

# 케이블로 지지된 PC뼈대의 시간의존적 비선형 해석

## Time-Dependent Nonlinear Analysis of Cable-Supported Prestressed Concrete Frames

이재석\* · 강영진\*\*

Lee, Jae Seok · Kang, Young Jin

### Abstract

A study for the material and geometric nonlinear analysis of segmentally erected cable-supported prestressed concrete plane frames including the time-dependent effects due to load history, creep, shrinkage, aging of concrete, and relaxation of prestressing steel and cable is presented. Updated Lagrangian formulation is used to account for the nonlinear behavior of the structure. For the time-dependent analysis, the time domain is divided into a discrete number of intervals, and a step-forward integration is performed as the solution progresses in the time domain. At each time step, a nonlinear finite element analysis is performed in the space domain. Segmental erection methods are implemented by providing the capability to change the configuration of the structure at any time step of the solution. The computer program CFRAME is developed and a series of numerical examples are presented to study the validity of the program.

### 요 지

본 논문에서는 케이블로 지지된 프리스트레스트 콘크리트(PC) 뼈대의 시공중의 각 단계를 고려하고 콘크리트와 PC강재, 케이블 재료의 시간의존적 특성 및 재료의 비선형성과 케이블의 색 및 구조물의 처짐에 의한 기하학적 비선형성도 고려하는 해석방법을 제시했다. 구조물의 비선형거동을 해석하기 위한 운동방정식은 Updated Lagrangian 방식을 이용하여 유도하고 시간의존적인 거동을 해석하기 위해서 시간영역을 시간단계로 나누어 순차적으로 적분했다. 시공중의 각 단계를 표현하기 위해 계속적인 구조계의 변화를 고려했다. 본 논문에서 제시한 해석방법에 근거하여 컴퓨터 프로그램 CFRAME을 개발하고 예제들을 통하여 해석방법의 정당성을 보였다.

### 1. 서 언

프리스트레스트 콘크리트(PC) 구조물은 콘크리트,

보강철근 및 PC강재로 구성되는 복합구조물로서 이들 재료의 비선형 응력-변형도 관계는 물론 콘크리트의 크리프, 건조수축, 강도증가(Aging)와 PC강재의 이완 등 재료의 시간의존적 특성으로 인하여 하중재하시에 복잡한 거동을 나타낸다. 특히 PC사

\* 정회원 · KIST 시스템공학연구소 선임연구원  
\*\* 정회원 · 서울대학교 공과대학 토목공학과 교수

장교와 같이 케이블로 지지되며 순차적으로 시공되는 PC구조물의 경우는 시공중과 시공후의 구조계가 다를 뿐 아니라 시공중에도 구조계가 계속적으로 변화하고 케이블의 색(Sag) 및 구조물의 처짐에 따른 기하학적 비선형성으로 인하여 거동이 더욱 복잡해진다. 또한 PC교량의 경우 근래에 들어 경간이 길어지고 단면이 축소되는 추세에 따라 시공 중이나 시공후의 예기치 않은 파다하중에 대한 안전성의 확보를 위하여 정확한 구조해석 및 극한강도의 예측이 중요하게 되었다. 따라서 이들의 경제적이고 안전한 설계를 위해서는 시공중이나 시공후에 발생할 수 있는 모든 조건에 따른 처짐과 응력의 변화를 정확히 예측할 수 있어야 하므로 계속적인 구조계의 변화와 재료의 시간의존적 특성은 물론 재료의 비선형성 및 기하학적 비선형성까지 가능한 정확히 고려할 수 있는 해석방법이 필요하다.

프리스트레스트 콘크리트가 중요한 구조재로 다양한 구조물에 적용되면서부터 PC구조물의 복잡한 거동을 규명하기 위한 연구가 진행되어 왔으며 70년대 초부터 Berkeley 대학에서 다양한 PC구조물의 해석을 위한 컴퓨터 프로그램들이 개발되었다.<sup>(1)</sup> 구조계가 계속적으로 변하는 PC교량의 거동을 파악하기 위한 연구로는 60년대 중반부터 Leonhardt 등<sup>(2)</sup>에 의해서 단순한 모델에 근거를 둔 설계지침들이 발표되었고 70년대에 들어서 Guyon,<sup>(3)</sup> PTI<sup>(4)</sup>로부터 비교적 근사적인 모델에 근거한 해석방법들이 제시되기 시작했다. Texas Austin 대학의 Highway Research Center<sup>(5)</sup>에서는 PC세그먼트 교량의 거동에 대한 실험결과 및 해석기법에 대한 연구결과를 발표했고 TDV사<sup>(6)</sup>에서는 3차원 공간뼈대해석 프로그램 RM-spaceframe을 개발했으며 Europe Etudes사<sup>(7)</sup>에서는 PC교량의 평면해석 프로그램 BC를 개발했는데 이들은 시공중의 각 단계를 고려한 해석이 가능한 반면 선형해석모델을 사용하거나 또는 재료의 시간의존적 특성을 고려하지 않았다. Van Zyl<sup>(8)</sup>은 Single Cell Box 형상의 단면을 가진 곡선 PC세그먼트 교량의 해석방법 및 프로그램 SEGAN을 개발하였으나 재료는 선형탄성체로 가정했다. Khalil<sup>(9)</sup>은 PC뼈대의 시공단계를 고려한 해석방법을 제시했으며 케이블 및 부재의 기하학적 비선형거동을 고려하였으나 재료는 선형탄성체로 가정하였고 시공중의 PC강재와 케이블의 재진장에 대하여는 고

려하지 않았다. Ketchum<sup>(10)</sup>은 PC세그먼트 교량의 해석을 위한 모델 및 프로그램 SFRAME을 개발하여 PC세그먼트 교량에서의 모멘트의 재분배에 관하여 연구했으며 다양한 시공순서를 고려했으나 선형해석에 국한되었다. 강<sup>(11)</sup>은 시공중의 각 단계를 고려하고 재료의 비선형성 및 기하학적 비선형성을 고려하여 PC뼈대를 해석할 수 있는 프로그램 SPCFRAME을 개발하였으며 재료의 비선형성을 정확히 고려하기 위해 층분할 뼈대요소(Layered Frame Element)를 이용하였다. 김<sup>(12)</sup>은 시공중의 각 단계를 고려한 PC교량의 정적 및 동적 3차원 거동에 관한 해석이론을 제시하고 프로그램 D7을 개발했으며 재료는 선형탄성체로 가정했다. Bishara,<sup>(13)</sup> Herbert 등<sup>(14)</sup>도 PC세그먼트 교량의 해석방법을 제시했으며 재료의 시간의존적 특성은 고려했으나 재료의 비선형성 및 기하학적 비선형성과 케이블에 대하여는 고려하지 않았다.

이상의 연구들을 통하여 제시된 해석방법들을 고찰해 보면 중요한 해석기능으로서 시공중의 각 단계를 고려한 해석기능, 재료의 시간의존적 특성을 고려한 해석기능, 재료의 비선형성 및 기하학적 비선형성 해석기능, 케이블 해석기능 등을 들 수 있으며 현재까지의 연구들은 이러한 기능들의 일부 또는 상당부분을 포함하고 있으나 모든 기능들을 포함한 연구는 아직 발표되지 않았다. 따라서 본 논문에서는 케이블로 지지된 PC뼈대의 시공중의 각 단계를 고려하고 콘크리트와 PC강재, 케이블 재료의 시간의존적 특성 및 재료의 비선형성은 물론 케이블의 색 및 구조물의 처짐에 의한 기하학적 비선형성을 모두 고려하는 해석방법을 제시하고자 한다.

## 2. 재료의 시간의존적 비선형 모델

PC구조물의 시간의존적 비선형거동을 정확히 예측하기 위해서는 각 재료의 비선형 응력-변형도 관계는 물론 시간의존적 특성을 잘 나타낼 수 있는 재료모델을 고려해야 한다. 본 논문에서는 콘크리트의 경우 압축에서의 비선형 응력-변형도 관계와 인장균열 및 인장증강효과는 물론 크리프, 건조수축 및 시간의 경과에 따른 강도증가를 고려한다. 보강 철근은 재료의 비선형 응력-변형도 관계만을 고려하며 PC강재와 케이블은 재료의 비선형 응력-변형도



한편 콘크리트의 크리프는 재하시의 재령, 지속 응력의 크기, 배합설계, 주변환경 뿐 아니라 실제로 작용된 응력이력(Stress History)에 따라 좌우되므로 정확히 예측하기가 어렵다. 실제 구조물에 작용하는 응력은 일정하지 않고 시간에 따라 변화하므로 일정한 응력이 작용하는 경우를 가정하여 구한 크리프 변형곡선으로부터 실제의 응력이력에 의한 크리프 변형을 구하며 그 과정은 다음과 같다.

시간에 따른 응력  $\sigma(t)$ 가 일정하지 않을 때 관측 시점  $t$ 에서의 크리프에 의한 총변형도  $\epsilon^c(t)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.<sup>(10,11)</sup>

$$\epsilon^c(t) = \int_0^t J(t, \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (2)$$

여기서  $J(t, \tau)$ 는 재하시점이  $\tau$ 이고 관측시점이  $t$ 일 때의 특성크리프함수(Specific Creep Compliance Function)를 나타낸다.  $J(t, \tau)$ 는 시편의 재령  $\tau$ 일에 단위응력을 재하했을 때 재령  $t$ 일에서의 시편의 크리프변형으로 정의된다. 본 논문에서는 Ketchum<sup>(10)</sup>과 같은 형태의 Dirichlet 급수를 이용하여  $J(t, \tau)$ 를 간결한 형태의 근사식으로 나타낸다.

$$J(t, \tau) = \sum_{i=1}^m a_i(\tau) [1 - e^{-(y_i(t) - y_i(\tau))}] \quad (3)$$

위에서  $a_i(\tau)$ 는 재료변수로서 하중재하시점  $\tau$ 에 관계되어  $J(t, \tau)$ 의 초기형상에 관계되는 값이다.  $y_i(t) = t/\Gamma_i$ 로 정의되며  $\Gamma_i$ 는 지연시간(Retardation Time)으로 시간의 경과에 따른  $J(t, \tau)$ 의 형상과 관계된다. 식 (3)에서  $a_i(\tau)$  및  $\Gamma_i$ 는 실험결과나 실험식으로부터 최소자승법(Least Squares Curve Fitting)을 이용하여 구하며  $m$ 의 크기를 증가시킬수록 더 정확한 근사식을 얻을 수 있다. 식 (3)을 이용하면 식 (2)는 다음과 같이 된다.

$$\epsilon^c(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^m a_i(\tau) [1 - e^{-(y_i(t) - y_i(\tau))}] \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (4)$$

크리프변형은 식 (4)를 수치적분하여 구하며 이를 위하여 시간영역을 필요한 수로 분할하고 각 시간 구간내에서 응력 및 재료변수  $a_i(\tau)$ 에 대하여 적절한

가정을 해야 한다. 본 논문에서는 Ketchum<sup>(10)</sup>과 같이 각 시간구간내에서 (1) 응력과 재료변수가 일정한 경우, (2) 재료변수는 일정한 반면 응력은 선형적으로 변하는 경우, (3) 응력과 재료변수가 모두 선형적으로 변하는 경우의 세가지로 가정했으며 이 가정을 이용하면 임의의 시간단계  $t_{n-1}$ 에서  $t_n$ 사이의 시간구간에서 발생하는 크리프변형도의 증분을 시간단계  $t_{n-1}$ 과  $t_n$ 에서의 응력이력만을 가지고 구할 수 있다.<sup>(15)</sup> 또한 비선형크리프효과를 고려하기 위하여 실제의 크리프변형을 선형크리프법칙에 근거하여 구할 수 있도록 실제의 응력을 적당한 크기로 증가시킨 유효응력(Effective Stress)의 개념<sup>(11,15)</sup>을 사용한다.

## 2.2 보강철근

보강철근은 비선형 응력-변형도 관계만을 고려하여 재료모델을 가정하며 본 논문에서는 그림 2와 같은 이중직선(Bilinear) 모델<sup>(11,15)</sup>을 사용한다. 하중반전경로의 기울기는 초기탄성계수와 같은 것으로

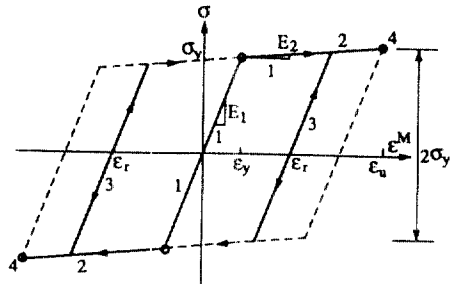


그림 2. Stress-strain curve and material state code numbers of reinforcing steel.

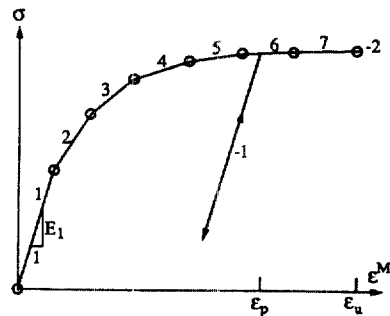


그림 3. Stress-strain curve and material state code numbers of prestressing steel & cable.

보고 응력-변형도 곡선상에서 재료상태를 (1) 인장 또는 압축상태, (2) 항복상태, (3) 하중반전상태, (4) 파괴상태의 4가지로 가정한다.

### 2.3 PC강재와 케이블

PC강재는 보강철근에 비해 인장강도가 훨씬 큰 반면에 응력-변형도 곡선상에서 항복점이 명확히 정의되지 않는 특징이 있다. 본 논문에서는 PC강재의 비선형 응력-변형도 관계를 이상화 하기 위하여 다중직선(Multi-linear)모델<sup>(11,15)</sup>을 사용한다. 그림 3에 다중직선모델이 나타나 있으며 재료상태는 응력-변형도 곡선의 각 직선구간별로 그림에서와 같이 정의한다. 각 재료상태에 따른 탄성계수는 해당직선의 기울기와 같다. 하중반전의 경우는 재료상태를 -1로 하여 탄성계수는 초기탄성계수로 가정하며, 역학적변형도가 극한변형도를 초과하면 파괴에 도달한 것으로 보고 재료상태는 -2로 한다. PC구조물에 있어서 PC강재의 인장력의 손실은 구조물의 거동에 중요한 요소로 작용한다. 본 논문에서는 PC강재를 콘크리트 뼈대요소의 양절점에 강체로 연결된 직선 트러스요소로 분할하여 이상화 하므로 콘크리트의 하중재하에 따른 탄성변형은 물론 크리프, 건조수축 및 온도변화에 의한 인장력의 손실은 각 해석단계마다 PC강재요소의 응력을 계산하는 과정에서 동시에 고려한다. 반면 마찰손실과 정착구의 활동에 의한 손실 및 PC강재의 이완에 의한 손실은 별도로 고려하며 본 논문에서는 Ketchum,<sup>(10)</sup> 강<sup>(11)</sup>의 방법을 이용하여 계산한다.

케이블의 응력-변형도 관계는 PC강재와 유사하므로 본 논문에서는 케이블의 비선형 응력-변형도 관계를 PC강재와 같은 다중직선모델을 사용하여 고려한다. 인장력의 손실은 케이블을 상판 및 주탑에 정착할 때 발생하는 정착구활동에 의한 손실 및 케이블의 이완에 의한 손실을 고려하며 PC강재의 경우와 마찬가지로 과정을 통하여 계산한다.<sup>(15)</sup>

### 3. 시간의존적 비선형해석 이론

케이블로 지지된 PC때대의 시간의존적 비선형거동을 해석하기 위해서는 재료의 비선형성 뿐만 아니라 기하학적 비선형성은 물론 재료의 시간의존적 특성까지 모두 고려할 수 있는 해석이론이 필요하다.

여기서는 먼저 일반적인 3차원 연속체에 대하여 재료의 비선형성 및 기하학적 비선형성과 재료의 비역학적변형을 고려하는 운동방정식을 Updated Lagrangian방식<sup>(16)</sup>을 이용하여 유도하고 운동방정식으로부터 선형화된 증분방정식을 유도한 후 유한요소법을 적용하는 과정과 PC때대의 시간의존적 특성을 고려한 비선형 해석과정에 대하여 기술한다.

#### 3.1 초기변형을 고려한 증분방정식 유도

직교좌표계에서 연속체의 운동을 고려할 때 시간  $t + \Delta t$ 에서의 평형을 가상일의 원리를 이용해서 나타내면 식 (5)와 같다.

$$\int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t} \tau_{ij} \cdot \delta_{t+\Delta t} e_{ij} {}^{t+\Delta t} dV = {}^{t+\Delta t} K \quad (5)$$

여기서  ${}^{t+\Delta t} \tau_{ij}$ 는 Cauchy 응력텐서,  ${}_{t+\Delta t} e_{ij}$ 는 미소변형도(Infinitesimal Strain)텐서,  ${}_{t+\Delta t} K$ 은  $t + \Delta t$ 에서의 외부가상일이다. 여기서 연속체의 변위 및 좌표에 대한 규약은 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} {}^t x_i &= {}^0 x_i + {}^t u_i, & {}^{t+\Delta t} x_i &= {}^0 x_i + {}^{t+\Delta t} u_i, \\ u_i &= {}^{t+\Delta t} u_i - {}^t u_i, & i &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (6)$$

침자에 대한 규약으로는 좌상단의 침자는 그 변수가 발생하는 시간을 나타내고 좌하단의 침자는 그 변수의 측정기준이 되는 형상의 시간을 나타내며 변수가 발생하는 형상과 측정기준이 되는 형상이 동일한 경우에는 좌하단의 침자를 생략한다. 또한 변수에 사용되는 중복침자에는 덧셈규약을 적용하고 콤마는 해당좌표에 대한 미분을 표시하며 이때 좌하단의 침자는 해당좌표가 측정된 형상의 시간을 의미한다.

Updated Lagrangian 방식에서는 모든 변수를 이전에 계산하여 알고 있는 시간  $t$ 에서의 형상을 기준으로 표시하여 식 (5)를 풀며 이때 Cauchy 응력 및 미소변형도 대신에 Kirchhoff 응력(2nd Piola-Kirchhoff Stress)  ${}^{t+\Delta t} S_{ij}$  및 Green 변형도(Green-Lagrange Strain)  ${}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}$ 를 이용하여  $t + \Delta t$ 에서의 운동방정식을 나타낸다.

$$\int_V {}^{t+\Delta t} S_{ij} \cdot \delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} dV = {}^{t+\Delta t} K \quad (7)$$

시간구간내에 온도변화에 의한 변형 및 크리프, 건조수축 등 비역학적변형이 존재할 경우에는 이것

을 초기변형(Initial Strain)으로 간주하여 증분방정식을 유도할 수 있다. 초기변형을 고려하여 시간  $t + \Delta t$ 에서의 응력 및 변형도를 시간  $t$ 에서의 응력 및 변형도와 시간  $t$ 와  $t + \Delta t$  사이의 증분의 합으로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}S_{ij} &= {}^t\tau_{ij} + {}^tS_{ij}, \quad {}^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij} = {}^t\varepsilon_{ij}, \quad {}^t\varepsilon_{ij} = {}^t\varepsilon_{ij}^M + {}^t\varepsilon_{ij}^{NM} = \\ &({}^t\varepsilon_{ij} + {}^t\eta_{ij}) + {}^t\varepsilon_{ij}^{NM}, \quad {}^t\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}({}^tu_{ij} + {}^tu_{ji}), \\ {}^t\eta_{ij} &= \frac{1}{2}{}^tu_{k,i} \cdot {}^tu_{k,j} \end{aligned} \quad (8)$$

여기서  ${}^t\varepsilon_{ij}^M$ 는 역학적변형의 증분으로 변수이고  ${}^t\varepsilon_{ij}^{NM}$ 은 비역학적변형의 증분으로 변위증분을 구하기 이전에 미리 계산된다. Kirchhoff 응력증분  ${}^tS_{ij}$  및 Green 변형도증분  ${}^t\varepsilon_{ij}^M$ 와의 관계를 나타내는 접선탄성계수(Incremental Material Moduli)텐서  ${}^tC_{ijrs}$ 를 이용하면 식 (7), (8)로부터 초기변형을 고려한 증분방정식은 식 (9)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} \int_{IV} {}^tC_{ijrs} ({}^t\varepsilon_{rs} - {}^t\varepsilon_{rs}^{NM}) \cdot \delta {}^t\varepsilon_{ij} dV + \int_{IV} {}^t\tau_{ij} \delta {}^t\eta_{ij} dV \\ = {}^{t+\Delta t}K - \int_{IV} {}^t\tau_{ij} \delta {}^t\varepsilon_{ij} dV \end{aligned} \quad (9)$$

증분방정식 (9)를 선형화하기 위하여 좌변 첫항에서  ${}^t\varepsilon_{rs}$  및  $\delta {}^t\varepsilon_{ij}$ 의 고차항은 미소량끼리의 곱이므로 무시하고 선형항만을 고려하며 외부가상일로서 체력(Body Force) 및 면력(Surface Force)만을 고려하면 식 (10)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \int_{IV} {}^tC_{ijrs} {}^t\varepsilon_{rs} \delta {}^t\varepsilon_{ij} dV + \int_{IV} {}^t\tau_{ij} \delta {}^t\eta_{ij} dV \\ = \int_{IV} {}^{t+\Delta t}f_i^B \delta u_i^t dV + \int_{IS} {}^{t+\Delta t}f_i^S \delta u_i^s dS \\ + \int_{IV} {}^tC_{ijrs} {}^t\varepsilon_{rs}^{NM} \cdot \delta {}^t\varepsilon_{ij} dV - \int_{IV} {}^t\tau_{ij} \delta {}^t\varepsilon_{ij} dV \end{aligned} \quad (10)$$

### 3.2 유한요소법의 적용

요소내에서의 변위  $u_i$ 를 형상함수  $h$ 를 이용하여 요소의 절점변위로 표시하면,

$$u_i = h^n \cdot u_i^n \quad (n=1, 2, 3, \dots, N; N = \text{절점수}) \quad (11)$$

여기서  $n$ 은 요소에 연결된 절점을 나타내고  $u_i^n$ 은  $n$ 번째 절점의  $i$ 방향 변위성분을 나타낸다. Green 변형도 텐서를 절점변위로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} {}^t\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}({}^tu_{ij} + {}^tu_{ji} + {}^tu_{k,i} \cdot {}^tu_{k,j}) \\ &= \frac{1}{2}({}^th_{,j}^n u_i^n + {}^th_{,i}^n u_j^n + {}^th_{,l}^n u_k^n \cdot {}^th_{,m}^n u_l^m) \end{aligned} \quad (12)$$

식 (8), (11), (12)를 이용하면 식 (10)으로부터 절점 변위의 항으로 표시된 증분방정식을 얻게 된다. Cauchy 응력텐서  ${}^t\tau_{ij}$ 가 대칭이고 또한  ${}^tC_{ijrs}$ 도  $r, s$ 에 대해 대칭이므로 식을 단순화하여 정리하고  $\delta u_i^n$ 이 임의의 가상변위임을 고려하면 다음과 같이 간단히 된다. 단  $\delta_{ik}, \delta_{ji}$ 는 Kronecker Delta이고  $n, m=1, 2, \dots, N$ 이며  $i, j, k, l, r, s=1, 2, 3$ 이다.

$$\begin{aligned} \int_{IV} {}^tC_{irrk} {}^th_{,j}^n {}^th_{,l}^m u_k^n \delta u_l^m dV + \int_{IV} {}^t\tau_{ij} {}^th_{,j}^n {}^th_{,i}^m \delta_{ik} u_k^n \delta u_l^m dV \\ = \int_{IV} {}^{t+\Delta t}f_i^B h_i^m \delta u_l^m dV + \int_{IS} {}^{t+\Delta t}f_i^S h_i^m \delta u_l^m dS \\ + \int_{IV} {}^tC_{ijrs} {}^t\varepsilon_{rs}^{NM} {}^th_{,l}^n \delta_{ij} \delta u_l^m dV - \int_{IV} {}^t\tau_{ij} {}^th_{,i}^n \delta u_l^m dV \end{aligned} \quad (13)$$

식 (13)을 매트릭스 형태로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} ({}^tK_L + {}^tK_{NL}) \cdot \mathbf{u} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} + \mathbf{R}^{NM} - \mathbf{F} \\ {}^tK_L = \int_{IV} \mathbf{B}_L^T {}^tC \mathbf{B}_L dV \\ {}^tK_{NL} = \int_{IV} \mathbf{B}_{NL}^T {}^t\tau \mathbf{B}_{NL} dV \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} = \int_{IV} \mathbf{H}^T {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}^B dV + \int_{IS} \mathbf{H}^{sT} {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}^S dS \\ \mathbf{R}^{NM} = \int_{IV} \mathbf{B}_L^T {}^tC \varepsilon^{NM} dV \\ \mathbf{F} = \int_{IV} \mathbf{B}_L^T {}^t\tau dV \end{aligned} \quad (14)$$

여기서  $\mathbf{u}$ 는 변위증분 벡터를 나타낸다.  $\mathbf{H}, \mathbf{H}^S$ 는 형상함수 매트릭스,  $\mathbf{B}_L$ 은 선형변형도-변위 매트릭스,  $\mathbf{B}_{NL}$ 은 비선형 변형도-변위매트릭스,  ${}^tC$ 는 시간  $t$ 에서의 접선탄성계수 매트릭스이며  ${}^t\tau$ 는 Cauchy 응력 매트릭스이다. 또한  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}$ 은 체력 및 면력에 의한 등가절점하중 벡터,  $\mathbf{R}^{NM}$ 은 비역학적 변형의 증분에 의한 등가절점하중 벡터,  $\mathbf{F}$ 은 요소내부의 응력에 의한 등가절점하중 벡터를 나타낸다.  ${}^tK_L$ 은 변형도 증분의 선형항에 의한 강도매트릭스로서 재료강도 매트릭스라고도 하며  ${}^tK_{NL}$ 은 변형도증분의 비선형 항에 의한 기하강도매트릭스(Geometric Stiffness Matrix)이다.

### 3.3 시간의존적 비선형 해석과정

시간의존적 해석을 위해서는 먼저 시간영역을 필요한 수의 시간구간으로 나누고 각 시간구간의 교점을 시간단계(Time Step)로 정의한다. 즉 시간영역을  $N$ 개의 구간으로 나누면  $t_n(n=1, 2, \dots, N)$ 과 같은  $N$ 개의 시간단계가 정의되며 여기서 각 시간단계별로 순차적으로 증분형태로 표시된 평형방정식의 해를 구하여 누적시켜 나가면 최종시간단계에서의 해를 구할 수 있다. 임의의 시간단계  $t_{n-1}$ 에서 구조물의 응력, 변형도 및 변위를 알고 있을 때 시간단계  $t_n$ 에서의 해를 구하는 과정에 대하여 요약한다.

1) 시간단계  $t_{n-1}$ 과  $t_n$  사이에서 발생하는 비역학적변형도의 증분  $\Delta \epsilon^{NM}$ 을 구한다.  $\Delta \epsilon^{NM}$ 에는 콘크리트의 크리프, 건조수축, 온도변화에 의한 변형도와 PC강재 및 케이블의 온도변화에 의한 변형도가 포함된다.

2)  $\Delta \epsilon^{NM}$ 에 의한 등가절점하중의 증분  $\Delta R^{NM}$ 를 구한다.

3) 시간단계  $t_n$ 에서의 외부절점하중의 증분  $\Delta R_n^U$ 와 시간단계  $t_{n-1}$ 에서의 불평형하중  $R_{n-1}^U$  및  $\Delta R^{NM}$ 을 더하여 총절점하중의 증분  $\Delta R_n$ 을 구한 후  $\Delta R_n$ 을 적당한 수의 하중단계(Load Step)로 나누고 각 하중단계에 대하여 평형방정식을 풀며 불평형하중이 주어진 수렴조건을 만족할 때까지 반복계산을 한다. 반복계산의 과정은 다음과 같다.

4) 현재의 형상 및 재료성질을 기준으로 각 요소의 접선강도를 구하여 전체구조물의 접선강도매트릭스  $K_T$ 를 구한다.

5) 주어진 하중단계의 절점하중의 증분을  $\Delta R$ 이라 하면  $\Delta R$ 에 대하여 평형방정식을 풀어서 절점변위의 증분  $\Delta r$ 을 계산한다.

6)  $\Delta r$ 로부터 각 요소의 변형도의 증분  $\Delta \epsilon$ 을 계산하고 직전의 계산에서 구한 총변형도에 더하여 현재의 총변형도  $\epsilon$ 을 구한다.

7)  $\Delta r$ 을 직전의 계산에서 구한 총절점변위에 더하여 현재의 총절점변위  $r$ 을 구하고  $r$ 을 기준으로 각 요소의 형상을 새로 정의한다.

8)  $\epsilon$ 에서 총비역학적변형도  $\epsilon^{NM}$ 을 빼서 총역학적변형도  $\epsilon^M$ 을 계산한 후 현재의 시간단계  $t_n$ 에서 정의되는 비선형 응력-변형도 관계에서 하중반전을

고려하여 각 요소의 응력  $\sigma$ 를 구한다. 케이블 및 PC강재의 경우는 이완을 고려하여 응력을 구한다.

9) 각 요소의 응력에 의한 등가절점하중을 계산하며 전체구조물의 내부지지하중(Internal Resisting Load)  $F$ 를 계산한다.

10) 현재의 총절점하중  $R^U$ 에서  $F$ 를 빼서 불평형하중  $R^U$ 를 계산한다.

11)  $R^U$ 를  $\Delta R$ 로 하여 단계 4)부터 다시 계산한다.  $R^U$ 가 주어진 수렴조건을 만족할 때까지 4)~11)의 단계를 반복해서 수행하며  $R^U$ 가 주어진 수렴조건을 만족하면  $R^U$ 를 다음 하중단계의  $\Delta R$ 에 더하여 4)~11)의 반복계산단계를 수행한다. 마지막 하중단계에 대한 반복계산이 끝나면 다음 시간단계  $t_{n+1}$ 에 대한 계산을 시작한다.

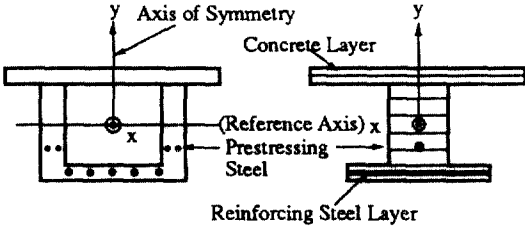
각 해석단계에서는 하중증분을 적당한 수의 하중단계로 나누고 각 하중단계마다 반복계산을 통하여 비선형 평형방정식을 풀어야 한다. 본 논문에서는 접선강도법을 기본으로 하되 수정된 접선강도법의 개념을 이용하여 선택에 따라 반복계산마다 강도매트릭스를 새로 구할 것인지 현재의 강도매트릭스를 그대로 사용할 것인지를 결정하도록 한다. 극한해석의 경우에는 구조물이 파괴에 가까워지면 하중-변위곡선의 기울기가 0에 근접하는 경우가 있으며 이때는 해가 불안정해져서 정해를 구하기가 어려워진다. 이 경우에는 하중제어법 대신에 변위제어법이 효과적이며 본 논문에서는 Powell<sup>(20)</sup>이 제시한 변위 제어법을 사용하여 해를 구했다.

## 4. 유한요소 모델

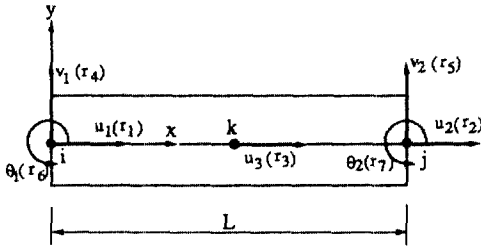
본 논문에서는 유한요소로서 뼈대요소, PC강재요소, 케이블요소, 연결요소(Link Element) 및 이동보요소(Traveller Element)를 고려하였다. 뼈대요소와 PC강재요소는 PC부재를, 케이블요소는 지지케이블(Stay Cable)을, 연결요소는 PC부재간의 다양한 연결형태를 이상화 하기 위한 요소이며 이동보요소는 이동식작업차 등 가설장비를 이상화 하기 위한 요소이다.

### 4.1 뼈대요소

뼈대요소는 축대칭인 단면을 가지고 길이방향으로



(a-1) Actual Cross Section (a-2) Idealized Cross Section  
(a) Cross-section Idealization of Frame Element



(b) Three-node Frame Element

그림 4. Layered frame element.

단면의 변화가 없는 것으로 하며 요소는 3절점직선요소로 가정한다.<sup>(11,15)</sup> 각 요소는 그림 4.a와 같이 여러개의 콘크리트층과 보강철근층으로 구성된 것으로 보며 PC강재는 별도로 직선트러스요소로 가정하여 뼈대요소의 양절점에 강체에 의해 연결된 것으로 본다. 양단의 절점은 그림 4.b와 같이 x 방향변위, y 방향변위 및 회전변위의 3개의 자유도를 가지고 중앙절점은 x 방향변위의 1개의 자유도만을 가진다. 중앙절점의 자유도는 요소강도 매트릭스를 형성하는 과정에서 응축(Condensation)한다. 일반적인 뼈대요소의 경우 주가 되는 변형도는 x축 방향 변형도이므로 여기서는 y축 방향변형도 및 전단변형도는 무시하기로 한다.<sup>(11,15)</sup> 또한 변형전에 평면이 있던 단면은 변형 후에도 평면을 유지하는 것으로 가정하며 콘크리트와 보강철근은 완전하게 부착되어 있는 것으로 가정하여 요소내의 변위가 연속성을 유지하도록 한다.

강도매트릭스는 변형도-변위매트릭스  $\mathbf{B}_L$  및  $\mathbf{B}_{NL}$ 을 구하면 식 (14)를 이용하여 계산할 수 있다. 먼저 뼈대요소의 변위성분을 요소좌표계에서 그림 4.b와 같이 정의하고 각 절점에서의 변위성분들을 다음과 같이 벡터로 표시한다. 여기서는 편의상 시간 t를

나타내는 첨자는 생략하며 상단의  $\text{Curl}(\sim)$ 은 요소 좌표계를 의미한다.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}} &= \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\theta} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{r}} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{v}} \\ \tilde{\theta} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

요소의 길이를 L이라 하고  $p = x/L$ 로 정의하면 x축 상의 임의점의 x 방향변위  $u_x(x)$  및 y 방향변위  $v(x)$ 는 다음과 같이 2차식과 3차식의 형상함수(Shape Function)를 이용하여 절점변위의 항으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \phi \cdot \tilde{\mathbf{u}}, \quad \phi = \{(2p^2 - 3p + 1), (2p^2 - p), 4p(1 - p)\} \\ v(x) &= \phi \cdot \left\{ \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{v}} \\ \tilde{\theta} \end{Bmatrix} \right\}, \quad \phi = \{(1 - 3p^2 + 2p^3), \\ &\quad (3p^2 - 2p^3), L(p - 2p^2 + p^3), L(-p^2 + p^3)\} \end{aligned} \quad (16)$$

$u(x, y)$ 를 요소의 임의점에서의 x축 방향변위라 하면 다음과 같이 절점변위의 항으로 표시된다.

$$u(x, y) = u_0(x) - y \frac{dv(x)}{dx} = \phi \cdot \tilde{\mathbf{u}} - y \cdot \phi_{xx} \left\{ \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{v}} \\ \tilde{\theta} \end{Bmatrix} \right\} \quad (17)$$

x축 방향의 Green 변형도  $\tilde{\epsilon}_{11}(x, y)$ 에 있어서  $(u_{,x})^2$ 은  $u_{,x}$  및  $(V_{,xx})^2$ 에 대하여 작으므로 무시하면 아래와 같이 된다.<sup>(11,15)</sup>

$$\tilde{\epsilon}_{11}(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv(x)}{dx} \right)^2 \quad (18)$$

따라서  $\tilde{\epsilon}_{11}$ 을 변형도-변위매트릭스를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{11} &= \tilde{\mathbf{B}}_L \cdot \tilde{\mathbf{r}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{r}}^T \cdot \tilde{\mathbf{B}}_{NL} \cdot \tilde{\mathbf{B}}_{NL} \cdot \tilde{\mathbf{r}} \\ \tilde{\mathbf{B}}_L &= \{\phi_{,x} - y\phi_{,xxx}\}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_{NL} = \{\mathbf{0}, \phi_{,xxx}\} \end{aligned} \quad (19)$$

먼저 재료강도매트릭스  $\tilde{\mathbf{K}}_L$ 를 구하기 위해  $\tilde{\mathbf{B}}_L$ 을 축 방향변형에 관한 부분  $\mathbf{B}_a$  및 휨변형에 관한 부분  $\mathbf{B}_b$ 로 나누어 고려한다.

$$\tilde{\mathbf{B}}_L = \{\phi_{,x} - y\phi_{,xxx}\} = \{\mathbf{B}_a, -y\mathbf{B}_b\} \quad (20)$$

식(14)로부터  $\mathbf{C}$  대신 일축응력-변형도 관계에서의 접선탄성계수  $E_T$ 를 쓰면



$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_L &= \int_V \bar{\mathbf{B}}_L^T \mathbf{E}_T \mathbf{B}_L dV \\ &= \int_V \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2^T \mathbf{E}_T \mathbf{B}_a & -y \mathbf{B}_3^T \mathbf{E}_T \mathbf{B}_b \\ -y \mathbf{B}_6^T \mathbf{E}_T \mathbf{B}_a & y^2 \mathbf{B}_6^T \mathbf{E}_T \mathbf{B}_b \end{bmatrix} dV = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{aa} & \bar{\mathbf{K}}_{ab} \\ \bar{\mathbf{K}}_{ba} & \bar{\mathbf{K}}_{bb} \end{bmatrix} \quad (21) \end{aligned}$$

위에서  $\mathbf{B}_a$ 는 상수로만 정의된 매트릭스이고  $\mathbf{B}_b$ 는  $x$ 에 관한 함수이며  $\mathbf{E}_T$ 는  $x, y$ 에 관한 함수이다. 왜냐하면  $\mathbf{E}_T$ 는 길이방향 뿐만 아니라 두께방향으로도 현재의 응력상태에 따라 변하기 때문이며  $\mathbf{E}_T$ 에 의해서 재료의 비선형성을 고려하게 된다. 요소길이의 중간점에서의  $\mathbf{E}_T$  값을 전체요소의 평균치로 가정하여 수치적분을 간단히 하면 식 (21)의 요소의 체적에 대한 적분은 다음과 같이 요소의 단면적에 대한 적분 및 길이에 대한 적분의 곱으로 된다.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_{aa} &= \int_V \mathbf{B}_a^T \mathbf{E}_T \mathbf{B}_a dV = \int_V \mathbf{E}_T dA \cdot \int_0^L \mathbf{B}_a^T \mathbf{B}_a dx \\ \bar{\mathbf{K}}_{ab} &= \bar{\mathbf{K}}_{ba}^T = \int_V -y \mathbf{B}_3^T \mathbf{E}_T \mathbf{B}_b dV = - \int_V \mathbf{E}_T y dA \cdot \int_0^L \mathbf{B}_3^T \mathbf{B}_b dx \\ \bar{\mathbf{K}}_{bb} &= \int_V y^2 \mathbf{B}_6^T \mathbf{E}_T \mathbf{B}_b dV = \int_V \mathbf{E}_T y^2 dA \cdot \int_0^L \mathbf{B}_6^T \mathbf{B}_b dx \quad (22) \end{aligned}$$

위의 수치적분 중에서 면적에 대한 적분은 요소길이의 중간점에서 다음과 같이 층적분(Layer Integral)을 하여 구한다.

$$\begin{aligned} EA &= \int_A \mathbf{E}_T dA = \sum_{i=1}^{n_c} E_{Ci} A_{Ci} + \sum_{i=1}^{n_s} E_{Si} A_{Si} \\ ES &= - \int_A \mathbf{E}_T y dA = - \sum_{i=1}^{n_c} E_{Ci} y_{Ci} A_{Ci} + \sum_{i=1}^{n_s} E_{Si} y_{Si} A_{Si} \\ EI &= - \int_A \mathbf{E}_T y^2 dA = - \sum_{i=1}^{n_c} E_{Ci} y_{Ci}^2 A_{Ci} + \sum_{i=1}^{n_s} E_{Si} y_{Si}^2 A_{Si} \quad (23) \end{aligned}$$

위에서  $n_c$  및  $n_s$ 는 콘크리트층 및 보강철근층 수를 나타내며 하단의 첨자  $c$  및  $s$ 는 콘크리트와 보강철근을 나타낸다. 두번째로 길이에 대한 적분은 형상 함수를 직접 적분하여 구하며 이들로부터  $\bar{\mathbf{K}}_L$ 를 구할 수 있고  $\bar{\mathbf{K}}_L$ 에서 중앙절점의 수평변위  $u_3$ 에 관한 항을 응축하면 양단의 절점변위에 관한 항으로만 표시된 재료강도매트릭스  $\bar{\mathbf{K}}_L'$ 를 구할 수 있다.

기하강도매트릭스  $\bar{\mathbf{K}}_{NL}'$ 도 마찬가지로 요소길이의 중간점에서 계산하며 요소의 접선강도매트릭스  $\bar{\mathbf{K}}_T$ 는  $\bar{\mathbf{K}}_L'$ 과  $\bar{\mathbf{K}}_{NL}'$ 를 합하여 구한다. 요소좌표계를 기준

으로 구한 접선강도매트릭스는 변환매트릭스를 이용하여 전체좌표계에 대한 접선강도매트릭스  $\mathbf{K}_T$ 로 변환한다.

내부지지하중  $\bar{\mathbf{F}}$  및 비역학적변형의 증분에 의한 등가절점하중의 증분  $\bar{\mathbf{R}}^{NM}$ 은 가능한 정확히 계산하기 위하여 3점 Gauss 적분법과 층적분을 이용하여 계산한다.  $\mathbf{F}$ 와  $\bar{\mathbf{R}}^{NM}$ 의 각 항들은  $x$ 만의 함수인  $f(x)$ 와  $x$ 와  $y$ 의 함수인  $g(x, y)$ 의 곱으로 나타낼 수 있으므로 다음의 예와 같이 적분이 가능하다.<sup>(15)</sup>

$$\begin{aligned} \int_0^L f(x)g(x,y)dAdx &= \frac{L}{2} \int_0^1 f(p) \int_A g(p,y)dAdp \\ &= \frac{L}{2} \sum_{k=1}^3 w_k f(p_k) h(p_k) \\ h(p_k) &= \int_A g(p_k, y)dA \quad (24) \end{aligned}$$

위에서 Gauss 적분점은  $p_1=0.5, p_2=0.1127066537, p_3=0.88729833462$ 이고 가중치는  $w_1=8/9, w_2=w_3=5/9$ 이다.

## 4.2 PC강재요소

PC강재 요소는 그림 5와 같이 뼈대요소의 양절점에 강체에 의해 연결된 직선트러스요소로 가정한다. 각 PC강재요소는 일정한 인장력을 가진 것으로 하고 그림 6과 같이 뼈대요소의 양절점으로부터의 편심거리  $e_i, e_j$ 로 정의한다. 또한 콘크리트와 PC강

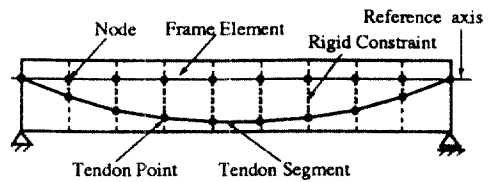


그림 5. Prestressing steel idealization.

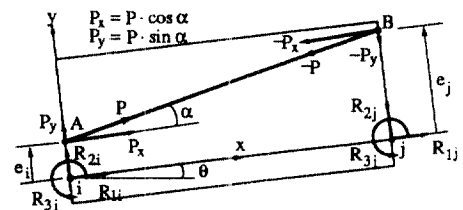


그림 6. Equivalent joint load vector due to prestress at transfer.

재는 완전하게 부착된 것으로 가정한다. 반면에 PC강재를 긴장하는 과정을 해석할 때는 프리텐션 방식의 경우는 PC강재에 의한 인장력 및 PC강재의 강도를 모두 고려하지만 포스트텐션방식의 경우는 PC강재에 의한 인장력만을 고려한다. PC강재의 인장력이 도입된 후의 해석에서는 긴장방식에 관계없이 PC강재의 강도를 모두 고려한다. PC강재요소의 강도매트릭스는 PC강재요소를 트러스요소로 가정하여 쉽게 구할 수 있다.

프리스트레싱에 의한 등가하중은 뼈대요소 양단의 절점  $i, j$ 에서 PC강재요소의 양단의 절점과의 평형 조건을 고려하여 구하며 절점  $i, j$ 에서의 프리스트레싱에 의한 등가절점하중 벡터  $\tilde{\mathbf{R}}_i, \tilde{\mathbf{R}}_j$ 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_i &= \{R_{1i}, R_{2i}, R_{3i}\}^T = \{P_x, P_y, -P_x e_i\}^T \\ \tilde{\mathbf{R}}_j &= \{R_{1j}, R_{2j}, R_{3j}\}^T = \{-P_x, -P_y, P_x e_j\}^T \end{aligned} \quad (25)$$

### 4.3 케이블요소

케이블은 일반적으로 휨, 비틀, 압축에 대한 저항능력이 없고 인장력에만 저항할 수 있는 부재를 의미한다. 본 논문에서는 케이블의 기하학적인 비선형거동 뿐 아니라 케이블재료의 비선형 응력-변형도 관계와 이완에 의한 시간의존적인 거동까지 고려할 수 있는 곡선케이블요소를 고려한다. 케이블요소는 단면의 연직방향으로만 응력을 전달할 수 있으며 연직방향응력은 단면에 걸쳐 균등하고 변형중에 단면의 형상은 일정하다고 가정한다. 반면에 변위는 충분히 큰 경우까지 고려할 수 있도록 한다. 그림 7과 같이 요소의 절점은 2개에서 4개까지 가능하도록 하며 형상함수  $h$ 로는 정규좌표계(Natural Coordinate)에서의 1차원 요소에 대한 형상함수<sup>(19)</sup>를 이용한다.

곡부요소의 축방향 변형을  $\text{Curl}(\cdot)$ 로 표시하면 축방향 변형  $\tilde{\epsilon}_{11}$ 은 다음과 같다.

$$\tilde{\epsilon}_{11} = \tilde{\epsilon}_{11} + \tilde{\eta}_{11} = \frac{dx_i}{ds} \cdot \frac{du_i}{ds} + \frac{1}{2} \frac{du_i}{ds} \cdot \frac{du_j}{ds} \quad (26)$$

여기서  $s(r)$ 은 시간  $t$ 에서  $x_1(r), x_2(r)$ 의 좌표로 표시되는 점에서의 곡선의 길이를 의미한다.  $\tilde{\epsilon}_{11}$  및  $\tilde{\eta}_{11}$ 을 절점변위의 증분을 이용하여 나타내면 다음과 같이 표시된다.

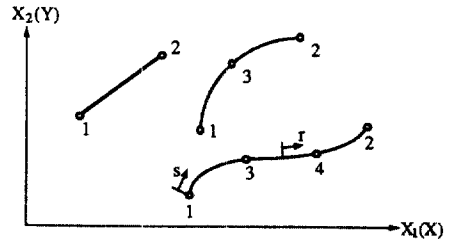


그림 7. Two-to four-node cable element.

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{11} &= \mathbf{J}^{-1} \cdot \frac{dh^n}{dr} \cdot \mathbf{x}_i^T \cdot \mathbf{J}^{-1} \cdot \frac{dh^m}{dr} \cdot \mathbf{u}_i^m, \\ \tilde{\eta}_{11} &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{J}^{-1} \cdot \frac{dh^n}{dr} \cdot \mathbf{u}_i^T \cdot \mathbf{J}^{-1} \cdot \frac{dh^m}{dr} \cdot \mathbf{u}_i^m \right) \end{aligned} \quad (27)$$

여기서  $\mathbf{J}$ 는 정규좌표계와 요소좌표계간의 Jacobian이다. 절점변위벡터  $\mathbf{u}^T$  및 형상함수 매트릭스  $\mathbf{H}$ 를 이용하여  $\tilde{\epsilon}_{11}, 2 \cdot \tilde{\eta}_{11}$ 을 나타내면 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{11} &= \frac{1}{\mathbf{J}^2} \mathbf{x}^T \mathbf{H}_r^T \cdot \mathbf{H}_r \mathbf{u}, \\ 2 \cdot \tilde{\eta}_{11} &= [\mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{H}_r \mathbf{u}]^T \cdot [\mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{H}_r \mathbf{u}] \\ \mathbf{B}_L &= \frac{1}{\mathbf{J}^2} \mathbf{x}^T \mathbf{H}_r^T \cdot \mathbf{H}_r, \quad \mathbf{B}_{NL} = \frac{1}{\mathbf{J}} \mathbf{H}_r \\ \mathbf{x}^T &= \{x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_N \quad x_2\} \\ \mathbf{u}^T &= \{u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_1^N \quad u_2^N\} \\ \mathbf{H} &= [h^1 \mathbf{I}_2 \quad \dots \quad h^N \mathbf{I}_2], \quad \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

요소의 단면적이 일정하고 단면에서의 응력이 균등하므로 강도매트릭스는 다음과 같이 선적분으로 변환한 후 Gauss식을 이용하여 수치적분을 한다. 먼저  $\mathbf{K}_L$  및  $\mathbf{K}_{NL}$ 을 구하면,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_L &= \int_{-1}^1 \mathbf{B}_L^T E_T \mathbf{B}_L A \frac{ds}{dr} dr, \\ \mathbf{K}_{NL} &= \int_{-1}^1 \mathbf{B}_{NL}^T \tau \mathbf{B}_{NL} \cdot A \cdot \mathbf{J} dr, \quad A = \text{단면적} \end{aligned} \quad (29)$$

마찬가지로  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}, {}^t \mathbf{R}^{NM}$  및  $\mathbf{F}$ 를 구할 수 있다.

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R} = \int_{-1}^1 \mathbf{H}^T {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dr + \int_{-1}^1 \mathbf{H}^T {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{J} dr,$$

$\mathbf{P}$  = 주변장(Perimeter)

$${}^t\mathbf{R}^{NM} = \int_{-1}^1 \mathbf{B}_L^T E_T \bar{\epsilon}_{11}^{NM} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dr$$

$${}^t\mathbf{F} = \int_{-1}^1 \mathbf{B}_L^T \bar{\tau}_{11} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dr \quad (30)$$

#### 4.4 연결요소와 이동보요소

뼈대요소간의 다양한 연결상태를 이상화 하기 위한 방안으로 연결요소를 고려한다. 연결요소는 뼈대요소와는 달리 재료는 선형탄성체로 가정하고 축방향강도 및 휨강도를 0에서 무한대까지 변화할 수 있도록 하여 뼈대요소간의 연결을 힌지(Hinge)연결, 또는 강체연결로 이상화할 수 있음은 물론 연결이 분리되는 경우까지 고려할 수 있도록 한다. 이동보 요소는 여러개의 보요소로 구성되며 임의의 위치로 이동할 수 있도록 하고 각 보요소는 선형탄성체로 가정한다.<sup>(15)</sup>

### 5. 시공단계를 고려한 해석

시공중의 각 단계를 고려하여 해석하기 위해서는 구조물의 실제 시공중에 발생하는 여러 공정중에서 구조적으로 의미가 있는 공정을 가능한 정확히 해석적으로 구현하여 그 공정이 구조물의 거동에 미치는 영향을 파악할 수 있어야 한다. 더불어 시공중에도 시간의 경과에 따라 발생하는 콘크리트의 크리프, 건조수축, 강도의 증가와 케이블 및 PC강재의 이완 등 시간의존성 변형들이 구조계에 미치는 영향도 고려해야 한다. 본 연구에서는 구조계에 영향을 미치는 각 공정을 모사하기 위하여 뼈대요소의 설치 및 제거, 케이블과 PC강재의 긴장, 재긴장 및 제거, 연결요소의 설치, 제거 및 연결상태의 변화, 경계조건의 변화를 고려한다. 또한 이동식작업차 등 가설장비는 이동보요소로서 이상화 하며 이동보요소의 설치, 이동 및 제거도 고려한다. 위의 기능들은 각각 별도의 시공명령어<sup>(15)</sup>로 정의하며 이 시공명령어들을 적절히 조합하여 사용함으로써 해석적으로 시공중의 각 단계를 모사할 수 있다.

실제의 시공에서는 각 공정마다 일정한 시간이

소요되나 본 연구에서는 모든 공정은 순간적으로 수행된다고 가정한다. 따라서 각 시공명령어를 사용할 때에는 시간구간의 길이를 영으로 하는 순간해석(Instantaneous Analysis)을 먼저하여 각 공정에 의한 영향을 고려한 후 다음 공정까지의 시간구간을 적당한 수의 시간단계로 나누어 시간단계해석(Time Step Analysis)을 함으로써 시간의존성 변형을 고려한다.

### 6. 해석예

본 논문에서는 케이블로 지지된 PC뼈대를 대상으로 시공중의 각 단계를 고려하여 시간의존적 비선형거동과 극한거동을 해석할 수 있는 이론을 제시했다. 저자는 본 논문에서 제시한 해석방법의 정당성을 검증하기 위하여 현수선의 해석, 크리프 해석, PC거더교의 극한해석, 켈틸레버보의 대변위해석, 사장교의 비선형해석을 수행하였고 PC사장교를 대상으로 시공단계를 고려한 시간의존적 비선형해석 및 극한해석을 수행하여 결과를 참고문헌<sup>(15)</sup>에 제시하였다. 본 논문에서는 이중 현수선의 해석, PC거더교의 극한해석, 사장교의 비선형해석에 대한 해석결과를 검토하고 PC사장교의 시공단계를 고려한 해석결과를 후속논문에서 다루고자 한다.

#### 6.1 현수선의 해석

그림 8과 같이 지점간의 거리가 254.0m 이고 양단이 지지된 단순케이블의 자중에 의한 처짐을 계산하였다. 케이블의 단면적은 0.419 cm<sup>2</sup>, 탄성계수는 137,800 MN/m<sup>2</sup>(MPa) 자중은 83.628 kN/m<sup>2</sup>로 가정하였다. 케이블요소의 정확도 및 다절점곡선요소의 성능을 동시에 검토하기 위해 케이블을 12개의 2절점 직선요소로 이상화 한 경우와 1개의 4절점 곡선요소로 이상화 한 경우를 해석하여 현수선식<sup>(21)</sup>에 의한 이론해와 비교하였다. 그림 9에 해석결과가 나타나 있다. 중앙부에서의 최대처짐은 12개의 2절점 직선요소를 사용한 경우 4,891 mm로서 이론해에 의한 값인 4,902 mm와 비교할 때 0.2%의 오차를 보였다. 한편 1개의 4절점 곡선요소를 사용한 경우는 절점 5에서의 처짐이 4,333 mm, 단부에서의 인장력이 5.802 kN으로서 12개의 2절점 직선요소를 사용

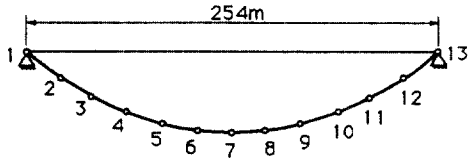


그림 8. Analysis model of the catenary cable.

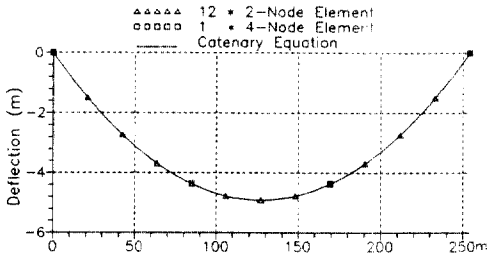
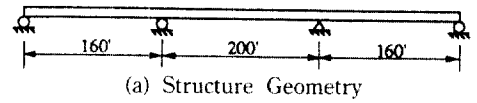


그림 9. Deflection of the catenary cable.

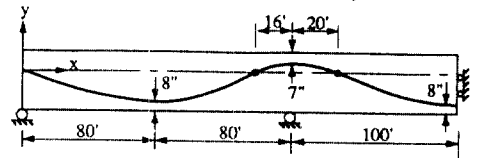
했을 때의 4,347 mm 및 5.789 kN에 비해 오차가 0.3 % 이내였다. 변형후의 케이블의 길이는 12개의 2절점 직선요소 및 1개의 4절점 곡선요소를 사용한 경우 모두 현수선식에 의한 이론해<sup>(21)</sup>인 254.25 m와 일치했다. 따라서 본 연구에서 제시한 케이블요소는 휨강도를 무시할 수 있는 일반적인 케이블의 거동을 정확히 추정하고 특히 사장교의 케이블과 같이 케이블에 자중 및 양단의 인장력만이 작용하는 경우는 1개의 4절점 곡선요소로서 충분함을 알 수 있다.

## 6.2 PC거더교의 극한해석

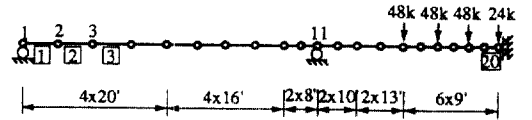
그림 10과 같은 PC거더교를 해석하여 Choudhury<sup>(22)</sup>의 해석결과와 비교하기로 한다. 단위계 및 콘크리트의 재료특성모델은 Choudhury와 마찬가지로 kip-in. 단위 및 ACI 209 모델을 사용하였다. 교량은 상자형단면을 가진 3경간 연속교로서 중앙에 대하여 대칭이므로 교량의 반만을 고려한다. PC강재는 웨브(Web)당 86개의 1/2 in. 직경의 7-wire strand 로 구성되어 있으며 총단면적은 26.32 in<sup>2</sup>이고 단에서의 긴장력은 웨브당 2,660 kips로 하여 포스트텐션 방식으로 긴장한다. 보강철근은 상자형거더의 플랜지, 상부슬래브, 웨브 및 바닥슬래브에 각각 콘크리트 면적의 0.3%가 배근된다. 해석모델은 그림 10.c와 같이 가정하며 거더의 단면은 그림 10.d와 같이 10개의 콘크리트층 및 5개의 보강철근층으로 이상화



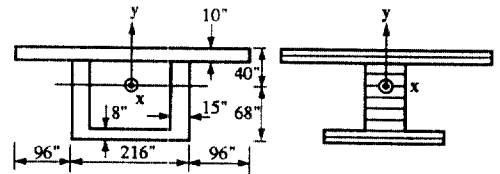
(a) Structure Geometry



(b) Prestressing Tendon Profile



(c) Finite Element Mesh Layout and Truck Loading



(d) Cross Section Idealization

그림 10. Three span post-tensioned box girder bridge (Choudhury bridge).

했다. 각 재료의 성질은 다음과 같이 가정하였다.

콘크리트 : 자중	$W = 155 \text{ pcf}$
28일 강도	$f'_c = 4.0 \text{ ksi}$
탄성계수	$E_c = 3,600 \text{ ksi}$
극한변형도	$\epsilon_{cu} = 0.0041$
보강철근 : 항복응력	$f_y = 60.0 \text{ ksi}$
탄성계수	$E_s = 29,000 \text{ ksi}$
PC강재 : 인장강도	$f_u = 270 \text{ ksi}$
탄성계수	$E_s = 27,500 \text{ ksi}$
극한변형도	$\epsilon_{su} = 0.058$

하중은 총 312 kips의 트럭하중(P13 Truck Loading)이 중앙경간의 중앙부에 작용하는 경우를 고려하기 위하여 그림 10.c와 같이 3개의 48 kips 하중과 1개의 24 kips 하중이 18 ft 간격으로 작용하는 것으로 가정하였다. 먼저 트럭하중의 5.5배에 이를 때까지 하중단계를 8개로 나누어 재하하고 이후에는 중앙부의 처짐을 단계별로 증가시키며 해석하였다.

그림 11에 하중의 증가에 따른 중앙부의 처짐의

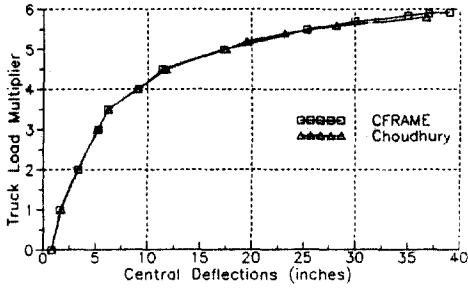


그림 11. Comparison of central deflections.

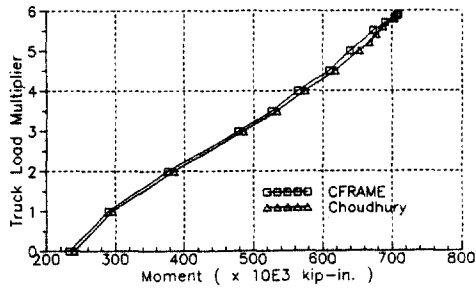


그림 12. Negative moment at interior support.

변화가 나타나 있으며 본 연구의 결과와 Choudhury의 결과가 잘 일치하고 있다. 파괴하중은 본 연구에서는 트럭하중의 5.92배, Choudhury의 결과는 트럭하중의 5.80배로서 2%정도의 오차를 보였다. 한편 파괴는 두 결과 모두 내측지점에서의 콘크리트의 압축연단에서 시작된 것으로 나타났다. 그림 12에는 하중의 증가에 따른 내측지점에서의 부모멘트의 변화가 나타나 있으며 두 결과가 잘 일치하고 있다. 따라서 본 연구에서 제시한 비선형 해석방법은 PC뿔대의 비선형거동 및 극한거동을 정확하게 예측함을 알 수 있다.

### 6.3 사장교의 비선형해석

그림 13과 같은 하프형 사장교를 해석하였다. 사장교의 제원은 Lazar<sup>(23)</sup>와 동일한 모델을 이용하여 부재단면의 성질 및 재료의 성질들은 표 1에 나타나 있다. 하중은 모든 부재의 자중에 더하여 등분포하중 40 kN/m가 전경간에 재하되는 것으로 하였다. 케이블의 초기인장력은 케이블의 색(Sag) 대 케이블의 수평투영길이의 비(Sag Ratio, R)가 1/60이 되도록 하였다. 일반적으로 완공후 사장교의 케이블의 R은 1/60보다 훨씬 작으나 시공 중에는 R이 커질 수

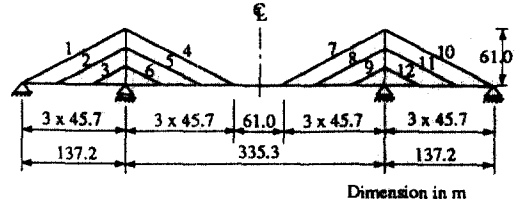


그림 13. Geometry of Lazar's cable stayed bridge.

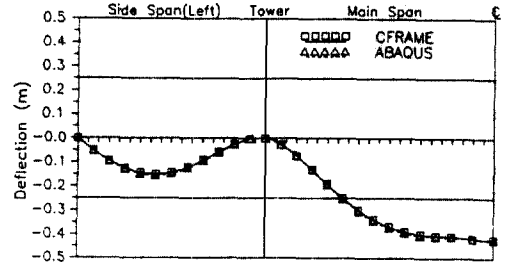


그림 14. Deflected shape of the deck.

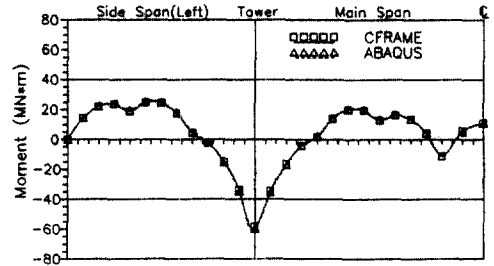


그림 15. Bending moment diagram of the deck.

표 1. Properties of structural elements of Lazar's bridge

Structural element	Area (m <sup>2</sup> )	Moment of inertia (m <sup>4</sup> )	Unit weight (kN/m <sup>3</sup> )	Modulus of Elasticity (MPa)
Girder	0.320	1.130	24	200000
Tower				
Top third	0.214	0.248	24	200000
Middle third	0.236	0.321	24	200000
Bottom third	0.258	0.395	24	200000
Cables				
Top cables	0.0677		78	165500
Middle cables	0.0271		78	165500
Bottom cables	0.0239		78	165500

있으며 R이 클수록 케이블의 처짐에 의한 기하학적 비선형성이 크게 나타나므로 본 예제에서는 R=1/60로 가정했다. 구조물이 중앙에 대하여 대칭이므로 왼쪽의 반만을 고려하고 기하학적 비선형거동만을 고려하여 해석했다.

그림 14, 15에 상판의 처짐도와 휨모멘트도가 나타나 있으며 비선형해석 프로그램 ABAQUS<sup>(24)</sup>에 의한 결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 즉 주경간의 최대처짐이 422 mm, 주탑에서의 상판의 최대부모멘트가 -58.5 MN·m로서 ABAQUS에 의한 결과인 425 mm, -60.3 MN·m와 최대 3% 이내의 차이를 보였다. 따라서 본 연구에서 제시한 해석이론이 기하학적 비선형성을 고려한 사장교의 해석에 정당함을 알 수 있다.

## 7. 결 언

본 논문에서는 케이블로 지지된 PC뺨대의 시공 중의 각 단계를 고려하고 콘크리트 및 PC장재, 케이블 재료의 시간의존적 특성 및 재료의 비선형성은 물론 케이블의 색 및 구조물의 처짐에 의한 기하학적 비선형성도 고려하는 해석방법을 제시하였다. 구조물의 비선형거동 및 시간의존적 거동을 해석하기 위한 운동방정식은 Updated Lagrangian 방식을 이용하여 유도하고 시간의존적인 해석을 위해서는 시간영역을 필요한 수의 시간단계로 분할한 후 순차적으로 적분을 진행해 나가는 순차적분법을 사용했다. 시공중의 각 단계를 표현하기 위해 시공명령어를 정의하여 임의의 해석단계마다 구조계의 변화를 고려할 수 있도록 했다. 본 논문에서 제시한 해석방법을 근간으로 컴퓨터 프로그램 CFRAME을 개발했으며 케이블의 해석, PC거더교의 극한해석, 사장교의 비선형해석에 적용한 결과 본 연구에서 제시한 해석방법이 정당함을 알 수 있었다.

## 참 고 문 헌

1. Scordelis, A.C., "Computer models for nonlinear analysis of reinforced and prestressed concrete structures," *PCI Journal*, Vol. 29, No. 6, 1984.
2. Leonhardt, F., *Prestressed Concrete-Design and Construction*, 2nd. Ed., W. Ernst, Berlin, 1964.

3. Guyon, Y., *Limit state Design of Prestressed Concrete*, Halsted Press and John Wiley & Sons, 1974.
4. Post-Tensioning Institute, "Post Tensioned Box Girder Bridge Manual," PTI, Chicago, 1978.
5. Brown, R.C. Jr., Burns, N.H. and Breen, J.E., "Computer Analysis of Segmentally Erected Precast Prestressed Box Girder Bridges," Report No. 121-4, Center for Highway Research, U. of Texas at Austin, 1974.
6. Technische Datenverarbeitung, "RM-spaceframe Manual," Technische Datenverarbeitung, Heinz Pircher und Partner, Austria, 1984.
7. Europe Etudes Gecti, "B.C. Bridge Construction computer program manual," Europe Etudes Gecti, France, 1977.
8. Van Zyl, S.F., "Analysis of Curved Segmentally Erected Prestressed Concrete Box Girder Bridges," Report UCB/SESM 78-2, U.C. Berkeley, 1978.
9. Khalil, M.S.A., "Time-dependent Nonlinear Analysis of Prestressed Concrete Cable-stayed Girders and Other Concrete Structures," Ph. D. Thesis, Dept. of Civil Eng., University of Calgary, 1979.
10. Ketchum, M. A., "Redistribution of Stresses in Segmentally Erected Prestressed Concrete Bridges," Report UCB/SESM 86-7, U.C. Berkeley, 1986.
11. Kang, Y.J., "SPCFRAME- Computer Program for Nonlinear Segmental Analysis of Planar Prestressed Concrete Frames," Report UCB/SEMM 89-7, U.C. Berkeley, 1989.
12. 김우종, "시공단계를 고려한 프리스트레스트 콘크리트 교량의 정적 및 동적 3차원 거동에 관한 연구," 공학박사학위논문, 서울대학교 토목공학과, 1990.
13. Bishara, A.G., "Analysis of cast-in-place concrete segmental cantilever bridges," *J. of Structural Eng.*, ASCE, Vol. 116, No. 5, 1990.
14. Herbert, T.J., "Computer analysis of deflections and stresses in stage constructed concrete bridges," *PCI Journal*, Vol. 35, No. 3, 1990.
15. 이재석, "케이블로 지지된 PC 뺨대구조물의 시공 단계를 고려한 시간의존적 비선형해석," 공학박사학위논문, 서울대학교 토목공학과, 1991.
16. Hognestad, E., "A study of combined Bending and Axial Load in Reinforced concrete Members," Univ. of Illinois Engineering Experimental Station, Bulletin Series No. 399, 1951.
17. ACI Committee 209, "Prediction of Creep, Shrinkage and Temperature Effects in Concrete Structu-

- res," ACI Publication SP-27, Paper SP 27-3, 1970.
18. Comité Euro-international du Béton, *CEB-FIP Model Code for Concrete Structures*, Cement and Concrete Association, Wexham Springs, Slough, England, 1978.
  19. Bathe, K.J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1982.
  20. Powell, G. and Simons, J., "Improved iteration strategy for nonlinear structures," *Intl. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, pp. 1455-1467, 1981.
  21. Gimsing, N.J., *Cable Supported Bridges-Concept and Design*, John Wiley & Sons, New York, 1983.
  22. Choudhury, D., "Analysis of Curved Nonprismatic Reinforced and Prestressed Concrete Box Girder Bridges," Ph. D. Thesis, Dept. of Civil Eng., U.C. Berkeley, Report UCB/SEMM-86/13, 1986.
  23. Lazar, B.E., "Stiffness analysis of cable stayed bridges," *J. of the Structural Division*, ASCE, Vol. 98, No. ST7, 1972.
  24. Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., "ABAQUS-user's manual and theory manual," V. 4.7, 1988.

(接受：1992. 7. 21)