

## SUMT法에 의한 2滑節 I形 鋼材 아치의 最適設計

## Optimum Design of Two Hinged Steel Arches with I Sectional Type

鄭 榮 采\*

Jung, Young Chae

## Abstract

This study is concerned with the optimal design of two hinged steel arches with I cross sectional type and aimed at the exact analysis of the arches and the safe and economic design of structure. The analyzing method of arches which introduces the finite difference method considering the displacements of structure in analyzing process is used to eliminate the error of analysis and to determine the sectional force of structure. The optimizing problems of arches formulate with the objective functions and the constraints which take the sectional dimensions( $B$ ,  $D$ ,  $t_f$ ,  $t_w$ ) as the design variables.

The object functions are formulated as the total weight of arch and the constraints are derived by using the criteria with respect to the working stress, the minimum dimension of flange and web based on the part of steel bridge in the Korea standard code of road bridge and including the economic depth constraint of the I sectional type, the upper limit dimension of the depth of web and the lower limit dimension of the breadth of flange.

The SUMT method using the modified Newton Raphson direction method is introduced to solve the formulated nonlinear programming problems which developed in this study and tested out through the numerical examples.

The developed optimal design programming of arch is tested out and examined through the numerical examples for the various arches. And their results are compared and analyzed to examine the possibility of optimization, the applicability, the convergency of this algorithm and with the results of numerical examples using the reference(30).

The correlative equations between the optimal sectional areas and inertia moments are introduced from the various numerical optimal design results in this study.

## 요 지

本 研究는 2滑節 鋼材 아치의 最適設計에 관한 것으로 아치構造의 正確한 解析과 構造를 安全하며 經濟的으로 設計하는 데 目的을 둔다.

構造解析 方法은 解析過程에서 構造物의 처짐을 考慮하는 有限差分法을 導入하므로 解析誤差를 消去하여 構造物의 斷面力을 決定할 수 있는 方法을 使用한다. 最適化問題는 設計變數를 斷面의 치수들( $B$ ,

\* 正會員 · 群山大學校 工科學 助教授

D,  $t_1$ ,  $t_2$ )로 하는 目的函數와 制約條件式으로 形成한다.

目的函數는 拱構造의 總重量으로하고 制約條件은 韓國 道路橋 標準示方書에 規定된 許容應力, 플랜지와 腹部의 최소치수에 관한 規準을 使用하고 I形 斷面의 經濟的 높이條件과 腹部의 上限界 寸수와 플랜지 幅의 下限界 寸수를 包含하여 誘導된다.

本 研究에서 開發된 非線形計劃問題를 풀기 위해 修正 Newton Raphson 探查法을 使用하는 SUMT 技法을 導入하여 數值例를 通하여 試驗해 본다.

本 研究에서 開發된 拱構造의 最適化 프로그램은 여러 拱構造의 數值例를 通하여 試行하고 考察한다. 이러한 數值結果를 通하여 本 알고리즘의 最適化 可能性, 適用 可能性 및 收斂性과 他 文獻(30)을 使用한 數值結果와도 比較分析한다.

本 研究의 最適斷面積과 2次모멘트의 相關關係式은 많은 數值的 最適設計 結果로부터 導出한다.

## 1. 緒 論

### 1.1 研究內容과 目的

지금까지 建設되고 있는 構造物 중 拱構造物은 美觀이 他 構造에 비하여 우수하므로 橋梁의 경우 하부 공간이 여유있고 地盤이 암석이며 美的 構造를 요하는 곳 에 設置되고 있다. 拱의 形態는 주로 多角形, 拋物線形 및 圓形 등의 形狀을 띄고 있으며 그 斷面도 다양하다. 現代는 될 수 있는 한 美觀이 우수한 構造를 추구하므로 拱構造의 經濟的 設計는 設計者들의 관심을 끄는 대상이라 할 수 있다.

構造工學者나 設計者들은 經濟的이면서 安全性을 보장할 수 있는 構造解析 및 設計가 되도록 하는데 관심을 쏟는다. 따라서 本 研究에서는 2滑節 拱를 대상으로 하고, 엄밀한 構造解析으로 斷面力을 구하기 위하여 構造의 처짐을 解析過程에서 고려하여 解析誤差를 消去할 수 있는 有限差分法에 의해 構造解析을 하는 方法을 도입하고, 安全性 및 實用性을 위해 우리나라 道路橋 標準示方書를 기준하여 經濟的 設計를 할 수 있는 方法을 開發코자 한다. 本 研究의 最適化는 最適化問題에 修正 Newton Raphson 探查法을 도입한 SUMT技法을 사용하여 最適斷面을 결정하는 方法을 개발하고 數值例에 적용하여 試行한다.

開發된 프로그램의 利用可能性을 考察하기 위해 數值例에 적용해 보고 그 結果를 통하여 本 알고리즘의 使用性, 最適化 收斂性, 最適斷面의 傾向 등을 檢討하고, Templeman, A. B.의 提案式을 이용한 最適設計結果와 本 研究의 最適設計結果와 比較分

析코자 한다.

### 1.2 關聯된 文獻考察

本 研究는 鋼材 拱의 最適設計이므로 이와 關聯된 鋼架대구조와 拱의 最適設計에 관한 研究動向 및 文獻을 紹介한다.

1950년대 이전의 最適設計는 古典的인 uniform strength design, 最少變形 에너지 設計, 最少重量 設計가 주를 이루었고 1950년대 이후엔 시스템工學 및 OR分野의 線形計劃法의 발달로 最適設計의 대부분이 塑性設計 理論에 의한 線形計劃 問題에 集中되었다.<sup>1~3)</sup>

1960년대에는 컴퓨터의 技術과 數學的 計劃法의 급격한 발달에 힘입어 彈性理論에 의한 鋼構造物의 最適設計를 중심으로 非線形 計劃問題,<sup>4,5)</sup> 動的計劃 問題,<sup>6)</sup> 離散形 計劃問題<sup>7)</sup> 등 수많은 最適設計 理論이 발표되었다.

Moses<sup>8)</sup>는 彈性理論에 의한 非線形 制約條件式을 Taylor級數의 1次項으로 대치하므로써 SLP를 처음으로 最適設計에 導入하였고, Reinschmidt, Cornell과 Brotchie등<sup>9)</sup>은 Moses의 研究를 확장하여 sensitivity coefficients를 사용한 反復施行 設計方法을 研究開發하고 非線形 彈性 最適設計 問題를 解析하는데 SLP가 效果的 이라는 結果를 얻었다.

1966년 Kaviie, Kowalike와 Moe<sup>10)</sup> 그리고 1968년 Marcal과 Gellatly<sup>11)</sup>는 interior penalty technique를 써서 非線形 制約條件式을 無制約 最適化 問題로 형성하여 最適解를 얻게 되었다. 그리고 1967년 Ridha<sup>5)</sup>는 鋼架構造物의 非線形 目的函數를 형

성함으로써 큰 관심을 끌었다.

Moses와 Onoda<sup>12)</sup>는 Grillage의 彈性設計가 일반적으로 nonconvex programming problem으로 된다는 것을 밝히면서 이러한 問題에 interior penalty technique가 어떤 매우 바람직한 特徵을 갖고 있다고 밝혔다.

McCutchem은<sup>13)</sup> 뼈대구조물의 最少重量 彈性設計를 反復施行的 線形計劃問題로 形成하였다.

Wu<sup>14)</sup>는 아치리브에 垂直分布荷重을 받는 矩形斷面의 2滑節 원호아치의 限界挫屈荷重을 考慮한 斷面最適化를 試圖하였다. 그리고 Budjansky, Frauenthal과 Hwtchinson<sup>22)</sup>은 Wu가 發表한 研究의 紹介와 例題를 수록하였으며 이 역시 2滑節 원호아치에 垂直分布荷重이 作用하는 境遇의 늘음이 없는 部材의 挫屈 만을 考慮한 斷面의 最適設計를 發表했다.

Tadibaksha와 Farshad<sup>33)</sup>는 平衡狀態에서 휨모멘트와 剪斷力를 考慮하지 않는 彈性 아치構造物에 關하여 研究하였는데 여기서는 垂直分布荷重을 받는 원호아치와 等分布 死荷重을 받는 拋物線아치가 考慮되었다.

Na와 Kurajian<sup>34)</sup>은 Budiansky와 Frauenthal과 Hutchinson<sup>32)</sup>이 發表한 研究의 固有值 問題를 提示하여 挫屈을 考慮한 斷面의 最適化를 試圖하였다.

Lightfoot과 Hutchinson<sup>35)</sup>은 encast steel과 cast iron 아치교의 縱斷面, 橫斷面, 支點狀態, 中央한지 與否, 리브길이, 材料의 程度와 트러스作用등의 影響과, 死荷重과 活荷重 그리고 溫度應力에 關聯된 影響을 考慮하여 最適斷面和 斷面力를 決定하는 것에 關하여 發表하였다.

그 밖의 1970년대 초까지의 研究動向은 Gallagher<sup>44)</sup>의 文獻과 Majid<sup>15)</sup>의 文獻에 詳細히 紹介되었다.

國內에서는 조효남<sup>16)</sup>의 鋼構造物에 대한 離散形 最適設計를 발표한 이래 변근주<sup>17)</sup>의 鋼기둥의 最適設計, 이규원<sup>18)</sup>의 彈性理論에 의한 I形鋼 보의 最適設計, 이규원, 변근주와 황학주<sup>19)</sup>의 SUMT法에 의한 鋼材 트러스의 最適設計에 關한 研究가 발표되었다. 아치구조의 최적설계는 송재호<sup>20)</sup>의 限界狀態 設計法에 의한 철근 콘크리트 아치構造物의 斷面 最適化를 SLP와 SUMT에 의하여 實施하여 콘크리트 最適斷面和 鐵筋比를 구하는 研究와 한상훈<sup>21)</sup>의

두 개의 獨立된 設計空間인 斷面設計 空間과 座標 空間으로 區分하여 示方書 規定을 適用하여 斷面積을 最少化하는 아치形狀 最適化를 試圖한 研究가 發表되었다. 그리고 이재영<sup>22)</sup>의 多段階 分割 最適化 技法에 의한 트러스 構造物의 形狀 最適化에 關한 研究 등이 발표되었고 그 밖의 SUMT法에 의한 構造物의 最適化 研究는 文獻 (23)과 (24)에서도 살펴 볼 수 있다.

以上的 조사된 文獻을 考察해 보면 아치나 뼈대 構造解析을 할 때 固定構造로 보고 解析하므로써 처짐으로 인한 解析上 誤差가 생겨 嚴密한 構造解析과 다소 差異가 생기게 됨을 發見할 수가 있다. 특히 鋼材 아치는 柔軟性이 있는 構造이므로 構造 解析 過程 中 처짐에 의한 影響을 考慮하여 斷面力를 算出하는 데 反映하는 것이 바람직 하다고 생각된다. 그리고 조사된 文獻에서 아치나 뼈대구조의 最適設計는 大部分 解析的 斷面最適化를 주로 하기 때문에 實際 工學設計에서의 構造設計 示方書 要求에 따른 斷面치수까지 決定한 例는 찾기가 어려웠다.

따라서 本 研究는 構造解析過程에서 有限差分法을 利用하여 처짐을 考慮한 斷面力를 算定하고, 最適設計過程에서 韓國 道路橋 標準示方書 基準에 적합한 經濟的 斷面積을 구하는 設計가 되도록 最適化 알고리즘을 開發하여 보다 嚴密한 構造解析을 함과 동시에 安定的 이며 經濟的인 設計斷面을 決定하는 데 目的을 둔다.

### 1.3 基本假定 및 適用範圍

本 研究는 構造解析과 最適化를 同時에 遂行하게 되므로 最適設計를 容易하게 하기 위해 다음과 같은 假定과 適用限界를 使用한다.

- 1) 使用鋼材는 SWS 41로 하고 斷面은 上下對稱 I形으로 全 經間에 걸쳐 均一하다.
- 2) 溫度變化로 인한 變位는 無視한다.
- 3) 作用荷重은 等分布死荷重과 等分布 活荷重으로 活荷重은 衝擊荷重을 包含하고 死荷重과 活荷重의 比率는 1:2라 假定한다.
- 4) 構造解析은 彈性理論에 따른다.
- 5) 設計規準은 道路橋 標準示方書 鋼橋篇에 따른다.

## 2. 構造解析

아치構造의 解析方法은 여러가지가 있으나 本 研究 에서는 처짐을 考慮한 有限差分法에 의해 解析하는 方法을 택하여 計算하고 計算된 斷面力 중 構造物에 가장 不利한 影響을 주는 斷面力을 設計用 斷面力으로 채택한다.

本 研究에서 設計對象으로 한 2滑節 아치의 幾何的 모델은 Fig.2.1과 같고 微小 部材에 대한 彎矩모멘트와 軸力의 基本 微分方程式은 다음 式과 같다.

$$\frac{d^2n}{ds^2} = \frac{M}{EI} \quad (2-1)$$

$$\frac{dt}{ds} = -\frac{N}{AE} \quad (2-2)$$

그림 2.1로부터 임의의 점의 垂直처짐과 水平처짐의 관계는 다음 式들과 같이 誘導된다.

$$v = n \cos \theta + t \sin \theta \quad (2-3)$$

$$u = -n \sin \theta + t \cos \theta \quad (2-4)$$

여기서, M : 임의의 點에서의 彎矩모멘트  
 N : 임의의 點에서의 軸力  
 A : 임의의 點의 斷面積  
 E : 材料의 彈性係數

그리고 아치의 支配方程式은 式(2-5), (2-6)과 같다.

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \sec \theta - \frac{N}{AE} \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dx} \quad (2-5)$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{dv}{dx} \tan \theta - \frac{N}{AE} (1 + \tan^2 \theta) \quad (2-6)$$

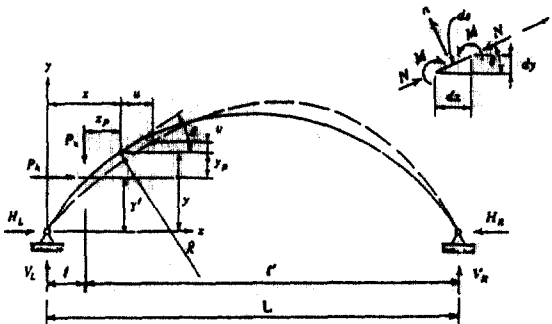


그림 2.1. Deflection of flexible arch.

임의 斷面에서의 彎矩모멘트와 軸力은 각각 式(2-7)과 式(2-8)로 표시된다.

$$M_x = V_L(x+u) - H_L(y+v) - \sum P_v(x_p+u) - \sum P_h(y_p+v) \quad (2-7)$$

$$N_x = V_L \sin \theta + H_L \cos \theta - \sin \theta \sum P_v + \cos \theta \sum P_h \quad (2-8)$$

여기서  $V_L$  : 左側 支點의 垂直反力

$H_L$  : 左側 支點의 水平反力

式(2-5)에서  $N/AE \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dx} = 0$ 이므로 이를 無視하면 式(2-5)와 式(2-6)을 n점에 대한 中央差分形態로 表示하면 다음 式들과 같다.

$$1/h^2(v_{n-1} - 2v_n + v_{n+1}) = M_n/EI_n \sec \theta_n \quad (2-9)$$

$$1/h(u_n - u_{n-1}) = -1/h(v_n - v_{n-1}) \tan \theta_{n-1/2} (1 + \tan^2 \theta_{n-1/2}) N_{n-1/2}/A_{n-1/2} E \quad (2-10)$$

여기서  $M_n$ 은 未知의 처짐 u와 v 및 水平反力  $H_L$ 의 函數이고,  $N_{n-1/2}$ 은  $H_L$ 의 函數이다. 이 式들은 非線形으로 컴퓨터를 이용하여 逐次的으로 實行하면 원하는 正確度를 얻을 수 있다.

全 支間을 等分할 때 1次 逐次實行에서 式(2-7) 중 u와 v는 無視하고 式(2-9)에 代入하면 다음 式(2-11)과 같다.

$$v_{n-1} - 2v_n + v_{n+1} + \frac{h^2 \sec \theta_n}{EI} Y_n H - \frac{h^2 \sec \theta_n}{EI} (v_L x - \sum P_v x_p) = 0 \quad (2-11)$$

또한 垂直처짐에 대한 境界條件은 全 支間을 12 等分할 때 다음 式과 같이 表示된다.

$$v_1(\tan \theta_{1/2} - \tan \theta_{3/2}) + v_2(\tan \theta_{3/2} - \tan \theta_{5/2}) + \dots + v_{11}(\tan \theta_{11/2} - \tan \theta_{13/2}) = 0 \quad (2-12)$$

式(2-11)과 式(2-12)를 이용해 聯立方程式을 풀어 垂直처짐 v와 水平反力 H의 처음 逐次值를 구하고 이 값들을 式(2-10)에 代入하여 水平처짐의 처음 逐次值를 얻는다. 이 段階에서 임시 最大 모멘트와 軸力 그리고 임시斷面積을 구할 수 있다. 처음 計算 후 最終값을 얻기 위해 보통 逐次式과 直接解法에 의하여 얻을 수 있는데 그중 逐次式에 의해 구하는 方法을 記述하면 다음과 같다.

逐次的으로 다음 段階를 計算하는 式은 式(2-11)의 常數項을 式(2-13) 처럼 變化시켜 計算하게 된다.

$$-h^2/EI \sec\theta_n(V_{1x}-\Sigma P_{v,x_p}-\Sigma P_{h,y_p}+(V_L-\Sigma P_v)u' - (H'+\Sigma P_h)v') \quad (2-13)$$

여기서,  $u'$ ,  $v'$ ,  $H'$ 는 각각 前 段階의 水平처짐과 垂直처짐 및 水平反力 이다.

水平처짐과 水平反력을 未知數로 假定하고 式(2-13)을 式(2-7), (2-9) 및 (2-11)에 組合하여 나타내면 式(2-14)와 같다.

$$v_{n-1} + \left(\frac{H'h^2}{EI} \sec\theta_n - 2\right)v_n + v_{n+1} + \frac{h^2}{EI} \sec\theta_n y_n H = \frac{h^2}{EI} \sec\theta_n (V_{1x} - \Sigma P_{h,y_p} + (V_L - \Sigma P_v)u') \quad (2-14)$$

그리고 式(2-12)는 다음과 같이 表現된다.

$$v_1(\tan\theta_{1/2} - \tan\theta_{1/2}) + v_2(\tan\theta_{1/2} - \tan\theta_{2/2}) + \dots + v_{11}(\tan\theta_{10/2} - \tan\theta_{11/2}) + \sum_{n=1}^{12} \frac{h(1 + \tan^2\theta_{n-1/2})}{AE} N_{n-1/2} = 0 \quad (2-15)$$

逐次的 過程을 通하여 임의 反復施行에 의한 斷面力은 式(2-7)과 式(2-8)에 의하여 구하여 지고 設計斷面力은 最終 反復施行에서 얻은 分割區間의 斷面力중 最大値를 택하여 決定한다.

### 3. 最適化 技法

#### 3.1 最適化 問題의 一般形式

構造物의 最適設計란 設計變數에 附課된 制約條件을 滿足시키면서 目的函數를 最少로 하는 設計變數의 組合을 구하는 것으로서 構造物의 形狀, 荷重, 示方書, 工法 및 使用材料의 決定으로부터 시작된다.

일단 이러한 資料들이 決定되면 最適化問題形成이 可能하게 된다. 이 段階에서는 設計變數를 定義하고 設計에 適用할 諸般 設計條件式을 最適基準에 의해 數式化 하는 作業이 이루어 진다. 이러한 問題가 形成되면 그 問題의 特性에 適合한 最適化 技法을 適用하여 最適解를 구하게 된다.

設計變數는 주로 節點의 座標, 部材數, 支點의 種類, 斷面의 寸數 및 施工方法과 構造物에 作用하는 荷重에 대해 應答을 表示하는 應力 및 變位가 代表的이다. 그러나 設計의 效率을 높이기 위해서는 重要한 變數들 만을 取하고 그밖의 變數들은 考慮치 않는 것이 通例이다. 그리고 目的函數는 構造物의

最適設計時 許容領域 內의 無數히 많은 設計點들을 比較할 수 있는 唯一한 判斷基準이 되는 函數로서 經費, 重量, 體積 및 變形에너지 등이 사용되고, 制約條件은 狀態變數와 解析變數의 設計上的 制限 및 示方書 등에 의한 制約事項을 表示하는 函數로서 應力, 變位, 部材間隔, 斷面의 寸數, 鐵筋比, 振動數 및 挫屈 등이 될 수 있다.

前述한 構造物 最適設計의 問題形成은 一般的으로 다음과 같이 數式化할 수 있다.

$$\text{Minimize } W(X) \quad (3-1)$$

$$\text{Subject to } H_i(X) = 0 \quad (3-2)$$

$$G_j(X) \geq 0$$

여기서,  $W(X)$ : 目的函數

$H_i(X)$ : 等號 制約條件式( $i=1,2,\dots,l, l \leq n$ )

$G_j(X)$ : 不等號 制約條件式( $j=1,2,\dots,m$ )

$X$ : 設計變數( $x_1, x_2, \dots, x_n$ )

最適設計에서는 目的函數가 式(3-1)로  $m$ 個의 制約條件式이 式(3-2)로 주어질 때 目的函數  $W(X)$ 가 最少로 되도록 設計變數  $X$ 를 決定하는 것이다.

#### 3.2 SUMT 技法

非線形計劃問題에 適用하는 技法은 SLP(successive linear programming)法과 SUMT(sequentially unconstrained minimization technique)法 등이 있는데 이중 本 研究에서는 Fiacco, A. V.와 McCormick, G. P.(1968)<sup>26)</sup>가 開發한 SUMT法을 택하고 이 技法 중 工學의 見地에서 效率的이라고 하는 interior penalty function method와 最適値를 찾는 여러 探查方法 중 Hessian matrix를 이용하여 探查方向을 決定하는 修正 Newton Raphson法을 사용코자 하며 이를 記述하면 다음과 같다.

##### 3.2.1 Interior Penalty Function Method

Interior penalty function method는 Carrol, C. W.<sup>26)</sup>이 처음 발표하고, Fiacco와 McCormick, G. P.<sup>26)</sup>가 發展시킨 方法으로 式(3-1), (3-2)의 非線形計劃問題를 最初에 어떤 스칼라量  $\alpha' = \alpha^1$ 과  $G_i(X') \leq 0$ 인 實行possible한 初期 設計點  $X = X'$ 가 주어지면 一聯의 無制約函數의 最少値를 求하는 問題로 된다. 이를 數式으로 表示하면 다음과 같다.

$$\text{Minimize } \phi(X, \alpha') \quad (3-3)$$

여기서,

$$\phi(X, \alpha^r) = W(X) + \alpha^r \sum_{j=1}^m \frac{1}{G_j(X)} \quad (3-4)$$

$\alpha^r$ : penalty parameter ( $\alpha^1 > \alpha^2 > \dots > \alpha^r > \alpha^{r+1}$ )

이 방법의 알고리즘은 다음과 같다.

1) X 및  $\alpha$ 의 초기값  $X^0, \alpha^1$ 을考慮한다. 但,  $X^0$ 는 制約條件을 滿足시키지 않으면 안된다.

2)  $\alpha^r$ 에 對하여  $X^{r+1}$ 을 出發點으로 하여  $\phi(X, \alpha^r)$ 를 最少로 하는 解를 求한다.

3) 收斂條件이 滿足될 때는 計算을 終了한다.

4) 收斂되지 않을 때는  $\alpha^{r+1} = \alpha^r / C, C > 1, r = r + 1$ 로 하여  $\alpha$ 를 減少시켜 step 2)로 돌아 간다.

### 3.2.2 修正 Newton Raphson法

SUMT法은 逐次的으로 繼續 反復되기 때문에 SUMT法 自體의 效率을 높이기 위해서는 最初의 設計點  $X^0$ 로부터 다음 設計點을 向하는 一方向 探查法에 의해

$$\phi(X^0) > \phi(X^1) > \dots > \phi(X^k) > \dots \quad (3-5)$$

가 되도록 進行시켜야한다.

penalty function을 修正 Newton Raphson法에 의해 最適化 할 境遇 k+1 番次 設計變數의 값은 다음 式에 의해 얻어진다.

$$\{X^{k+1}\} = \{X^k\} - \{B^k\} \quad (3-6)$$

여기서,

$\{B^k\}$ : k 番次 設計點에서의 feasible direction vector ( $= [H\phi(X^k)]^{-1} \{\nabla \phi(X^k)\}$ )

$\{\nabla \phi(X^k)\}$ : k 番次 反復施行에서의 penalty function의 Hessian matrix

$[H\phi(X^k)]$ : k 番次 反復施行에서의 penalty function의 Hessian matrix

本 研究에서는 Fiacco와 McCormick가 展開한 修正 Newton Raphson 法을 사용하여 보다 效率의 으로 最適解에 收斂하도록 다음과 같은 段階로 進行하여 feasible direction vector  $\{B^k\}$ 를 얻는다.

1) Hessian matrix의 成分을 計算한다.

2) Hessian matrix를 다음과 같이 分割한다.

$$[H\phi(X^k)] = [L^k][D_k][L^k]^T \quad (3-7)$$

여기서,  $[L^k]$ : 下三角 正則行列(non-singular lower triangular matrix)

$$= \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

$[D^k]$ : 對角行列(diagonal matrix)

$$= \begin{bmatrix} d_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & d_{jj} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & d_{mm} \end{bmatrix}$$

$$d_{jj} = \frac{\partial^2 \phi(X)}{\partial X_j^2} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2 d_{kk}$$

$$l_{ij} = \frac{\partial \phi(X) / (\partial X_i \partial X_j)}{d_{jj}} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} d_{kk} / d_{jj}$$

3) 2)의 資料에서 陰의  $d_{jj}$ 가 存在하면 다음의 性質을 갖는  $\{a\}$ 를 定義한다.

$d_{jj} > 0$  이면,  $a_j = 0$

$d_{jj} \leq 0$  이면,  $a_j = 1$

이 때 feasible direction vector  $\{B^k\}$ 는 다음 式과 같다.

$\{t\}^T \{\nabla \phi(X^k)\} < 0$ 이면,  $\{B^k\} = \{t\}$

$\{t\}^T \{\nabla \phi(X^k)\} > 0$ 이면,  $\{B^k\} = -\{t\}$

여기서,  $\{t\} = [L^T]^{-1} \{a\}$

만약 모든  $d_{jj}$ 가 陽이면

$\{B^k\} = -[H\phi(X^k)]^{-1} \{\nabla \phi(X^k)\}$

가 된다.

## 4. 最適化 問題形成

### 4.1 目的函數

그림 4.1과 같은 對稱 I形 斷面을 갖는 圓形 아치의 重量을 目的函數로 하면 式 (4-1)과 같이 數

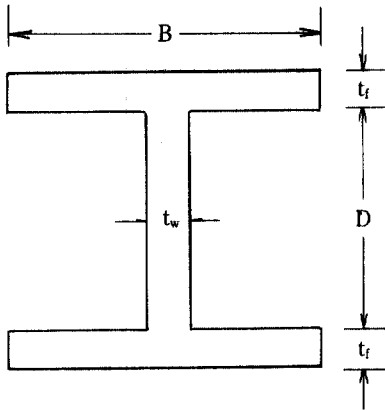


그림 4.1. Cross section of arch.

式化할 수 있다.

$$W(A) = \rho(2B t_f + Dt_w)CL \quad (4-1)$$

여기서,  $\rho$  : 아치의 단위중량

B : 플랜지의 폭

D : 복부의 높이

$t_f$  : 플랜지의 두께

$t_w$  : 복부의 두께

CL : 원형 아치의全长( $R \cdot \theta$ )

R : 원형 아치의 曲率半徑( $H/2.0 + L^2/8H$ )

$\theta$  : 交角( $2 \sin^{-1}L/2R$ )

H : 아치의 Rise

#### 4.2 制約條件

韓國 道路橋 標準示方書<sup>36)</sup> 鋼橋篇 11.5에 의하면 아치部材의 設計는 軸方向力과 彎모멘트를 받는 部材로 設計함을 原則으로 한다고 規定하고 있다. 또한 이 示方書에서 規定하고 있는 應力, 鈹의 두께, 鈹의 最小 寸數, 參考 文獻의 經濟의 높이 및 設計變數의 上限과 下限制約을 다음과 같이 數式化 한다.

##### 4.2.1 應力制約條件式

韓國 道路橋 標準示方書<sup>36)</sup> 鋼橋篇 3.3과 Crawley, S. W., Dillon, R. M.과 Carter, W. O.(1984)<sup>29)</sup>를 參照하여 控屈을 考慮한 應力 制約條件式을 두 境遇로 나누고, 각 境遇의 許容應力은 細長比에 따라 세가지로 區分한 示方書 鋼橋篇 2.2.1의 SWS 41에 관한 制約事項을 考慮하여 數式化하면 다음과 같다.

1)  $\sigma_c/\sigma_{ca} > 0.15$ 인 境遇

$$1 - \sigma_c/\sigma_{ca} - (1/(1 - \sigma_c/\sigma_e))\sigma_b/\sigma_{ba} \geq 0 \quad (4-2)$$

여기서,  $\sigma_c$  : 軸方向 應力( $= N_x/(2Bt_f + Dt_w)$ )

$\sigma_{ca}$  : 許容軸方向應力

①  $l_e/\gamma \leq 20$  ;  $\sigma_{ca} = 1,400 \text{ kg/cm}^2$

②  $20 < l_e/\gamma \leq 93$  ;  $\sigma_{ca} = 1,400 - 8.4$

$(l_e/\gamma - 20) \text{ kg/cm}^2 \quad (4-3)$

③  $l_e/\gamma > 93$  ;  $\sigma_{ca} = 12,000,000/$

$(6,700 + (l_e/\gamma)^2) \text{ kg/cm}^2$

$\gamma$  : 最少 回轉半徑 ( $= ((B(D + 2t_f)^3 - (B - t_w)D^3)/(12(2Bt_f + Dt_w)))^{1/2}$ )

$l_e$  : 有效길이( $= kl$ )

k : 端部拘束에 따르는 係數

$\sigma_b$  : 彎應力( $= M_x(D/2 + t_f)/I$ )

$\sigma_{ba}$  : 許容 彎應力( $= 1,400 \text{ kg/cm}^2$ )

$\sigma_e$  : 臨界 軸方向應力( $= 12\pi^2 E/(23(l_e/r)^2)$ )

E : 鋼材의 彈性係數( $2,100,000 \text{ kg/cm}^2$ )

I : 斷面 2次모멘트( $= (B(D + 2t_f)^3 - (B - t_w)D^3)/12$ )

2)  $\sigma_c/\sigma_{ca} \leq 0.15$ 인 境遇

$$1 - \sigma_c/\sigma_{ca} - \sigma_b/\beta_{ba} \geq 0 \quad (4-4)$$

##### 4.2.2 플랜지 最小두께 制約條件式

韓國 道路橋 標準示方書 鋼橋篇 3.2.2의 規定에 의하면 壓縮應力을 받는 自由突出鈹의 最小두께 t는 自由突出幅 b의 1/16 以上이어야 하므로 이를數式化하면 다음과 같다.

$$t_f - (B - t_w)/32 \geq 0 \quad (4-5)$$

##### 4.2.3 腹部鈹의 最小두께 制約條件式

韓國 道路橋 標準示方書 鋼橋篇 8.4의 規定에 의해서 다음과 같은 制約條件式을 數式化할 수 있다

$t_w - D/152 \geq 0$  (水平補強材가 없는 境遇)

$t_w - D/256 \geq 0$  (水平補強材를 1段 사용하는 境遇)

$t_w - D/310 \geq 0$  (水平補強材를 2段 사용하는 境遇)

(4-6)

##### 4.2.4 其他 制約條件式

韓國 道路橋 標準示方書 鋼橋篇 3.1.6에 의한 플

랜지의 두께, 幅 및 腹部の 두께에 對한 最少值 規定과 鉸桁의 經濟的 높이條件 그리고 腹部높이의 上限界를 數式化하면 다음과 같다.

$$t_f - 0.8 \geq 0 \quad (4-7)$$

$$t_w - 0.8 \geq 0 \quad (4-8)$$

$$B - 40 \geq 0 \quad (4-9)$$

$$D - 1.1(M_x / \sigma_{btw})^{1/2} \geq 0 \quad (4-10)$$

$$250 - D \geq 0 \quad (4-11)$$

## 5. 適用例 및 結果分析

### 5.1 基本假定

本 研究의 設計 對象構造物인 2滑節 鋼材 아치 構造物의 형태는 圓形이고 使用材料는 SWS 41로 하며 上, 下플랜지의 두께와 幅이 같은 I形 斷面을 갖는 다고 假定한다. 그리고 그 밖의 假定은 다음에 의한다.

아치의 支間 :  $L = 100 \text{ m}, 75 \text{ m}, 50 \text{ m}.$

아치의 높이 :  $H = \text{支間의 } 20\%, 30\%, 40\%.$

作用荷重 : 等分布 死荷重과 等分布 活荷重 比率 ( $W_d/W_l$ )은  $1/2, 1.5/3, 2/4$ 로 하고 活荷重은 左側 支點으로부터 支間의 70%까지만 作用한다고 본다.

初期設計值 :  $B = 100 \text{ cm}, D = 200 \text{ cm}, t_f = 4 \text{ cm}, t_w = 4 \text{ cm}$ 로 일정하다.

### 5.2 設計過程

아치構造의 보다 正確한 解析을 하기 위해 처짐을 解析過程에 考慮하는 有限 差分法을 導入하여 斷面力을 計算코자 한다. 反復施行過程에서 構造解析을 하기위한 斷面續과 斷面 2次 모멘트는 前回 反復施行에서 求한 設計變數를 使用하여 計算하고 3回 反復施行한 斷面力 중 가장 不利한 區間의 斷面力을 設計斷面力으로 定하고 修正 Newton Raphson法에 의해 探查方向을 決定하는 SUMT法을 使用해 5回 反復施行하여 最適值를 決定한다. 이 設計過程을 圖示化하면 그림 5.1과 같다.

### 5.3 計算結果 및 結果分析

#### 5.3.1 計算結果

設計 對象構造物인 I形 斷面을 갖는 2滑節 아치에

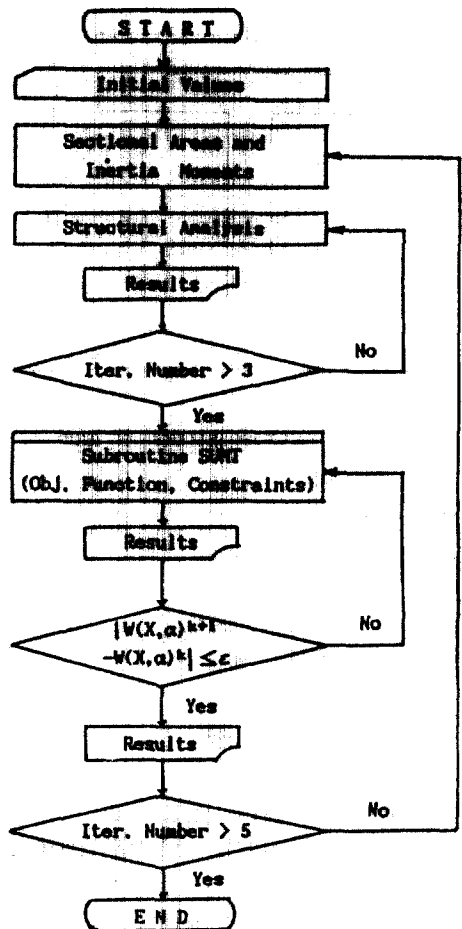


그림 5.1. Flow chart of optimum design by SUMT algorithm.

대한 最適設計는 有限 差分法을 이용한 構造解析과 SUMT法을 이용한 最少重量을 갖는 斷面을 求하는 方法으로 電子計算을 通하여 最適值를 얻고, 이 結果를 表로 나타내면 표 5-3과 같다.

5.3.2 他研究<sup>30)</sup>의 提案式을 利用한 最適值와 比較 同一條件을 주었을 境遇 本 研究 結果와 Templeman, A. B.<sup>30)</sup>의 universal beam에 對한 提案式을 利用한 最適設計結果의 斷面續을 比較한다.

Templeman, A. B.의 universal beam에 對한 斷面續과 斷面係數, 斷面 2次 모멘트와 斷面係數의 關係는 代數方眼紙에서 다음과 같은 關係를 갖는다.

$$A = 0.78 Z^{2/3} \quad (5-1)$$



표 5-1. Optimum sectional areas and inertia moments of arches without horizontal stiffener.

Span (m)	Rise (m)	Wd/Wl (t/m)	Ini. Sectn. Area(cm <sup>2</sup> )	Opti. Sectn. Area(cm <sup>2</sup> )	Opti. Inertia Moment(cm <sup>4</sup> )
100	40	1/2	1,600	637.95	5,265,483
		1.5/3	1,600	857.75	8,207,474
		2/4	1,600	1,120.60	11,209,537
	30	1/2	1,600	560.55	3,474,648
		1.5/3	1,600	736.73	7,338,999
		2/4	1,600	913.87	8,265,992
	20	1/2	1,600	525.87	2,948,553
		1.5/3	1,600	704.17	5,301,986
		2/4	1,600	870.73	7,876,507
75	30	1/2	1,600	437.94	2,524,950
		1.5/3	1,600	622.55	3,628,829
		2/4	1,600	724.43	5,780,075
	22.5	1/2	1,600	385.94	1,646,977
		1.5/3	1,600	515.96	2,855,486
		2/4	1,600	628.19	4,498,210
	15	1/2	1,600	356.75	1,608,973
		1.5/3	1,600	491.31	2,479,188
		2/4	1,600	608.68	3,710,696
50	20	1/2	1,600	259.70	824,741
		1.5/3	1,600	348.97	1,362,520
		2/4	1,600	422.49	2,280,569
	15	1/2	1,600	226.04	610,583
		1.5/3	1,600	306.96	996,893
		2/4	1,600	374.78	1,551,213
	10	1/2	1,600	215.39	551,103
		1.5/3	1,600	288.80	953,353
		2/4	1,600	358.00	1,444,135

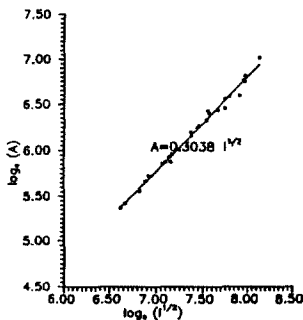


그림 5.2. Correlations of  $\log_{10}(A)$  and  $\log_{10}(I^{1/2})$  for the arches with non-horizontal stiffener.

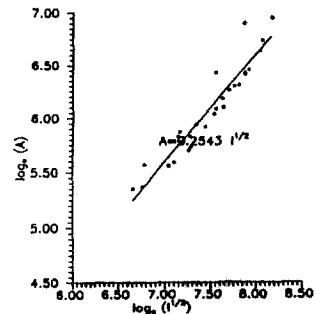


그림 5.3. Correlations of  $\log_{10}(A)$  and  $\log_{10}(I^{1/2})$  for the arches with one horizontal stiffener.

표 5-2. Optimum sectional areas and inertia moments of arches with one horizontal stiffener.

Span (m)	Rise (m)	Wd/W (t/m)	Ini. Sectn. Area(cm <sup>2</sup> )	Opti. Sectn. Area(cm <sup>2</sup> )	Opti. Inertia Moment(cm <sup>4</sup> )
100	40	1/2	1,600	548.47	6,049,160
		1.5/3	1,600	987.51	6,839,723
		2/4	1,600	1,045.27	12,460,575
	30	1/2	1,600	481.68	4,216,789
		1.5/3	1,600	641.34	7,550,620
		2/4	1,600	842.79	10,271,035
	20	1/2	1,600	445.44	4,319,983
		1.5/3	1,600	605.28	6,951,245
		2/4	1,600	764.68	9,631,207
75	30	1/2	1,600	373.36	2,922,842
		1.5/3	1,600	622.51	3,628,829
		2/4	1,600	622.26	7,025,777
	22.5	1/2	1,600	339.47	2,045,978
		1.5/3	1,600	440.76	3,684,336
		2/4	1,600	543.75	5,470,533
	15	1/2	1,600	340.08	1,575,149
		1.5/3	1,600	418.10	3,464,623
		2/4	1,600	524.31	4,909,997
50	20	1/2	1,600	261.49	777,367
		1.5/3	1,600	297.97	2,027,749
		2/4	1,600	381.14	2,386,755
	15	1/2	1,600	214.39	726,514
		1.5/3	1,600	266.96	1,481,597
		2/4	1,600	355.08	1,638,290
	10	1/2	1,600	209.55	590,747
		1.5/3	1,600	259.44	1,311,151
		2/4	1,600	308.14	2,116,118

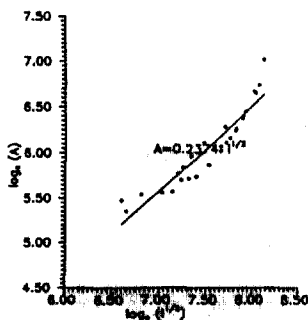


그림 5.4. Correlations of  $\log(A)$  and  $\log(I^{1/2})$  for the arches with two horizontal stiffener.

$$I = 1.95 Z^{4/3} \quad (5-2)$$

윗 식들로부터 다음 식(5-3)이誘導된다.

$$A = 0.559 I^{1/2} \quad (5-3)$$

本 研究에서는 식(5-3)을 이용해 最適化를 施行하고 그 結果를 表로 나타내면 표 5-4와 같고, 示方書 規定에 의한 本 研究과 比較하면 표 5-5와 같다.

### 5.3.3 結果分析

本 研究의 알고리즘의 適用可能性, 收斂性, 最適化傾向 및 他研究에 의한 結果 比較 등에 關係 考察하면 다음과 같다.

표 5-3. Optimum sectional areas and inertia moments of arches with two horizontal stiffener.

Span (m)	Rise (m)	Wd/Wl (t/m)	Ini. Sectn. Area(cm <sup>2</sup> )	Opti. Stetn. Area(cm <sup>2</sup> )	Opti. Inertia Moment(cm <sup>3</sup> )
100	40	1/2	1,600	520.78	6,149,030
		1.5/3	1,600	780.00	9,307,318
		2/4	1,600	1,106.70	11,472,949
	30	1/2	1,600	448.76	4,955,778
		1.5/3	1,600	630.00	7,665,088
		2/4	1,600	840.21	10,249,950
	20	1/2	1,600	431.81	4,403,076
		1.5/3	1,600	582.64	7,093,678
		2/4	1,600	764.18	9,694,426
75	30	1/2	1,600	355.84	3,462,778
		1.5/3	1,600	474.38	5,414,714
		2/4	1,600	604.44	7,327,016
	22.5	1/2	1,600	344.04	1,985,994
		1.5/3	1,600	412.77	4,401,337
		2/4	1,600	514.95	6,033,191
	15	1/2	1,600	306.14	2,231,388
		1.5/3	1,600	451.37	3,077,424
		2/4	1,600	534.59	4,825,352
50	20	1/2	1,600	254.95	816,789
		1.5/3	1,600	298.88	1,919,707
		2/4	1,600	385.92	2,322,048
	15	1/2	1,600	237.22	541,103
		1.5/3	1,600	263.55	1,598,493
		2/4	1,600	309.76	2,639,115
	10	1/2	1,600	209.51	592,049
		1.5/3	1,600	260.00	1,283,860
		2/4	1,600	323.18	1,783,987

1) 본 연구 결과에 대한 斷面積과 斷面 2次 모멘트의 相關關係를 數式과 그림으로 나타내면 그림 5-2~5-4와 같고 각 境遇에 대한 關係式은 다음과 같다.

$$A = 0.3038 I^{1/2} \text{ (水平補强材가 없는 境遇)} \quad (5-4)$$

$$A = 0.2543 I^{1/2} \text{ (水平補强材 1段使用)} \quad (5-5)$$

$$A = 0.2374 I^{1/2} \text{ (水平補强材 2段使用)} \quad (5-6)$$

$$A = 0.2627 I^{1/2} \text{ (全體에 對한 關係)} \quad (5-7)$$

2) 본 연구의 알고리즘은 豫備設計 段階에서 示方書 規定에 適當한 斷面을 豫測檢討하는데 容易하게 이용될 수 있을 것으로 본다.

3) 表에서 보는 바와 같이 實行可能領域에 있는 初期值인 境遇 初期值의 大小에 관계없이 最適值에 收斂함을 보인다.

4) 相關關係 分析結果 水平部材가 없는 境遇를 基準으로 할 때 1단 水平補强材를 使用する 境遇 20%, 2단 水平補强材를 사용할 境遇 22% 程度 經

표 5-4. Optimum sectional areas and volumes of arches using Templeman's equations.

Span (m)	Rise (m)	Wd/Wl (t/m)	Ini. Sectn. Area(cm <sup>2</sup> )	Opti. Stctn. Area(cm <sup>2</sup> )	Opti. Volume ×1,000(cm <sup>3</sup> )
100	40	1/2	1,600	997.75	13,524.471
		1.5/3	1,600	1,291.30	17,862.025
		2/4	1,600	1,574.34	21,776.638
	30	1/2	1,600	837.13	10,254.349
		1.5/3	1,600	1,108.50	13,578.044
		2/4	1,600	1,353.90	16,584.062
	20	1/2	1,600	769.29	8,488.855
		1.5/3	1,600	1,023.08	11,289.350
		2/4	1,600	1,253.90	13,836.600
75	30	1/2	1,600	669.88	6,949.414
		1.5/3	1,600	885.57	9,187.021
		2/4	1,600	1,080.30	11,206.945
	22.5	1/2	1,600	574.60	5,278.927
		1.5/3	1,600	761.54	6,996.403
		2/4	1,600	932.92	8,570.829
	15	1/2	1,600	529.64	4,383.289
		1.5/3	1,600	705.33	5,837.316
		2/4	1,600	865.36	7,161.750
50	20	1/2	1,600	393.59	2,722.082
		1.5/3	1,600	520.92	3,602.710
		2/4	1,600	636.02	4,398.771
	15	1/2	1,600	338.48	2,073.010
		1.5/3	1,600	450.18	2,757.268
		2/4	1,600	550.07	3,372.841
	10	1/2	1,600	313.48	1,729.576
		1.5/3	1,600	418.32	2,308.007
		2/4	1,600	514.13	2,835.974

濟的임을 알 수 있다.

5) 표 5-1~5-3에서 보는 바와 같이 아치높이가 높을수록 斷面積도 커진다.

6) 표 5-5에서 Templeman, A. B.가 提案한 式의 斷面性向을 考慮하여 求한 最適斷面積과 本 研究의 結果値를 比較해 보면 本 研究의 結果値가 前者에 比해 水平補剛材가 없을 경우 全體平均 46%, 1段 水平補剛材를 사용하는 境遇 63%, 그리고 2段 水平補剛材를 사용하는 境遇 69% 程度 經濟的임을 보인다.

7) 本 알고리즘은 屈屈을 考慮하였으므로 힘모멘트와 壓縮力을 同時에 받는 構造物의 最適設計에 適用할 수 있다.

## 6. 結 論

本 研究는 I形 斷面을 갖는 2活節 아치의 斷面을 最適化 하기 위하여 目的函數를 總重量으로 하고 制約條件으로 道路橋 標準示方書 鋼橋篇에서 規定하고 있는 應力, 最少치수 및 치수의 上限界 등을

표 5-5. Comparison of optimum sectional areas.

Span (m)	Rise (m)	Wd/Wl (t/m)	Optimum Sectional Areas(cm <sup>2</sup> )			
			Non-Stiff.	One-Stiff.	Two Stiff.	Templeman
100	40	1/2	637.95	548.47	520.78	977.75
		1.5/3	857.75	987.51	780.00	1,291.30
		2/4	1,120.60	1,045.27	1,106.70	1,574.34
	30	1/2	560.55	481.68	448.76	837.13
		1.5/3	736.73	641.34	630.00	1,108.50
		2/4	913.87	842.79	840.21	1,353.90
	20	1/2	525.87	445.44	431.81	769.29
		1.5/3	704.17	605.28	582.64	1,023.08
		2/4	870.73	764.68	764.18	1,253.90
75	30	1/2	437.94	373.36	355.84	669.88
		1.5/3	622.55	622.51	474.38	885.57
		2/4	724.43	622.26	604.44	1,080.30
	22.5	1/2	385.94	339.47	344.04	574.60
		1.5/3	515.96	440.76	412.77	761.54
		2/4	628.19	543.75	514.95	932.92
	15	1/2	356.75	340.08	306.14	529.64
		1.5/3	491.31	418.10	451.37	705.36
		2/4	608.68	524.31	534.59	865.36
50	20	1/2	259.70	261.49	254.95	393.59
		1.5/3	348.97	297.97	298.88	520.92
		2/4	422.49	381.14	385.92	636.02
	15	1/2	226.04	214.39	237.22	338.48
		1.5/3	306.96	266.96	263.55	450.18
		2/4	374.78	355.08	309.76	550.07
	10	1/2	215.39	209.55	209.51	313.48
		1.5/3	288.80	259.44	260.00	418.32
		2/4	358.00	308.14	323.18	514.13

考慮하여 Newton Raphson 探查法을 導入한 SUMT 技法을 사용하여 最適化를 試行하고, Templeman, A. B.의 提案式에 의한 最適値와도 比較하였으며 研究 結果를 要約하면 다음과 같다.

1) SUMT法에 의한 最適値는 初期値가 實行領域 內에 있으면 初期値의 크기에 큰 影響을 받지 않고 잘 收斂한다.

2) 本 알고리즘은 挫屈의 影響을 考慮하므로 軸 方向力과 휨모멘트를 同時에 받는 構造의 最適設計에 利用할 수 있다.

3) 水平補強材가 없는 境遇를 基準할 때 1단 水平補強材를 使用하면 20%, 2단 水平補強材를 使用하면 22% 程度 經濟的인 設計가 됨을 알 수 있다.

4) 本 研究에 의한 最適斷面이 Templeman, A. B.가 提案한 式의 斷面 性向을 考慮한 最適斷面に 比해 水平補剛材를 使用하지 않을 境遇 平均 46%, 1段 水平補剛材를 使用하는 境遇 63%, 2段 水平補剛材를 使用하는 境遇 69% 程度 經濟的인 意味을 보인다.

5) 本 研究에서 아치의 斷面力과 斷面 2次 모멘트의 相關關係는 全體 最適斷面을 對象으로 할 때

$A=0.2627 I^{1/2}$ 이다.

6) 본 연구는 우리나라 道路橋 示方書를 基準으로 하였기 때문에 實務 設計者들에게 經濟的이며 容易한 設計 및 檢討를 하는 데 寄與할 뿐만 아니라 I 形鋼 製作時에도 參考할 수 있으리라 생각된다.

### 參 考 文 獻

1. Heyman, J. : Plastic Design of Beams and Plate or Minimum Material Consumption, *Quarterly of Applied Mechanics*, Vol. 8, No. 4, 1951, pp. 373-381.
2. Foulkes, J. : Minimum Weight Design and the Theory of Plastic Collapes, *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 10, No. 4, 1953, pp. 347-358.
3. Prager, W. : Minimum Weight Design of Portal Frame, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 82, EM 4, 1956, Paper 1073.
4. Sheu, C. Y. and Prager, W. : Recent Development in Optimal Structural Design, *Applied Mechanics Review*, Vol. 21, No. 10, 1968, pp. 985-992.
5. Ridha, R. A. and Wright, R. N. : Minimum Cost Design of Frames, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 93, No. ST 4, 1967, pp. 165-183.
6. Hadley, G. : *Nonlinear and Dynamic Programming*, Addison - Wesley, 1964, pp. 1-88.
7. Reinshmidt, K. F. : Discrete Structural Optimization, *Journal of the Structural Division*, ASCE, 1971, pp. 189-222.
8. Moses, F. : Optimum structural Design Using Linear Programming, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 90, No. ST6, 1964, pp.89-104.
9. Reinshmidt, K. F., Cornell, C. A. and Brotchie, J. F. : Iterative Design and structural Optimization, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 92, No. ST6, 1966, pp. 281-318.
10. Kavilie, D., Kowalik, J., and Moe, J., : *Structural Optimization by Means of Symposium on the Use of Computer in Structural Engineering*, Newcastle, 1966.
11. Marcal, P. V. and Gellatly, R. A. : Application of the Created Response Surface Technique to Structural Optimization, *2nd Conference on Matrix Method in Structural Mechanics*, WFAB, 1968.
12. Moses, F. and Onoda, S. : Minimum Weight Design of Structures with Application to Elastic Grillage, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 1, No. 4, 1969, pp. 361-381.
13. McCuchem, W. T. : *A General Formulation for the Optimum Design of Framed Structures*, Ph. D. Thesis, Development of Civil Engineering, University of Illinois, Urbana, Ill., 1970.
14. Gallagher, R. H. and Zienkiewicz, O. C. : *Optimum Structural Design Theory and Application*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1973.
15. Majid, K. I. : *Optimum Design of Structures*, Butter Worths, London, 1974.
16. Cho, Hyo Nam : *A Discrete Formulation of Minimum Cost Design of Framed Structures*, Ph. D. Thesis, Department of Civil Engineering, Michigan State University E, Lansing MI, 1972.
17. 邊根周 : 기둥의 挫屈을 考慮한 鋼構造物의 設計, 延世大學校 大學院, 博士學位論文, 1975.
18. 李奎遠 : 彈性理論에 依한 I形鋼 Beam의 最適設計에 關한 研究, 全北大學校 工學研究 5集, 1977.
19. 李奎遠, 黃鶴周, 邊根周 : SUMT法에 依한 鋼材 트러스의 最適設計에 關한 研究, 大韓土木學會誌 第 28 卷 4號, 1980.
20. 송재호 : 限界狀態設計法에 依한 鐵筋콘크리트 部材와 아치 構造의 斷面 最適化에 關한 研究, 延世大學校 大學院, 博士學位論文, 1984.
21. 한상훈 : 두 設計空間에 依한 아치 構造의 形狀最適化 研究, 延世大學校 大學院, 博士學位論文, 1985.
22. 李在永 : 多段階 分割 最適化 技法에 依한 트러스 構造物의 形狀 最適化에 關한 研究, 全北大學校 大學院, 博士學位論文, 1991.
23. 大久保禎二 : SUMT法による 構造物の 最適設計に 關する 研究, 土木學會 第 22 回 學術講演 概要集, pp. 81-84.
24. 山田着一, 岡田鐵三 : SUMT法による 鋼構造物の 最適設計, 土木學會 第 25 回 年次學術講演會講演集, 第一 部, pp. 165-168.
25. Carrol, C. W. : The Created Response Surface Technique for Optimizing Nonlinear Restrained System, *Operations Research*, Vol. 9, 1961, pp. 169-184.
26. Fiacco, A. V. and McCormick, G. P. : *Nonlinear Programmig-Sequential Unconstrained Minimization Techniques*, John Wiley & Sons, 1968.
27. Wang, P. C. : *Numerical and Matrix Methods Structural Mechanics*, John Wiley & Sons, Inc., 1965, pp. 27-39.
28. Brousse, P. : *Structural Optimization*, Springer Verlag Wien, New York, 1975.
29. Crawley, S. W., Dillon, R. M. and Carter, W. O. : *Steel Buildings*, 3rd Edition, John Wiley & Sons,

- Inc., pp. 133-170.
30. Templeman, A. B. : Structural Design for Minimum Cost Using the Method of the Method of Geometric Programming, *Proc. Inst., Civil Engns.*, No. 46, pp.459-472, 1970.
  31. Wu, C. H., : The Strongest Circular Arch-A Perturbation Solution, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 35, No.3, 1968, pp. 476-480.
  32. Budiansky, B., Frauenthal, J. C. and Hutchinson, J. W. : On Optimal Arches, Trans. ASCE, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 36, 1969, pp. 880-882.
  33. Tadjbakhsh, I. and Farshad, M. : On Conservatively Loaded Funicular Arches & Their Optimal Design, *Proc. IUTAM Symp. on Structural Optimization*, Warsaw, 1973, pp. 215-228.
  34. Na, T. Y. and Kurajin, G. M. : On Optimal Arch Design, *Journal of Engineering for Industry*, 1977, pp. 37-40.
  35. Lightfoot, E. and Hutchinson, G. L. : Optimum Design Considering for Arch Bridges, *Proc. Instn Civ. Engrs*, Part 2, 67, 1979, pp. 1015-1033.
  36. 建設部 : 道路橋 標準示方書, 建設部, 1983.  
(接受 : 1992. 7. 2.)