, "The Covariance Least-Squares Algorithm for Spectral Estimation of Processes of Short Data Length", IEEE Tr. Geosci. Remote Sensing, Vol. GE-21, pp.180-190, 1983.
14. N.Kalouptsidis, G.Carayannis and D.Manolakis, "A Fast Covariance Type Algorithm for Sequential Least Squares Filtering and Prediction", IEEE Automat. Contr., Vol. AC-29, pp.752-755, 1984.
15. 이 철 회, "ARMA 스펙트럼 추정을 위한 고속알고리즘에 관한 연구", 박사 학위논문, 서울대학교 대학원 전기공학과, 1989.
16. 이 철 회, "ARMA 스펙트럼 추정을 위한 확장최소자승법 고속 Transversal 필터", 강원대학교 과학기술연구 제29집, pp.317-328, 1990.
17. P.Fabre and C.Gueguen, "Improvement of the Fast Recursive Least Squares Algorithms Via Normalization : A Comparative Study", IEEE Tr. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-34, pp.296-308, 1986.

▲ 이 철 회 (Chul Hewi Lee) 1959년 7월 4일생
 1983년 2월 : 서울대학교 전기공학과 졸업(공학사)
 1985년 2월 : 서울대학교 대학원 전기공학과 졸업
 (공학석사)
 1989년 2월 : 서울대학교 대학원 전기공학과 졸업
 (공학박사)
 1990년 3월 ~ 현재 : 강원대학교 전기공학과 조교수

▲ 장 영 수 (Young Soo Jang) 1963년 8월 9일생
 1986년 2월 : 서울대학교 전기공학과 졸업(공학사)
 1988년 2월 : 서울대학교 대학원 전기공학과 졸업
 (공학석사)
 1990년 8월 : 서울대 대학원 전기공학과 박사과정 수료

부 록

A 사영연산자의 성질

A-1: 행렬의 열의 순서가 바뀌더라도 열벡터들이 생성하는 열공간은 변함이 없으므로 사영연산자도 변하지 않는다.

$$P_{Y'} = YJ'[JY'YJ']^{-1}JY' = YJ'J[Y'Y]^{-1}JY' = Y[Y'Y]^{-1}Y' = P_Y \quad (A.1)$$

그런데

$$P_{[Y', Z]} = \begin{bmatrix} Y' & Y & Y' & Z \\ Z' & Y & Z' & Z \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (Y'Y)^{-1} + (Y'Y)^{-1}Y'Z(Z'P_Y^\dagger Z)^{-1}Z'Y(Y'Y)^{-1} & -(Y'Y)^{-1}Y'Z(Z'P_Y^\dagger Z)^{-1} \\ -(Z'P_Y^\dagger Z)^{-1}Z'Y(Y'Y)^{-1} & (Z'P_Y^\dagger Z)^{-1} \end{bmatrix} \quad (A.3)$$

이므로 (A.3)을 (A.2)에 대입하여 정리하면

$$P_{[Y', Z]} = P_Y + P_Y^\dagger Z(Z'P_Y^\dagger Z)^{-1}Z'P_Y^\dagger \quad (A.4)$$

$$P_{[Y', Z]}^\dagger = I - P_Y = P_Y^\dagger - P_Y^\dagger Z(Z'P_Y^\dagger Z)^{-1}Z'P_Y^\dagger \quad (A.5)$$

A-3(정사영연산자의 전향 시갱신): $X = [X', x]'$, $Y = [Y', y]'$, $Z = [Z', z]'$ 라고 하면 (A.1)과 (A.4)로부터

$$\begin{aligned} X'P_{[Y', Z]}^\dagger Z &= X'P_{[Y', Z]}^\dagger Z \\ &= X' \begin{bmatrix} P_Y^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Z = X'P_Y^\dagger Z \\ &= X'P_{[Y', Z]}^\dagger Z \\ &= X'P_Y^\dagger Z - (X'P_Y^\dagger \sigma)(\sigma'P_Y^\dagger \sigma)^{-1}(\sigma'P_Y^\dagger Z) \end{aligned} \quad (A.6)$$

따라서 (A.6)으로부터

$$X'P_Y^\dagger Z = X'P_Y^\dagger Z + (X'P_Y^\dagger \sigma)(\sigma'P_Y^\dagger \sigma)^{-1}(\sigma'P_Y^\dagger Z) \quad (A.7)$$

A-2(사영연산자의 차수갱신): 사영연산자의 정의에 의해

$$P_{[Y', Z]} = [Y', Z] \begin{bmatrix} Y' & Y & Y' & Z \\ Z' & Y & Z' & Z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y' \\ Z' \end{bmatrix} \quad (A.2)$$

A-4(정사영연산자의 후향 시갱신): $X = [\bar{x}, \bar{X}]'$, $Y = [\bar{y}, \bar{Y}]'$, $Z = [\bar{z}, \bar{Z}]'$ 라고 하면 전향시갱신의 경우와 같이 하여

$$X'P_Y Z = \bar{X}'P_{\bar{Y}}\bar{Z} + X'P_Y^\dagger \pi(\pi'P_Y^\dagger \pi)^{-1}(\pi'P_Y Z) \quad (A.8)$$

A-5(사사영을 이용한 사영연산자의 갱신): $Y^- = [Y', 0]'$ 라고 하면 (A.1)과 (A.4)로부터

$$P_{[Y', 0]} = P_\sigma + P_{Y^-} = P_Y + P_Y^\dagger \sigma(\sigma'P_Y^\dagger \sigma)^{-1}\sigma'P_Y^\dagger \quad (A.9)$$

$$P_Y = P_\sigma + P_{Y^-} - \sigma(\sigma'P_Y^\dagger \sigma)^{-1}\sigma'P_Y^\dagger + P_Y \sigma(\sigma'P_Y^\dagger \sigma)^{-1}\sigma'P_Y^\dagger \quad (A.10)$$

여기서 $[Y' Y]^{-1} = Q$, $[Y' Y^-]^{-1} = \underline{Q}$ 라고 표시하면, 행렬 역연산 보조정리에 의해

$$Q = [Y' Y + y y']^{-1} = \underline{Q} - (\underline{Q} y y' \underline{Q}) / (1 + y' \underline{Q} y) \quad (A.11)$$

그런데 $(1 - Y' QY) = (\sigma' P \nabla \sigma)$ 이므로 (A.11)로부터

$$I + Y' QY = (1 - Y' QY)^{-1} = (\sigma' P \nabla \sigma)^{-1} \tag{A.12}$$

따라서 (A.10)의 우변의 앞의 세 항은

$$\begin{aligned} & P_0 + P_Y - \sigma(\sigma' P \nabla \sigma)^{-1} \sigma' P \nabla \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix} Q [Y', 0] - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -Y' QY' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix} Q [Y', 0] + \begin{bmatrix} 0 \\ Y \end{bmatrix} Q [Y', 0] \\ &= Y [Y' Y]^{-1} [Y', 0] = Y [(Y^-)' Y^-]^{-1} (Y^-)' = P_Y \end{aligned} \tag{A.13}$$

그러므로 (A.13)을 (A.10)에 대입하면

$$P_Y = P_Y^{\dagger} + P_Y \sigma (\sigma' P \nabla \sigma)^{-1} \sigma' P \nabla \tag{A.14}$$

$$P \nabla = P \nabla^{\dagger} - P_Y \sigma (\sigma' P \nabla \sigma)^{-1} \sigma' P \nabla \tag{A.15}$$

마찬가지 방법으로

$$P_Y = P_Y^{\flat} + P_Y \pi (\pi' P \nabla \pi)^{-1} \pi' P \nabla \tag{A.16}$$

$$P \nabla = P \nabla^{\flat} - P_Y \pi (\pi' P \nabla \pi)^{-1} \pi' P \nabla \tag{A.17}$$

B. 고속 Kalman 이득 행렬의 성질

B-1: 행렬 Y에 대한 고속 kalman 이득 행렬을 K_Y , 열벡터의 위치가 바뀐 행렬 YJ' 에 대한 고속 kalman 이득 행렬을 $K_{YJ'}$ 라고 하면

$$\begin{aligned} K_{YJ'} &= YJ' [JY' YJ']^{-1} = YJ' J [Y' Y]^{-1} J' \\ &= Y [Y' Y]^{-1} J' = K_Y J' \end{aligned} \tag{B.1}$$

B-2(고속 Kalman 이득 행렬의 차수개신): 행렬 Y에 대한 고속 Kalman 이득행렬을 K_Y , $[Y, Z]$ 에 대한 고속 Kalman 이득 행렬을 $K_{[Y, Z]}$ 하면

$$K_{[Y, Z]} = [Y, Z] \begin{bmatrix} Y' Y & Y' Z \\ Z' Y & Z' Z \end{bmatrix}^{-1} \tag{B.2}$$

(B.2)에 (A.3)과 $YK_Y' = P_Y$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} K_{[Y, Z]} &= [K_Y - (I - P_Y)Z(Z' P \nabla Z)^{-1} Z' K_Y (I - P_Y) \\ &\quad Z(Z' P \nabla Z)^{-1}] \\ &= [K_Y \ 0] + P_Y^{\dagger} Z (Z' P \nabla Z)^{-1} [Z' K_Y' \ I] \end{aligned} \tag{B.3}$$

또한 순열행렬 중 $J_r = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$ 을 택하면

$$\begin{aligned} [Z, Y] &= [Y, Z] J_r' \text{이므로 (B.1)으로부터} \\ K_{[Y, Z]} &= K_{[Y, Z]} J_r' \\ &= [K_Y \ 0] J_r' + P_Y^{\dagger} Z (Z' P \nabla Z)^{-1} [-Z' K_Y \ I] J_r' \\ &= [0 \ K_Y] + P_Y^{\dagger} Z (Z' P \nabla Z)^{-1} [I, Z' K_Y] \end{aligned} \tag{B.4}$$

“본 논문은 1990년도 교육부 지원 학술진흥 재단의 지방대 육성 학술연구 조성비에 의하여 연구되었습니다.”