

## 衝擊荷重을 받는 構造物의 塑性모델에 따른 舉動解析

### A Plastic Analysis of Structures under the Impact Loading

安秉琦\* · 李相昊\*\*

Ahn, Byoung Ki · Lee, Sang Ho

#### Abstract

Under the intense-impulsive loading, structures are subjected to the wide range of pressures at an instantaneous time. The constitutive laws capable to describe the material behavior under the extreme pressure as well as the low pressure are necessary for the analysis of the structural behavior under the intense -impulsive loadings. In this study, two plastic models, the pressure independent Von-Mises model and the pressure dependent Drucker-Prager model, are employed for the wave propagation analysis.

Governing equations of this study are conservation equations of momentum and mass in Lagrangian coordinate system which is fixed to the material. Due to the shock-front which violates the continuity assumptions inherent in the differential equations numerical artificial viscosity is used to spread the shock front over several computational zones.

These equations are solved by Finite Difference Method with discretized time and space coordinates. The associate normality flow rule as a plastic theory is implemented to find the plastic strains.

#### 요 지

충격하중을 받는 구조물은 초고압에서 부터 저압까지 다양한 압력을 짧은 시간에 경험하게 된다. 따라서 이들 구조물을 해석하기 위해서는 실제 물체의 재료특성을 표현할 수 있는 구성 법칙(constitutive law)이 필요하게 된다. 본 연구에서는 압력 부종속모델(pressure independent model)인 Von-Mises 모델과 압력 종속모델(pressure dependent model)인 Drucker-Prager 모델을 사용하여 충격과 폭발 현상시 발생하는 응력파의 전파과정(propagation process)을 재료특성에 따라 비교 분석하였다.

응력파의 전파과정을 연구하기 위한 지배 방정식(governing equation)으로서는 물체에 종속되어 있는 라그랑지안 좌표계(lagrangian coordinate system)로 표현된 운동량과 질량보존(conservation of momentum and mass)법칙을 사용하였으며 또한 충격전면(shock front)에 연속성을 부여하기 위해 인공점성(artificial viscosity)을 운동량 보존식에 첨가하였다.

주요 방정식을 풀기 위한 수치해석법으로는 시간과 공간 좌표계로 구성된 유한차분법(finite difference method)을 사용하였으며 소성변형률을 구하기 위한 소성이론으로서는 Associated normality flow rule을 사용하였다.

\* 정회원 · 단국대학교 박사과정, 토목공학과  
\*\* 정회원 · 단국대학교 공과대학 조교수, 토목공학과

## 1. 序 論

동하중을 받는 구조물의 거동은 하중과 구조물의 동적특성에 따라 탄성영역과 소성영역으로 나누어진다. 탄성영역에서의 일반적인 해석방법은 구조물에 작용하는 하중을 파악하고 또한 구조물의 특성을 나타내는 수학적 모델의 계수들 즉, 강성, 질량 그리고 감쇠계수를 파악하여 구조물의 동적인 거동을 파악하게 된다. 소성영역에서의 일반적인 해석방법은 하중특성에 따른 구조물의 붕괴형상(failure mode)을 파악한 후 붕괴형상에 근거한 수학적 모델의 계수와 저항함수(resistance function)를 결합함으로써 구조물의 동적인 거동을 파악하게 된다.

지진이나 원폭(nuclear event)에 의한 구조물의 거동 상태는 구조물에 미치는 하중의 파장이 일반적인 구조물의 규모보다 길며 또한 하중작용시간(duration of loading)이 구조물의 고유주기(natural period)보다 길기 때문에 자유장에서의 스펙트라(free field spectra) 즉, 지반의 최대가속도, 속도 등에 의해 구조물의 거동상태를 파악할 수 있다.

그러나 충돌(impact)이나 폭발(explosive) 또는 재래식 무기(conventional weapon)의 폭발과 같이 파장과 하중작용시간이 짧은 하중이 높은 압력을 갖고 구조물의 국부에 작용할 때에는 지진이나 원폭 투하시 발생하는 하중과는 달리 하중자체에 큰 공간적 경사도(large spacial gradient)가 존재하게 된다. 따라서 하중의 크기와 형태는 구조물의 부위에 따라 다르게 되며, 또한 폭원으로 부터 전파(propagation)되어 구조물에 작용하는 하중의 크기는 전파된 매체의 특성 뿐만 아니라 구조물의 변형에 의한 상관관계에 의해 결정이 됨으로 정확한 하중을 파악하기가 힘들게 된다. 그리고 국부적인 동하중을 받는 연속체(continous system)의 붕괴형상은 구조물과 하중의 기하학적 형상 및 재료적 특성에 의해 결정이 됨으로 상기 언급한 일반적인 해석방법은 파장과 하중작용시간이 짧은 하중을 받는 구조물의 거동해석에서는 많은 오차를 유발하게 된다.

충돌이나 폭발로 인한 충격하중을 받는 구조물의 해석을 위해서는 보존법칙(conservation Laws), 초기와 경계조건(initial and boundary condition) 그리고 물체의 재료적 특성을 나타내는 구성 법칙(constitutive laws)이 필요하게 된다. 본 연구에서는

지배 방정식(governing equation)으로서 물체에 종속되어 있는 라그랑지안 좌표계(lagrangian coordinate system)로 표현된 운동량과 질량보존(conservation of momentum and mass)법칙을 사용하며 이들 방정식은 시간과 공간 좌표계로 구성된 유한차분법(finite difference method)을 사용한 수치해석법으로 풀게 된다.

충격하중을 받는 물체는 초고압에서 부터 저압까지 다양한 압력을 짧은 시간에 경험하게 된다. 따라서 이들 광범위한 범위의 압력하에서 실제 물체가 보이는 재료특성을 나타낼 수 있는 구성 법칙(constitutive laws)이 필요하게 된다. 본 연구에 사용된 구성 법칙으로서는 압력 부종속모델(pressure independent model)인 Von-Mises 모델과 압력 종속모델(pressure dependent model)인 Drucker-Prager 모델을 사용하여 충격과 폭발현상시 발생하는 응력과 전파과정(propagation process)을 재료특성에 따라 비교 분석한다.

충돌이나 폭발로 인해 발생되는 충격전면(shock front)은 보존방정식을 유도할 때 가정된 연속성(continuity)에 위배되어 수치해석에 많은 어려움을 주게 된다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 인공점성(artificial viscosity)을 운동량 보존식에 첨가하여 충격전면(shock front)에 연속성을 부여한다. 인공점성을 첨가해 구한 결과는 충격전면에서는 오차를 갖게 되지만 유한차분요소의 수를 증가시킴으로써 즉, 충격전면이 차지하는 부분을 좁힘으로써 충격전면을 제외한 평형상태에 도달한 부분에서는 정확한 값을 갖게 할 수 있다.

## 2. 지배 방정식(Governing Equations)

Updated lagrangian 좌표계로 표현된 운동량 보존방정식은 아래와 같다.

$$-\rho \dot{V}_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + (d-1) \frac{\sigma_x - \sigma_y}{x} \quad (1)$$

여기서  $\rho$ 는 재료의 밀도,  $V_x$ 는 수평방향의 속도,  $\sigma_x$ 와  $\sigma_y$ 는 서로 직교(orthogonal)한 방향의 응력성분이다. 그리고  $d$ 가 1인 경우는 일차원 평면요소를 의미하며 2는 cylindrical요소, 3은 구형요소일 경우를 나타낸다. 점( $\cdot$ )은 시간에 대한 도함수를 의미하며  $x$ 는

Updated lagrangian 좌표이다.

Updated lagrangian 좌표계로 표현된 운동량 보존방정식을 초기상태의 좌표계인 Fixed lagrangian 좌표계의 항으로 표현하기 위한 절차는 다음과 같다. 현재의 위치가  $x$ 인 재료요소의 초기 좌표를  $X$ 로, 그리고 초기밀도가  $\rho_0$ 로 주어지면 질량 보존방정식은 아래와 같이 표현된다.

$$\rho_0 X^{d-1} dX = \rho x^{d-1} dx \quad (2)$$

그리고 Fixed Lagrangian 좌표계의 서로 직교한 방향의 응력성분을  $\sigma_x$ 와  $\sigma_y$ 로 표기하면 서로 다른 두 좌표계로 표현된 재료요소에 작용하는 외력은 동일함으로 각 방향의 힘을 등치시키면 아래와 같다.

$$\sigma_x X^{d-1} = \sigma_x x^{d-1} \quad (3)$$

$$\sigma_y dX^{d-1} = \sigma_y dx^{d-1} \quad (4)$$

또한 식(1)은 아래와 같이 쓸 수 있으므로

$$-\rho x^{d-1} dx \dot{V}_x = d(x^{d-1} \sigma_x) - \sigma_y d(x^{d-1}) \quad (5)$$

질량 보존방정식 (2)와 그리고 식(3)과 식(4)를 식(5)에 대입하면 질량 보존법칙을 자동적으로 만족시키는 Fixed lagrangian 좌표계에서의 운동량 보존법칙식은 다음과 같게 된다.

$$-\rho_0 \dot{V} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial X} + (d-1) \frac{\sigma_x - \sigma_y}{X} \quad (6)$$

충돌이나 폭발로 인해 발생하는 충격전면(shock front)은 보존방정식 유도시 가정된 연속성(continuity)에 위배되어 수치해석시 많은 어려움을 주게 된다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 본 연구에서는 인공적인 점성(artificial viscosity)을 운동량 보존식에 첨가하여 충격전면에 연속성을 부여한다. 인공점성 응력  $q$ 를 포함시킨 운동량 보존법칙식은 다음과 같다.

$$-\rho_0 \dot{V} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial X} + (d-1) \frac{\sigma_x - \sigma_y}{X} + \frac{\partial q}{\partial X} \quad (7)$$

여기서

$$q = \rho_0 A^2 (\Delta X)^2 \left| \frac{\partial V}{\partial X} \right|^2; \text{ 압축} \quad (8)$$

$$q=0; \text{ 인장} \quad (9)$$

또한  $A$ 는 무차원 상수이며,  $\Delta X$ 는 유한차분요소의 길이이다.

서로 직교한 방향의 변형을 시간변화율은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{\epsilon}_x = -\frac{\partial V}{\partial X} \quad (10)$$

$$\dot{\epsilon}_y = -\frac{V}{X} \quad (11)$$

### 3. 소성모델

#### 3.1 개요

소성영역에서는 동일한 재료로 이루어진 동일한 응력하에 있는 구조물이 변형률의 응력이력종속(stress-history-dependent)현상 때문에 서로 다른 변형률을 가질 수 있다. 따라서 소성영역에서는 모든 방정식을 증분형태(incremental form)로 사용하는 것이 유리하다.

총변형을 증분은 탄성과 소성변형률 증분의 합으로 가정된다.

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (12)$$

여기서  $d\epsilon_{ij}$ 는 총변형을 증분이고  $d\epsilon_{ij}^e$ 는 탄성성분  $d\epsilon_{ij}^p$ 는 소성성분의 변형률 증분이다.

또한 총변형률 증분은 deviator 변형률증분과 체적변형률 증분의 조합으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij} + d\epsilon_v = d\epsilon_{ij} + d\epsilon_{kk}/3 \quad (13)$$

deviator 변형률 증분과 체적변형률 증분도 총변형률 증분과 마찬가지로 탄성과 소성변형률 증분의 합으로 가정된다.

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (14)$$

$$d\epsilon_v = d\epsilon_v^e + d\epsilon_v^p \quad (15)$$

소성변형률 증분은 아래와 같이 소성 potential 함수(plastic potential function)와 직교성을 가지는 normality flow 법칙에 의해 정의된다.

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (16)$$

여기서  $d\epsilon_{ij}^p$ 는 전체 변형률 증분의 소성성분이고,  $g$ 는 소성 potential 함수이다. 그리고  $d$ 는 비례상수이며  $\sigma_{ij}$ 는 응력성분이다. 항복함수(yield function)와 소성 potential 함수가 같을 때 소성변형률 증분은 항복함수와 직교성을 갖게 되며, 식(16)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (17)$$

여기서  $f$ 는 항복함수이다. 따라서 식(17)의 소성변형률 증분은 응력성분으로 표현된 공간좌표상의 항복표면에 수직인 방향으로 발생한다. 또한 항복함수와 소성 potential 함수가 같기 때문에 식(17)을 Associated normality flow rule이라고 한다.

응력증분도 변형률증분과 마찬가지로 deviator 응력증분과 압력증분으로 나누어 진다.

$$d\sigma_{ij} = dS_{ij} - dP = dS_{ij} - d\sigma_{33}/3 \quad (18)$$

여기서  $dS_{ij}$ 는 deviator 응력증분 이고  $dP$ 는 압력(Pressure)증분이다.

그러나 응력은 탄성변형률에 의해서만 결정되며 Hook의 법칙으로 부터 응력증분은 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$d\sigma_{ij} = 2\mu d\epsilon_{ij}^e + [K - \frac{2}{3}\mu] d\epsilon_{ij}^e \delta_{ij} \quad (19)$$

여기서  $\mu$ 는 전단계수이고  $K$ 는 체적계수, 그리고  $\delta_{ij}$ 는 Kronecker Delta이다. 따라서 deviator 응력증분과 압력증분은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$dS_{ij} = 2\mu d\epsilon_{ij}^e \quad (20)$$

$$dP = (d\sigma_{11} + d\sigma_{22} + d\sigma_{33})/3 = 3Kd\epsilon_{kk}^e \quad (21)$$

### 3.2 Von-Mises Model

금속재료의 대략적인 일축인장 실험은 항복점까지는 응력-변형률 선도가 선형으로 변화하나 항복점 이후에는 변형률은 증가하지만 응력은 일정하게 나타난다. 이러한 현상은 deviatoric 응력텐서의 두번째 invariant가 일정한 값에 도달할 때 항복이 발생한

다는 것으로 설명할 수 있다. 이것을 수학적으로 표현한 Von-Mises모델의 항복함수는 다음과 같다.

$$f(\sigma_{ij}) = J_{2D} - k^2 = 0 \quad (22)$$

여기서  $f(\sigma_{ij})$ 는 항복함수이고  $J_{2D}$ 는 다음과 같이 정의되는 deviatoric 응력텐서의 두번째 invariant이다.

$$J_{2D} = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \quad (23)$$

일축인장 실험에서의 항복응력  $Y_0$ 를 사용하여 식(22)의 항복함수를 표시하면 아래와 같다.

$$f(\sigma_{ij}) = J_{2D} - \frac{2}{3} Y_0^2 = 0 \quad (24)$$

여기서  $Y_0$ 는 일축인장 실험에서의 항복응력이다. 따라서 deviatoric 응력텐서의 두번째 invariant  $J_{2D}$ 가  $2Y_0^2/3$  보다 작으면 탄성상태하에 있으며 소성상태하에서는  $2Y_0^2/3$ 과 동일한 값을 갖게 된다.

소성상태하의 변형률은 탄성과 소성변형률로 이루어져 있다(식(12)). 그러나 응력은 탄성변형률에 의해서만 결정된다(식(19),(20),(21)). 따라서 소성변형이 발생했을 때의 응력을 구하기 위해서는 탄성변형률을 구하여야 하며 탄성변형률은 전체변형률에서 소성변형률을 빼주어 구할 수 있다.

소성변형률 증분은 소성체적 변형률 증분과 소성 deviator 변형률 증분으로 이루어져 있으며(식(14), (15)) 이들 증분은 Associated normality flow rule (식(17))을 적용시키면 Von-Mises 모델의 소성 체적변형률 증분과 소성 deviator 변형률 증분을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$d\epsilon_v^p = 0 \quad (25)$$

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \left[ \frac{S_{ij}}{2(J_{2D})^{1/2}} - \frac{\partial f}{\partial (J_{2D})^{1/2}} \right] \quad (26)$$

따라서 압력과 deviatoric 응력 증분은 아래와 같이 구할 수 있다.

$$dP = Kd\epsilon_v$$

$$dS_{ij} = 2Gd\epsilon_{ij}^p - d\lambda \left[ \frac{G}{(J_{2D})^{1/2}} - \frac{\partial f}{\partial (J_{2D})^{1/2}} \right] S_{ij} \quad (27)$$

Von-Mises 모델에서 변형률과 응력의 관계를 평

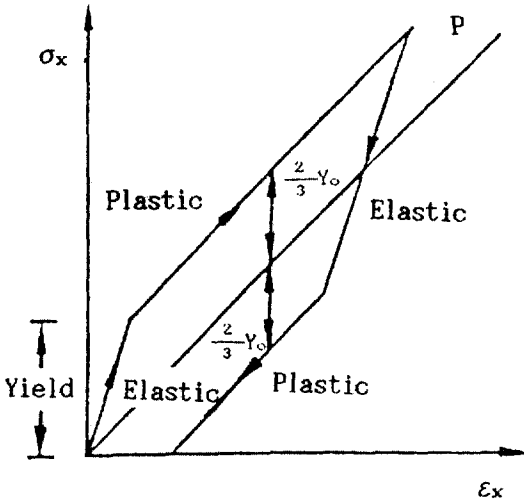


그림 1. Von-Mises 모델의 응력과 변형을 관계 (plane geometry( $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$ ))

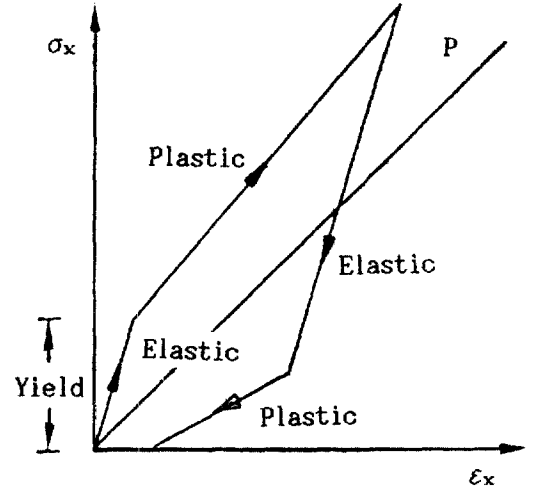


그림 2. Drucker-Prager 모델의 응력과 변형을 관계 (plane geometry( $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$ ))

면적(plane geometry,  $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$ )으로 살펴보면 다음과 같다. 하중이 가해지면 탄성적으로 응력이 증가하나(elastic loading)  $J_{2D}$ 가  $2Y_0^{2/3}$ 에 달하면 항복 표면을 따라 소성적으로 증가(plastic loading)한다. 이는  $J_{2D}$ 가 항복함수에 의해 일정한 값 이상을 갖을 수 없기 때문이다. 하중이 제거되면 처음에는 항복 표면내에서 응력상태가 이동하게 됨으로 탄성적으로 응력이 감소하나(elastic unloading), 나중에는 소성 loading과 마찬가지로 일정한 값 이상의  $J_{2D}$ 값을 갖을 수 없으므로 하중이 가해질 때의 반대방향 항복 표면을 따라 소성적으로 응력이 감소(plastic unloading)한다. 이를 그림 1에 도시하였으며 소성 loading과 소성 unloading은 압력축과 일정한 간격을 유지하며 평행하게 거동하는 것을 알 수 있다.

### 3.3 Drucker Prager Model

삼축압축 시험에 의한 소성영역에서의 압반이나 흙의 응력-변형을 선도는 압력이 증가함에 따라 일정한 기울기를 가지고 증가하는 현상을 보인다. 이러한 현상은 압반이나 흙의 항복이 deviatoric 응력 텐서의 두 번째 invariant 뿐만 아니라 응력 텐서의 첫 번째 invariant 즉 압력에 의해 영향받는 것으로 볼 수 있다. 이것을 수학적으로 표현한 Drucker-Prager 모델의 항복함수는 다음과 같다.

$$f(\sigma_{ij}) = \sqrt{J_{2D}} + \alpha I_1 - k = 0 \quad (28)$$

여기서  $\alpha$ 와  $k$ 는 재료상수이며,  $I_1$ 은 응력텐서의 첫 번째 invariant, 그리고  $J_{2D}$ 는 Von-Mises 모델에서의 표현과 같다.

Associated normality flow rule을 사용하여 Drucker-Prager 모델의 소성체적 변형을 증분과 소성 deviator 변형을 증분을 구하면 다음과 같다.

$$d\epsilon_v^p = 3\alpha d\lambda \quad (29)$$

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \left[ \frac{S_{ij}}{2(J_{2D})^{1/2}} + \alpha \delta_{ij} \right] \quad (30)$$

식(14), (15), (29), (30)을 사용하여 Drucker-Prager 모델의 탄성변형을 증분을 구할 수 있으며 압력과 deviatoric 응력 증분은 Hook의 법칙(식(19),(20), (21))을 사용하여 아래와 같이 구할 수 있다.

$$dP = K d\epsilon_{kk}^e \delta_{ij} \quad (31)$$

$$dS_{ij} = 2G d\epsilon_{ij}^e - d\lambda \left[ \frac{G}{(J_{2D})^{1/2}} S_{ij} + 3K\alpha \delta_{ij} \right] \quad (32)$$

Drucker-Prager 모델의 평면적( $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$ )인 응력 거동 상태를 그림 2에서 살펴보면 Von-Mises 모델과는 달리 소성부분의 응력이 압력축과 경사지게 거동한다. 또한 탄성부분은 loading과 unloading시에

동일한 기울기를 갖고 거동하나 소성부분에서는 서로 다른 기울기를 갖고 거동하는 것을 볼 수 있으며 탄성 unloading의 크기가 탄성 loading의 크기에 비해 현저히 크게 나타난다. 이는 Drucker - Prager 모델의 항복현상이 압력 즉 응력텐서의 첫번째 invariant에 의해 영향을 받기 때문이다.

#### 4. 수치해석

충돌이나 폭발로 인한 충격하중을 받는 구조물을 해석하기 위해서는 보존법칙(conservation Laws), 초기와 경계조건(initial and boundary condition) 그리고 물체의 재료적 특성을 나타내는 구성 법칙(constitutive laws)이 필요하게 된다.

유한차분법은 이러한 방정식을 discretize된 시간과 공간좌표계로 변환시켜 해를 구하는 수치해석법이며 아래 그림은 시간  $t=n$ 일 때의 공간좌표계를 index  $i$ 를 사용하여 표현한 그림이다.

Straight forward centered difference를 사용해 인공점성을 포함한 운동량 보존법칙(식 (7))은 아래와 같이 쓸 수 있으며

$$\rho_0 \frac{V_i^{n+1/2} - V_i^{n-1/2}}{\Delta t} = - \frac{(\sigma_1)_{i-1/2}^n - (\sigma_1)_{i+1/2}^n}{\Delta X} - \frac{q_{i+1/2}^{n-1/2} - q_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta X} \quad (33)$$

상기식에서 구한 각 절점의 속도로 부터 변형률 시간변화율은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$(\dot{\epsilon}_x)_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{V_i^{n+1/2} - V_{i+1}^{n+1/2}}{\Delta X} \quad (34)$$

따라서 변형률과 응력은 다음식으로 계산된다.

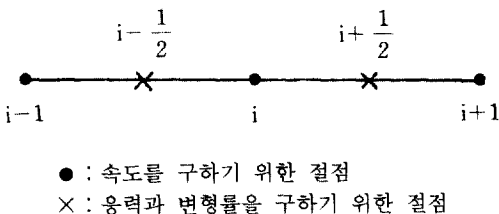


그림 3. 유한차분 요소

$$X_{i+1/2}^{n+1/2} = X_{i+1/2}^n + \dot{X}_{i+1/2}^{n+1/2} \Delta t \quad (35)$$

Von-Mises 모델과 Drucker-Prager 모델의 Associated normality flow rule을 수행하기 위한 알고리즘은 다음과 같다.

그림 4에서 나타난 곡선은 항복표면  $G(X_1, X_2)$ 를 나타내며 항복표면 바깥쪽의 응력상태  $(X_1^e, X_2^e)$ 는 식(35)에 의해 구해진 응력상태를 나타낸다. 소성변형이 발생하였을 때의 응력상태는 항복표면을 벗어날 수 없으므로 응력상태  $(X_1^e, X_2^e)$ 는 소성변형을 고려하지 않은 응력상태이다.

항복표면상의 임의의 응력상태를  $(X_1, X_2)$ 라 할 때 Associated normality flow rule을 만족시키기 위해서는 항복표면상의 응력상태  $(X_1, X_2)$ 와 항복표면 밖의 응력상태  $(X_1^e, X_2^e)$ 가 이루는 거리가 최소가 되어야만 한다.

두 점사이의 거리는 아래식과 같이 표현할 수 있으며,

$$F = d^2 = (X_1 - X_1^e)^2 + (X_2 - X_2^e)^2 \quad (36)$$

두 점 사이의 거리가 최소가 되기 위해서는  $\nabla G(X_1, X_2)$ 가 항복표면 밖의 응력상태  $(X_1^e, X_2^e)$ 를 지나야만 하므로 Associated normality flow rule을 만족시키는 항복표면 상의 응력상태  $(X_1, X_2)$ 는 두 점 사이의 최소거리를 구하기 위한 필요조건인 F와 G에 비해

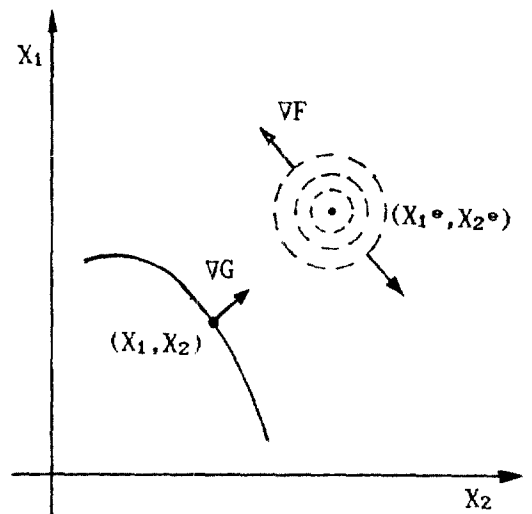


그림 4. Lagrange Multiplier Method

상수를 곱하여 등치시킨 Lagrange multiplier method로 구할 수 있다.

$$\frac{\partial F}{\partial X_1} - \phi \frac{\partial G}{\partial X_2} = 0 \quad (37)$$

$$\frac{\partial F}{\partial X_2} - \phi \frac{\partial G}{\partial X_1} = 0 \quad (38)$$

여기서  $\phi$ 는 비례상수이다.

상수  $\phi$ 를 없애주기 위하여 식(37)에  $\partial G/\partial X_2$ 를 곱하고 식(38)에  $\partial G/\partial X_1$ 을 곱하여 빼주면 다음과 같이 된다.

$$f = \frac{\partial F}{\partial X_1} \frac{\partial G}{\partial X_2} - \frac{\partial F}{\partial X_2} \frac{\partial G}{\partial X_1} = 0 \quad (39)$$

위의 식을 일차원 평면요소의 Von-Mises 모델에 적용시키면 항복표면  $G$ 와 거리  $F$ 는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$G = \frac{1}{(3)^{1/2}} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (40)$$

$$F = d^2 = (\sigma_1 - X)^2 + (\sigma_2 - Y)^2 \quad (41)$$

여기서  $\sigma_1, \sigma_2$ 는 Associated normality flow rule을 만족시키는 항복표면 상의 응력상태이며  $X, Y$ 는 식(35)에 의해 구해진 응력상태를 나타낸다.

식(40)과 식(41)을 식(39)에 대입하여 연립하여 풀면 Associated normality flow rule을 만족시키는 항복표면상의 응력은 다음과 같다.

$$\sigma_1 = \frac{X + 2Y + 2\sqrt{3} B}{3} \quad (42)$$

$$\sigma_2 = \frac{X + 2Y - \sqrt{3} B}{3} \quad (43)$$

여기서

$$B = Y_0 \sqrt{3}$$

Drucker-Prager 모델에서도 Von-Mises 모델과 같이 Lagrange multiplier method를 적용시키면, Associated normality flow rule을 만족시키는 항복 표면상의 응력값들은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\sigma_1 = \frac{2\xi X + 4\tau Y + 4B\tau/\xi}{2\xi + 4\tau^2/\xi} \quad (44)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 \tau - B}{\xi} \quad (45)$$

여기서

$$B = (1/\sqrt{3} + \alpha) Y_0$$

$$\xi = (1/\sqrt{3} + 2\alpha)$$

$$\tau = (1/\sqrt{3} - \alpha)$$

## 5. 적용 예

충격현상을 해석할 수 있는 일차원 요소로 이루어진 일차원 프로그램을 개발하여 충격현상을 수치적으로 재현하였다.

수치적 모델로는 일차원 평면요소를 사용하였으며 (그림 5), 물체의 탄성계수는 4320000 Kips/ft<sup>2</sup>이고, 초기밀도  $\rho_0$ 는 0.49 Kips/ft<sup>3</sup>이다. 그리고 단순인장일 경우의 항복응력  $Y_0$ 는 5184 Kips/ft<sup>2</sup>이고 Drucker-Prager 모델의 항복함수 표현에서 응력텐서의 첫 번째 invariant  $I_1$ 의 계수인 마찰계수 값은 0.03을 사용하였다. 충격을 가하는 물체의 속도는 저속일 때 50ft/sec로 하였고 고속일 경우는 300ft/sec로 하였다. 충격을 가하는 물체와 받는 물체의 길이는 각각 2ft, 18ft로 하였으며, 그림 5에 묘사된 충격현상을 해석하기 위한 유한차분법(finite difference method)의 절점수는 200개를 사용하였다.

그림 6은 충격을 가하는 물체가 저속으로 목표판을 타격했을 때의 Von-Mises 모델에 대한 응력파의 전파과정을 보여주고 있다. 그림 6(a)는 타격 후 0.4397 msec 때의 응력파의 파형을 보여주고 있으며 접촉면을 중심으로 대칭성을 갖고 압축응력파가 양방향으로 전파되는 것을 볼 수 있다. 그림 6(b)에서는 충격을 가하는 물체에서 발생된 압축응

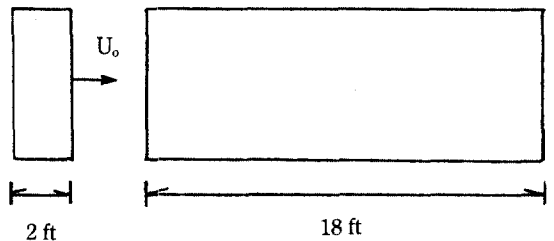
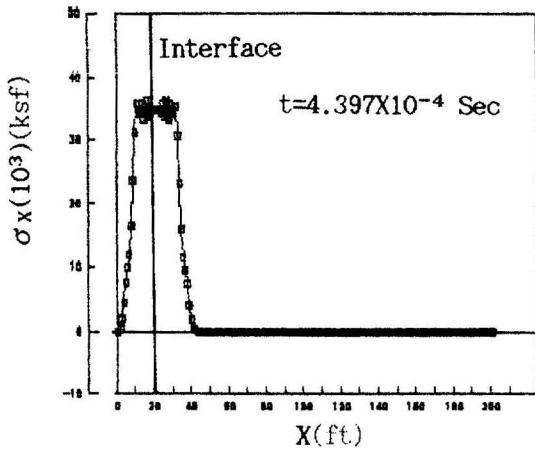
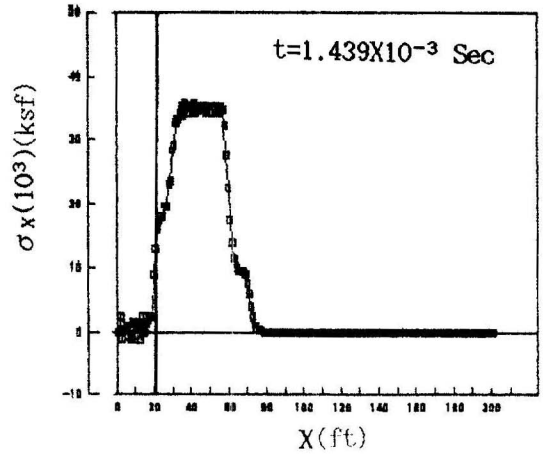


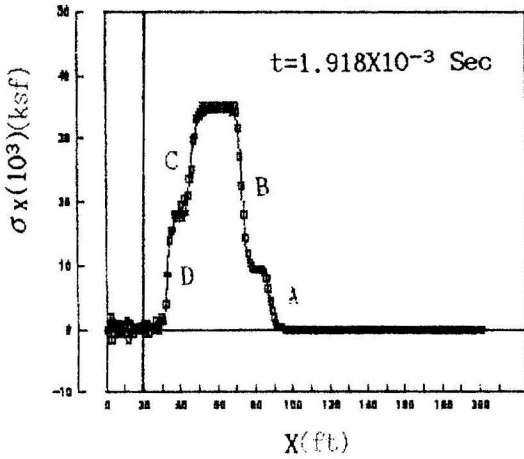
그림 5. 충돌현상 모델



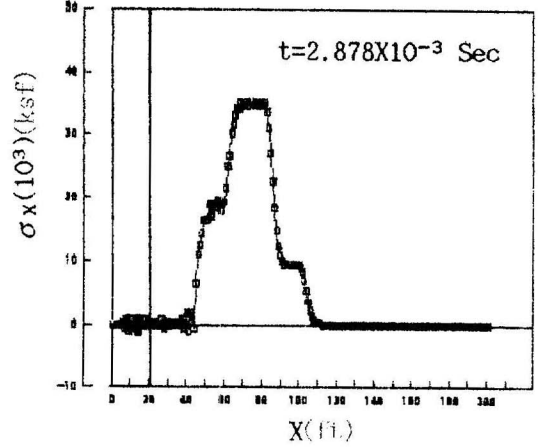
(a)



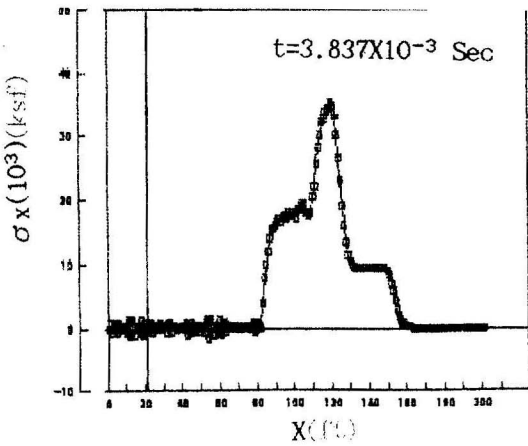
(b)



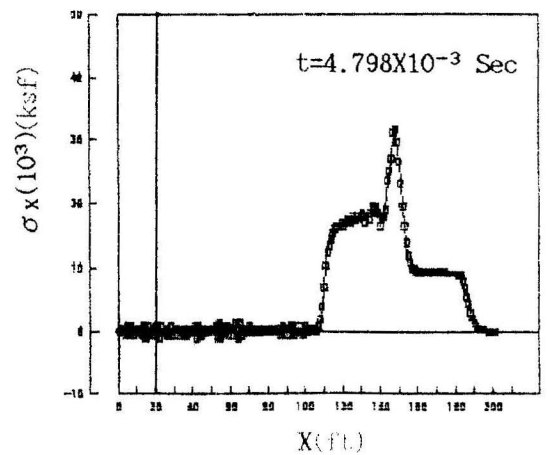
(c)



(d)



(e)



(f)

그림 6. 저속일 때의 Von-Mises 모델에 대한 결과



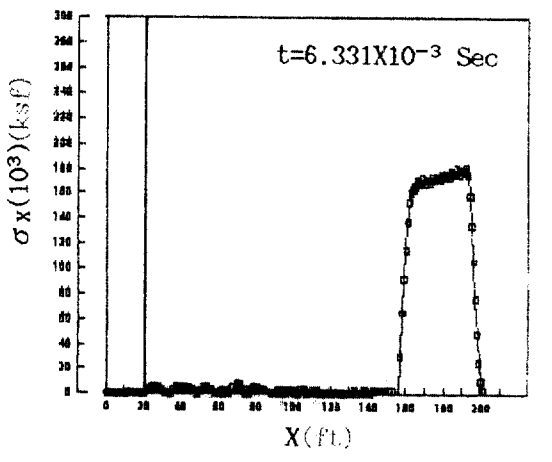
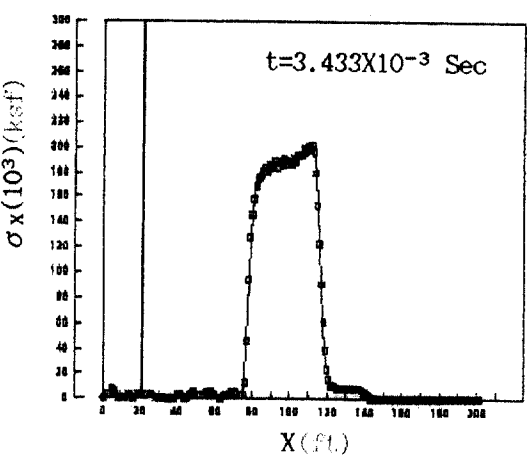
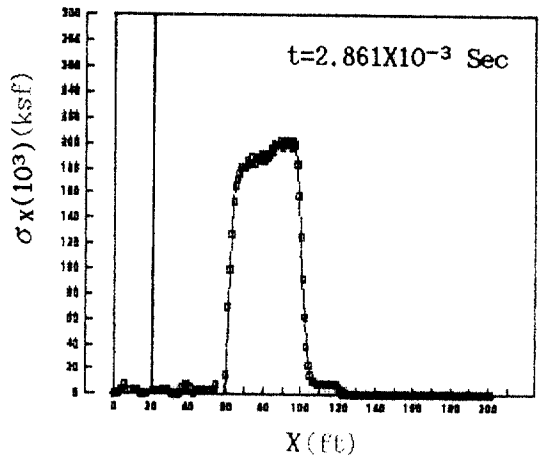
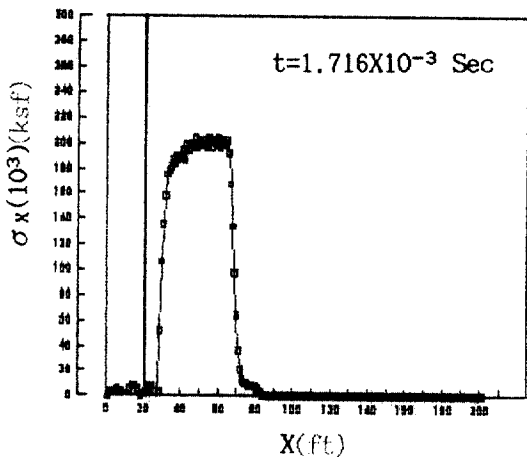
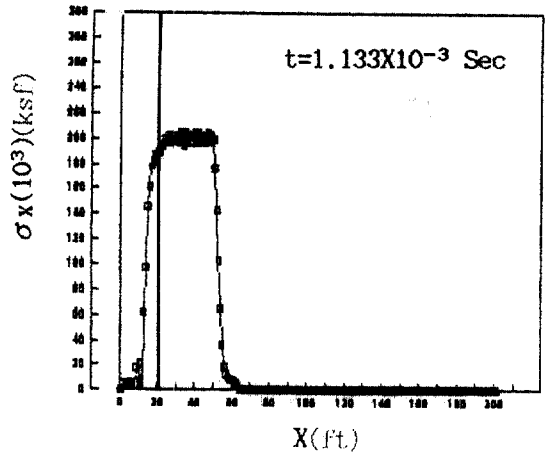
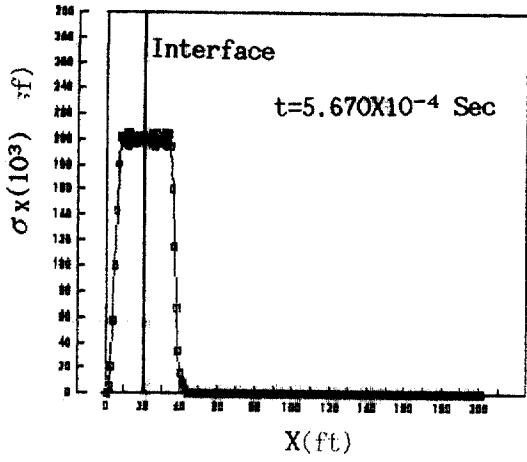


그림 7. 고속일 때의 Von-Mises 모델에 대한 결과

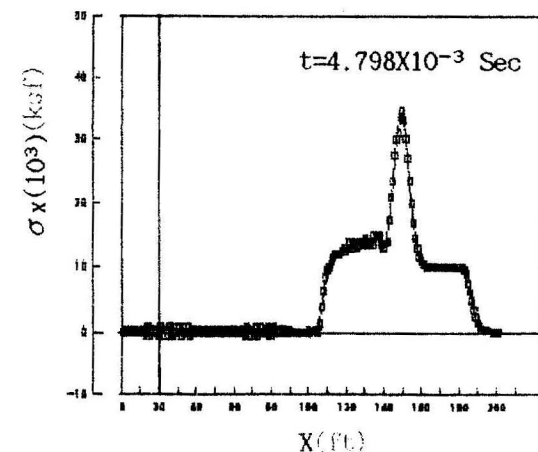
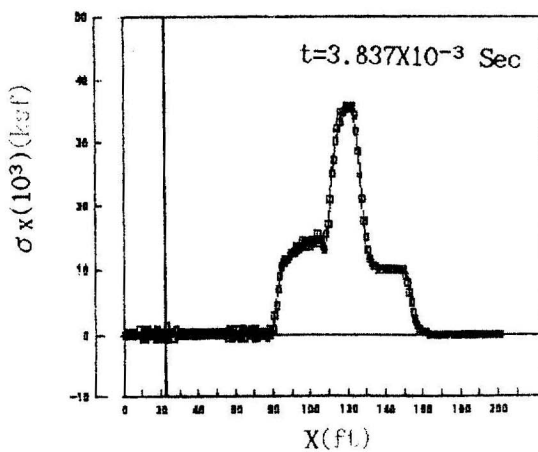
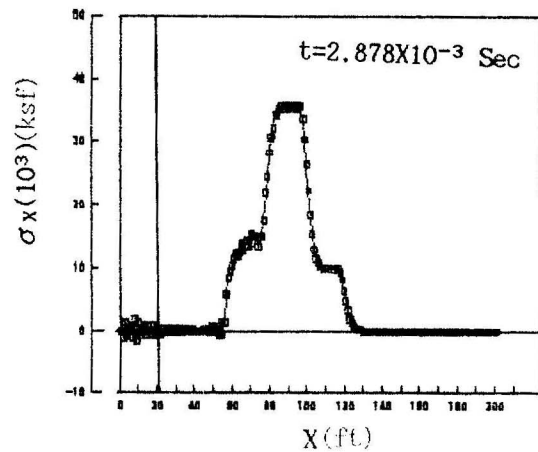
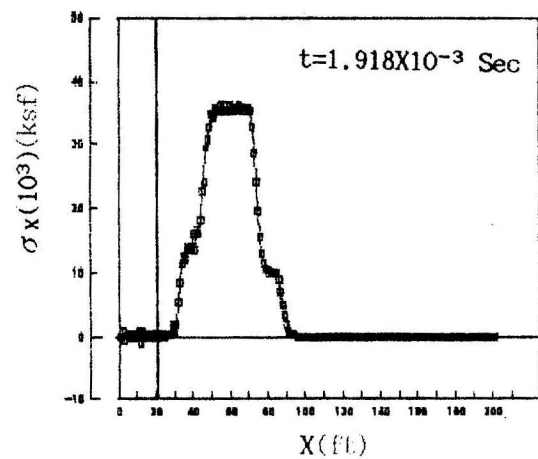
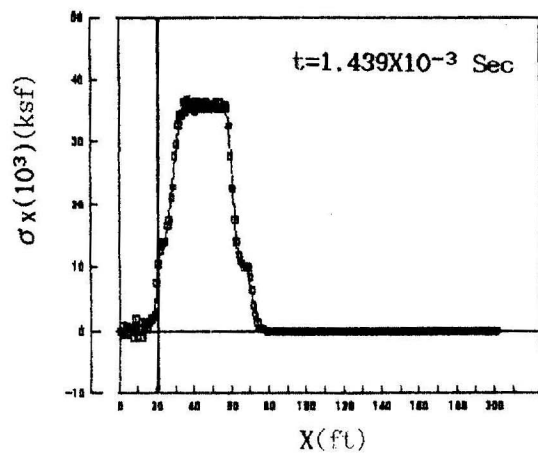
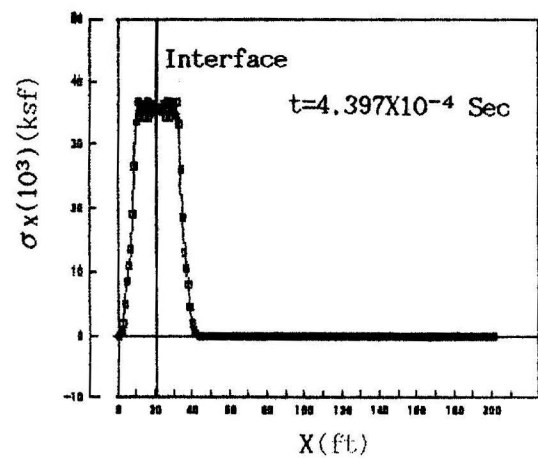


그림 8. 저속일 때의 Drucker-Prager 모델에 대한 결과

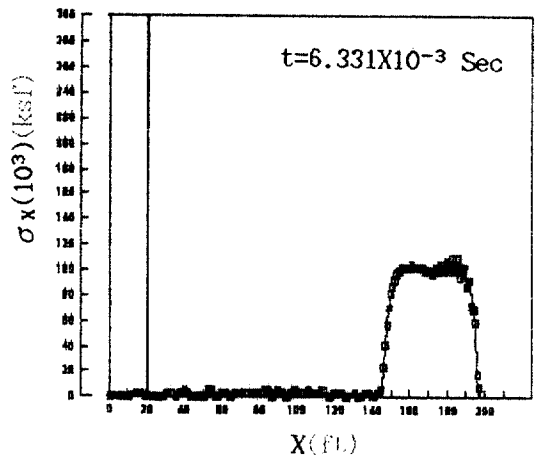
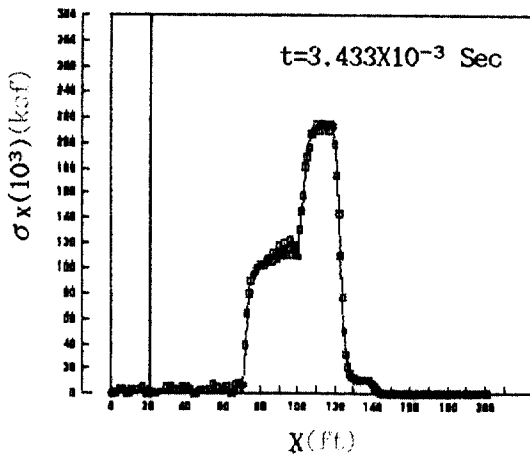
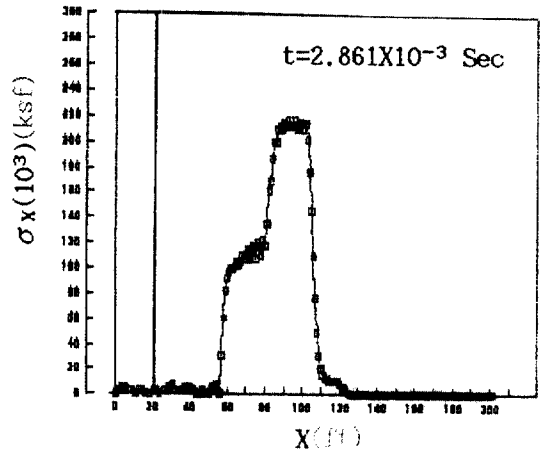
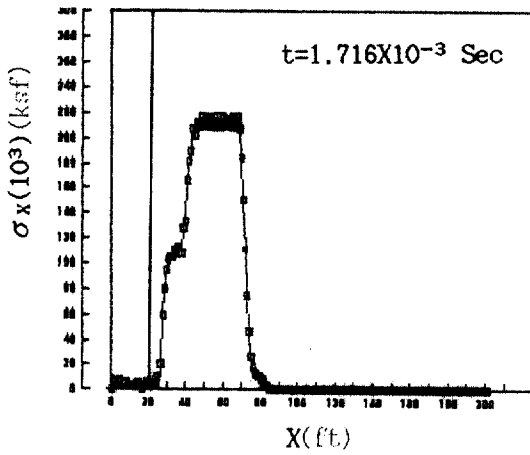
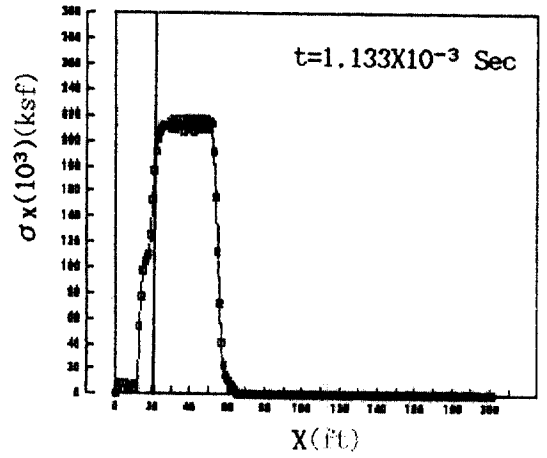
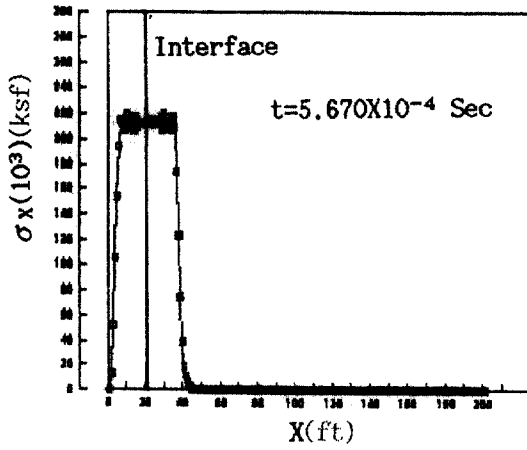


그림 9. 고속일 때의 Drucker-Prager 모델에 대한 결과

력이 자유면에서 반사된 후 인장응력으로 바뀌면서 압축응력과 상쇄되어 충격을 가하는 물체의 말단에는 미소한 응력만이 발생하는 것을 보여준다. 또한 이러한 상쇄작용으로 일정한 파장을 갖게된 응력파가 충격을 받는 물체쪽으로 진행되는 과정을 보인다. 이 파는 어느정도 진행되다 그림 6(c)에서와 같이 탄성 loading(A), 소성 loading(B), 탄성 unloading (C) 그리고 소성 unloading(D) 과정을 뚜렷하게 보여준다. 이러한 현상은 탄성파속이 소성파속보다 빠르기 때문에 일어나는 현상이다. 그림 6(e)에서는 소성 loading 파속보다 탄성 unloading 파속이 빠르기 때문에 탄성 unloading 파가 충격 전면을 따라 잡아 응력파의 파장이 좁아지는 경향을 보인다. 이러한 현상은 그림 6(f)에서와 같이 응력파의 파장을 더 좁아지게하며, 탄성 unloading 파가 충격전면을 완전히 따라 잡을 때에는 충격전면의 압축응력의 진폭은 크기가 감소된다. 이러한 충격전면의 응력 감소 현상은 소성변형이 발생되어 응력파의 에너지가 소모되었기 때문이며 응력이 탄성한계로 감소할 때까지 계속될 것이다.

그림 7은 충격을 가하는 물체의 속도가 매우 높을 때의 결과이다. 이것은 저속일 때(그림 6)와 비교하여 탄성 loading과 탄성 unloading 현상이 미소하게 나타나 충격전면의 압축응력은 소성 loading에 의해 그리고 unloading 과정은 소성 unloading에 의해 지배되고 있음을 보여준다.

그림 8은 충격을 가하는 물체의 속도가 저속일 때의 Drucker-Prager 모델에 대한 응력파의 전파 과정을 보여주며 Von-Mises 모델에서와 마찬가지로 탄성 loading, 소성 loading, 탄성 unloading, 소성 unloading 과정을 갖는 파형을 보여준다. 또한 응력파가 진행함에 따라 탄성 unloading 파가 소성 loading 파를 따라 잡는 현상을 볼 수 있다.

그림 9에서는 충격을 가하는 물체의 속도가 고속일 때 Drucker-Prager 모델에 대한 응력파의 전파 과정을 보여준다. 고속으로 충격을 가했을 때의 Drucker-Prager 모델과 Von-Mises 모델(그림 7)에서 발생된 응력파를 비교할 때 Drucker-Prager 모델에서는 탄성 unloading 현상이 현격히 크게 나타나는 것을 보여주며 또한 소성 unloading 파의 속도가 소성 loading 파의 속도보다 느리기 때문에 파의 파장이 길어짐을 알 수 있다.

따라서 Drucker-Prager 모델에서 발생한 응력파는 파가 진행함에 따라 응력파의 진폭은 Von-Mises 모델보다는 작게 나타나는 반면 파의 파장은 더 길어짐을 알 수 있다. 이러한 현상은 응력파의 에너지가 deviator 소성변형( $e_{ij}^p$ )뿐 아니라 체적 소성변형( $e_v^p$ )의 발생에 의하여 Von-Mises 모델보다 더 많이 소모되었기 때문이며 흙이나 암반같은 재료에서 충격하중을 가했을 때 나타나는 특성과 유사하다.

## 6. 결 론

일반적인 동역학적 해석방법은 파장과 하중 작용 시간이 짧은 하중이 높은 압력을 갖고 구조물의 국부에 작용할 때에는 하중의 큰 공간적 경사도(large spacial gradient) 및 구조물의 변형과 하중의 상관관계가 무시되며 또한 붕괴형상(failure mechanism) 파악의 어려움으로 인하여 많은 오차를 유발시킨다. 본 연구에서는 상기 언급한 항목들을 일체로 묶어 충돌현상을 수치적으로 재현하였다.

주요방정식으로는 운동량과 질량 보존법칙식을 사용하였으며 이들 식은 유한차분법을 사용하여 수치적으로 적분하였다. 소성모델로서는 압력 부종속 모델인 Von-Mises 모델과 압력 종속모델인 Drucker-Prager 모델을 사용하였으며 소성변형률을 구하기 위한 소성이론은 Associated normality flow rule을 사용하였다.

Von-Mises 모델과 Drucker-Prager 모델의 충격에 의한 응력파의 전파과정을 비교하면 Drucker-Prager 모델의 압력 종속성(pressure dependent character) 때문에 첫째, Drucker-Prager 모델에서는 탄성 unloading 현상이 Von-Mises 모델보다 고속 충돌 시에는 현격히 크게 나타나며, 둘째, 소성 unloading 파속이 소성 loading 파속보다 느리기 때문에 응력파의 파장이 Von-Mises 모델보다 크게 나타난다.

따라서 Drucker-Prager 모델에서 발생된 응력파는 파가 진행함에 따라 응력파의 진폭은 Von-Mises 모델보다는 작게 나타나는 반면, 파의 파장은 더 크게 나타나는 특성을 보인다. 이러한 현상은 Drucker-Prager 모델의 압력 종속성(pressure dependent character)으로 인하여 응력파의 에너지가 deviator 소성변형( $e_{ij}^p$ )뿐 아니라 체적 소성변형( $e_v^p$ )의 발생에 의하여 소모되었기 때문이며 흙이나 암반같은 재료

에서 충격하중을 가하였을 때 발생하는 특성과 유사함을 알 수 있다.

### 참 고 문 헌

1. Wilkins, M., "Calculation of Elastic-Plastic Flow", University of California, Lawrence Livermore Radiation Laboratory, California.
2. Johnson, J. N., Schmitz, D. R., "Simulation of The Load-Unload Paths Experienced by Rock in The Vicinity of Buried Explosions", Submitted to the Headquarters of Defence Nuclear Agency, Washington D.C. 20305.
3. Tod, Bstytschko, "Computer Methods in Shock and Wave Propagation Analysis", Department of Materials Engineering University of Illinois at Chicago, Chicago, Illinois.
4. Vonneumann, J., and Ritchmyer, R.D., "A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks", Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey.
5. Cameron, I.G., "An Analysis of the Errors Caused by Using Artificial Viscosity Terms to Represent Steady-State Shock Waves", Atomic Weapons Research Establishment, Aldermaston, berkshire, England.
6. Chakrabarty, J., *Theory of Plasticity*, McGraw-Hill Book Company, 1987, pp.55 - 119.
7. Chen, W. F., and Han, D. J., *Plasticity for Structural Engineers*, Springer Verlag New York Inc., 1988. pp. 3-226.
8. Angus, E. Taylor, *Advanced Calculus* 3rd, John Wiley & Sons Inc. pp. 182-188.
9. Jonas, A. Jukas, *Impact Dynamics*, John Wiley & Sons Inc., 1982, pp.131-150.
10. Chen, W. F., *Plasticity in Reinforced Concrete*, McGraw-Hill Book Company, 1982, pp.253-274.
11. Hill, R., *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press, 1950.
12. Desai, C.S., Siriwardane, H.J., *Constitutive Laws for Engineering Materials ; with Emphasis on Geologic Materials*, Prentice-Hall, Inc., 1984, pp.204-239.  
(接受 : 1992. 2. 17)