

비선형 운동해석에 의한 낮은 아치의 동적 임계좌굴하중의 결정

Determination of the Critical Buckling Loads of Shallow Arches Using Nonlinear Analysis of Motion

김연태* · 허택녕** · 김문겸*** · 황학주****

Kim, Yun Tae · Huh, Taik Nyung · Kim, Moon Kyum · Hwang, Hak Joo

Abstract

For shallow arches with large dynamic loading, linear analysis is no longer considered as practical and accurate. In this study, a method is presented for the dynamic analysis of shallow arches in which geometric nonlinearity must be considered. A program is developed for the analysis of the nonlinear dynamic behavior and for evaluation of critical buckling loads of shallow arches. Geometric nonlinearity is modeled using Lagrangian description of the motion. The finite element analysis procedure is used to solve the dynamic equation of motion and Newmark method is adopted in the approximation of time integration. A shallow arch subject to radial step loads is analyzed. The results are compared with those from other researches to verify the developed program. The behavior of arches is analyzed using the non-dimensional time, load, and shape parameters. It is shown that geometric nonlinearity should be considered in the analysis of shallow arches and probability of buckling failure is getting higher as arches are getting shallower. It is confirmed that arches with the same shape parameter have the same deflection ratio at the same time parameter when arches are loaded with the same parametric load. In addition, it is proved that buckling of arches with the same shape parameter occurs at the same load parameter. Circular arches, which are under a single or uniform normal load, are analyzed for comparison. A parabolic arch with radial step load is also analyzed. It is verified that the developed program is applicable for those problems.

요 지

낮은 아치는 동하중 재하시 재료는 탄성범위 내에 있더라도 큰 변형이 발생할 수 있으며, 좌굴 가능성이 높기 때문에 선형해석으로는 정확한 거동을 구명하기 어렵다. 본 연구에서는 이에 따라 낮은 아치의 동적 비선형 해석방법 및 좌굴판단기준을 제시하였으며, 제시된 방법을 토대로 낮은 아치의 동적 비선형 해석을 수행하고 임계좌굴하중을 구하였다. 형상의 비선형성은 Lagrangian 운동좌표를

* 정회원 · 건설부 건설공무원 교육원, 공학박사

** 정회원 · 연세대학교 토목공학과 박사과정

*** 정회원 · 연세대학교 공과대학 토목공학과 부교수

**** 정회원 · 연세대학교 공과대학 토목공학과 교수

고려하여 해석하였으며 동적운동방정식을 풀기 위하여 유한요소법을 사용하였다. 이 때, 동적 운동방정식의 시간적분으로 Newmark 해법을 채택하였다. 프로그램은 만재 방사형 등분포하중을 받는 낮은 원호 아치를 해석하여 그 결과치를 다른 연구결과와 비교하여 검증하였다. 모형해석을 통해서 큰 동하중을 받는 원호 아치는 기하학적 비선형 거동을 고려하여 해석되어야 하며, 아치가 낮아질수록 좌굴발생 가능성이 높아짐을 알았다. 여러가지 형상의 아치에 대한 좌굴해석을 실시하여 임계 좌굴하중을 구하였으며 기존의 연구와 비교하여 정확성을 확인하였다. 원호 아치의 거동을 본 연구에서 사용한 무차원 매개변수를 이용하여 해석한 결과로부터, 동일한 형상매개변수를 가진 아치들은 실제하중을 하중매개변수로 환산하여 같은 하중매개변수를 재하했을 때 시간매개변수에 따라 처짐비를 기준으로 같은 거동을 함을 알았으며, 좌굴현상도 같은 하중매개변수에서 나타남을 확인하였다. 또한, 포물선형상의 아치와 연직하중이나 집중하중이 재하된 경우의 해석에도 개발된 프로그램이 유용하게 사용될 수 있음을 해석예를 통하여 밝혔다.

1. 서 론

아치는 구조적으로 안정되고 미관이 아름답기 때문에 오랜 옛날부터 널리 사용된 구조형식이다. 따라서, 아치의 정적해석에 관한 연구는 여러 학자에 의하여 오래 전부터 수행되어 왔다. 과거에는 단면은 크고 지간이 짧은 구조물이 대부분이고 하중이 과대하지 않았기 때문에 정적해석으로도 안전한 설계가 가능하였다. 그러나, 최근에는 재료가 고강도화되고 설계기술이 발달됨에 따라 단면은 작아지는 반면, 지간은 더욱 길어지고 대규모화하는 추세에 있으며, 또한 충격, 지진 등 예기치 않은 큰 하중을 받는 경우가 많아지게 되었다. 따라서, 동적으로 재하되는 하중에 대한 구조물의 거동을 해석하고, 대변형에 따른 비선형성을 고려함은 물론, 동하중 작용에 따른 안정성을 연구하는 것이 중요한 과제로 등장하게 되었다.

이와 같은 문제점 때문에 많은 연구가들에 의하여 각종 구조형식을 대상으로 대변형을 고려한 유한변위 해석 연구가 진행되어 왔다. 아치에 대하여도 비선형성을 고려한 동적해석 연구가 여러 방법에 따라 수행되고 있다. 특히, 최근에는 컴퓨터의 발달로 비선형, 동적해석 문제의 해결이 수월하여져 수치해석적 연구가 활발히 진행되고 있다. 본 연구는 이와 관련하여 아치의 동적 비선형거동을 유한변위 이론에 기초하여 해석하고, 선형이론에 의한 해석과 그 결과를 비교하여 대변형의 영향을 확인하고자 한다. 또한, 낮은 아치는 큰 하중을 받을 경우 좌굴에

의하여 구조물이 불안정하게 될 수가 있다. 따라서, 본 연구에서는 비선형 거동해석에 의하여 낮은 아치의 좌굴특성을 연구하도록 한다.

본 연구에서 대상으로 하고 있는 아치의 동적 해석연구로는 1952년 Bolotin⁽¹⁾이 압축과 휨을 받는 대칭아치의 동적안정문제를 연구한 것을 시초로 볼 수 있다. Fung과 Kaplan⁽²⁾은 1952년 고전적인 임계기준과 급수해를 사용하여 여러가지 하중의 조합이 작용되는 낮은 포물선, 정현 및 원호아치의 정적임계하중을 연구하였다. 1962년 Budiansky와 Roth⁽³⁾는 양단 고정인 낮은 사각형 곡면판에 대한 지배 미분방정식을 Galerkin 방식을 이용하여 해석하므로써 동적좌굴현상을 연구하였다. 이 연구는 아치가 아닌 곡면판을 대상으로 한 연구이나 여기서 제안한 동적 임계하중기준은 아치에 폭 넓게 적용되고 있다.

Humphreys⁽⁴⁾는 1966년 등분포 동하중이 작용하는 낮은 원호아치에 대하여 운동방정식을 Galerkin 근사해석방식을 이용하여 해석하였다. 같은해 Lock⁽⁵⁾는 단순 지지된 정현 아치에 분포 step 하중이 작용하는 경우의 비선형 운동방정식을 Galerkin 방법을 이용하여 해석하고 동적좌굴하중을 구하였다. Hsu⁽⁶⁾는 1966년 탄성체의 동적 불안정문제를 연구하였다. 그는 구조계의 초기상태를 포함시켜 충격하중을 받는 탄성구조물의 동적안정을 전체 위치에 너지에 근거를 두고 연구하였다. Fulton과 Barton⁽⁷⁾는 1971년 낮은 아치의 지배미분방정식을 유한차분법을 이용하여 해석하였다. 이들은 단순지지된 아

치에 대한 동적 좌굴현상을 Budiansky의 좌굴기준에 따라 대칭 및 비대칭 좌굴형으로 나누어 해석하였다.

1976년 Lo 와 Masur⁽⁸⁾는 등분포 step 하중을 받는 단순지지 원호아치에 대하여, 운동을 지배하는 적분방정식을 유도하여 유한요소계로 전환하고, 이를 Newmark- β 방법으로 수치적분하므로써 대칭 좌굴형에 대하여 연구하였다. Fitzgerald 와 Plaut⁽⁹⁾는 1980년 3개의 독립적인 step 하중 또는 충격하중을 받는 낮은 아치를 Welton⁽¹⁰⁾과 같이 강성봉의 결합으로 보고 Lagrange 운동방정식을 유도한 다음, 이 식을 Newmark- β 방법으로 해석하여 아치의 snap-through 임계하중을 구하여 상관곡선을 작성하였다. Gregory 와 Plaut⁽¹¹⁾는 1982년 양단힌지 정현아치의 snap-through 좌굴에 대한 여러가지 동하중의 상관적 관계를 연구하였다. 또한 Donaldson과 Plaut⁽¹²⁾는 1983년 삼각 pulse 하중이 가해진 경우의 아치의 동적 좌굴현상을 pulse 지속시간과 감쇠의 영향을 고려하여 연구하였다.

이상에서 살펴본 연구는 대부분 아치의 거동을 수직처짐만을 자유도로 하여 지배 미분방정식을 수치해석 또는 해석적 방법으로 해석한 것들로서 아치를 평면문제에 해석한 것은 거의 없는 실정이다. 따라서 좌굴해석시에도 수직처짐만을 고려하여 좌굴발생여부를 판단하였기 때문에 비대칭좌굴에서 중요한 요소인 수평처짐은 고려할 수 없다. 본 연구는 이런 점에서 2차원 평면 해석방법을 적용하여 보다 정확한 좌굴현상을 구명하도록 한다.

2. 비선형 운동방정식의 구성

동적 하중을 받는 구조물에 있어서 그 변위가 과대할 경우, 형상의 변화에 따른 비선형성을 고려하여야 한다. 그러므로, 구조물의 운동을 지배하는 방정식은 변형된 형태에 기준한 운동방정식이 된다. 본 연구에서는 이 운동을 Lagrangian 좌표계에 의하여 묘사하도록 한다.

변형되지 않은 최초의 물체의 위치를 $x_i (i=1,2,3)$, 시간 t 에서의 변위를 u_i 라 하면, 다음과 같은 비선형운동방정식을 구할 수 있다.⁽¹³⁾

$$\rho_0 \frac{D^2 u_i}{Dt^2} - [(\delta_{ik} + u_{i,k}) s_{nk}]_{,n} + \rho_0 f_i \quad (1)$$

여기서 ρ_0 는 시간 t_0 의 단위체적당 질량, f_i 는 시간 t 에서 단위체적당 물체력, D/Dt 는 시간미분, $()_{,k}$ 는 x_k 에 대한 공간미분(spatial derivative)을 의미한다. 또한, s_{ij} 는 Piola-Kirchhoff의 제 2응력이며 이에 대응되는 변형률은 Green 변형률이다.

가상변위 δu_i 를 식 (1)에 곱한 후 물체 전체에 걸쳐 적분하면 다음과 같은 초기형상에 투영된, 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$\int_{\Omega_0} s_{ij} \delta \epsilon_{ij} d\Omega_0 = \int_{\Gamma_0} p_{oi} \delta u_i d\Gamma_0 + \int_{\Omega_0} \rho_0 (f_i - \frac{D^2 u_i}{Dt^2}) \delta u_i d\Omega_0 \quad (2)$$

여기서, $\delta \epsilon_{ij}$ 는 δu_i 에 적합한 가상 Green 변형률, Ω_0 와 Γ_0 는 초기시간 t_0 에서의 체적 및 표면적, p_{oi} 는 변형 전 단위면적 당으로 치환된 표면력이다.

식 (2)를 이산화하여 한 유한요소에 대한 임의의 시간에서의 운동방정식을 구성하면 다음 식으로 표기된다.⁽¹⁴⁾

$$[M] \{\ddot{q}\} + ([K_L] + [K_{NL}]) \{q\} = \{F\} \quad (3)$$

여기서, $[M]$ 은 consistent 질량행렬로서,

$$[M] = \int_{\Omega_0} [N]^T [N] \rho_0 d\Omega_0 \quad (4)$$

이며, $[K_L] + [K_{NL}]$ 은 비선형 강성도행렬로서

$$[K_L] = \int_{\Omega_0} ([B_L] + [B_{NL}])^T [C] ([B_L] + [B_{NL}]) d\Omega_0 \quad (5)$$

$$[K_{NL}] = \int_{\Omega_0} [B']^T [s'] [B'] d\Omega_0 \quad (6)$$

이며, $\{F\}$ 는 임의의 시간에서의 하중항으로

$$\{F\} = \int_{\Omega_0} [N]^T \{f\} \rho_0 d\Omega_0 + \int_{\Gamma_0} [N]^T \{t_o\} d\Gamma_0 \quad (7)$$

이다. 이들 식에서 $[N]$ 은 형상함수행렬로서 본 연구에서는 평면요소에 대하여 8 절점 등매개요소를 사용하여 2×16 행렬이 된다. 또한, $[B_L]$ 과 $[B_{NL}]$ 은 각각 선형 및 비선형 Green 변형률 - 절점변위 행렬, $[C]$ 는 Piola Kirchhoff 제 2응력 - Green 변형률 행렬, $[B']$ 은 변위경사 - 절점변위 행렬, $[s']$ 는 Piola Kirchhoff 제 2응력들로 구성된 행렬이다. 식 (4)로부터 식 (7)의 적분은 Gauss-Legendre의 수치적분법에 의하여 각 요소 별로 계산될 수 있다. 적분된 행렬과 벡터는 전체 구조계에 적절하게 조립될 수 있다. 식 (3)과 같은 형태로 전체 구조계에 대하여

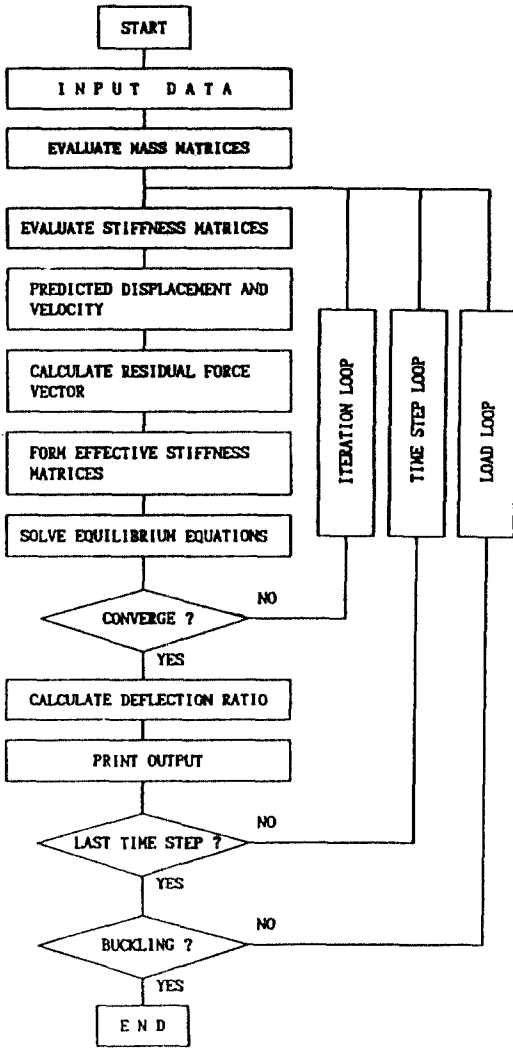


그림 1. 개발된 프로그램의 흐름도

이산화된 운동방정식을 시간 단계별로 수치적분을 행하기 위하여 Newmark 근사법을 이용한다.

이상에서 언급한 이론을 기초로 하여 비선형 유한요소 프로그램을 개발하고 이를 이용하여 낮은 원호아치의 좌굴임계하중을 검토하였다. 개발된 프로그램의 흐름도는 그림 1에 도시한 바와 같다.

3. 낮은 아치의 동적 임계좌굴하중

낮은 아치에 하중이 가해져 일정한 크기에 이르면 snap-through 좌굴이 발생하여 불안정하여 진다. 이

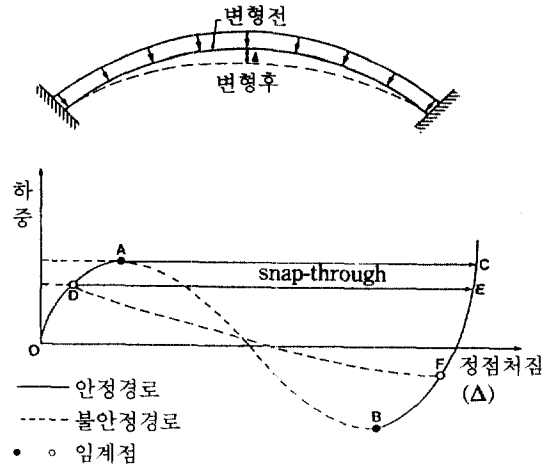


그림 2. Snap-through 현상

현상은 동일한 하중재하에서 한 평형 상태에서 다른 평형상태로 갑자기 변위가 증가하는 현상을 말한다. 따라서 좌굴이 일어나는 순간의 하중, 즉 임계하중을 구하는 것은 낮은 아치의 설계에 있어서 중요한 문제가 된다. 낮은 아치의 좌굴하중을 해석하기 위한 연구는 많으나, 아직 이 임계하중에 대한 통일된 기준은 없는 실정이다. 이러한 좌굴현상은 본 연구와 같은 비선형거동의 해석에 의하여 구명될 수 있으며, 이를 위하여 동적좌굴의 기준을 정립하도록 한다.

3.1 낮은 아치의 동적 좌굴현상

그림 2에서 보는 바와 같이 아치에 하중을 점증하여 재하할 때, A 점까지는 평형경로를 거쳐 하중증가에 따라 변위가 비례하여 증가하지만, A 점에 이르러서는 미소한 하중의 증가에도 변위가 급격히 증가하여 새로운 평형상태인 C 점으로 옮겨간다. 이와 같은 현상이 snap-through 좌굴이다. 만일 아치의 비대칭변형이 구속되지 않는다면 한계점 A에 이르기 전에 그림 2에서 보는 바와 같이 D 점에서 인접된 평형상태인 E 점으로 갑자기 변위가 증가한다. 이 때에도 snap-through 좌굴이 일어난다.

이상은 정적하중에 대하여 기술한 것이나, 동하중이 작용할 경우에도 같은 현상이 일어난다. 즉, 하중이 증가하여 일정한 크기에 달하면 갑자기 변위가 크게 증가하여 구조물이 불안정하게 된다. 이때 아치의 동적응답이 대칭으로 발생하도록 구속되었을 경우의 이 현상을 내칭 동적 좌굴현상이라고

하며, 실제구조물에서의 현상과 같이 구속이 되어 있지 않을 경우 즉 응답이 비대칭형으로 발생할 경우의 이 현상을 비대칭 좌굴현상이라고 한다. 정적하중 하에서의 분기현상이 이와 유사한 현상이라고 할 수 있다.

3.2 동적 임계좌굴하중 기준

3.1 절에서의 같이 snap-through 좌굴이 일어나는 순간의 하중을 임계좌굴하중 이라고 한다. 이 좌굴 하중을 구하기 위하여 많은 학자들이 여러 기준에 따라 연구를 수행하였다. 하지만 통일된 기준이 확립되어 있지 않아서 학자마다 상이한 기준을 적용하고 있다. Hoff 와 Bruce⁽¹⁵⁾는 운동의 미소 동요에 따른 위치에너지 변화가 가장 급격한 경사에 따라 다른 평형상태에 이른다는 snap-through 형식의 기준을 설정하였다. 이 기준은 Hsu⁽⁶⁾에 의하여 위상 공간 상에서 일반화되었다. 그러나, 이 기준은 충격 하중에 제한되어 적용되었고, 수치해석에 적용하기 어려운 점이 있다. Budiansky 와 Roth⁽³⁾, Humphreys⁽⁴⁾ 등은 하중과, 개개 하중에 대한 구조물의 응답변수 중 최대치와의 상관도에서 하중의 미소증가에 따른 응답변수의 급격한 증가가 발생하는 하중을 동적 임계하중으로 정의하였다. 본 연구에서는 Budiansky의 기준에 따라 임계하중을 구하였으며 응답변수는 식 (8)과 같은 아치의 원래의 형상과 변위량과의 비를 나타내는 처짐비로 정하였다. 따라서 Budiansky 기준에 따라 하중을 점증시키며 아치의 힘-변위관계를 해석할 때 식 (8)의 처짐비가 급격히 증가하는 순간의 하중점을 임계하중으로 정의한다. 이와 같은 처짐비를 사용함에 따라 수직방향의 처짐만을 기준으로 하는 방법^(10,11)과는 달리, 비대칭 아치의 경우에 발생하는 수평처짐의 영향도 고려할 수 있게 된다.

$$\Delta = \frac{\int_0^L [u_1^2(x, t) + u_2^2(x, y)]^{1/2} dx}{\int_0^L Y_0(x) dx} \quad (8)$$

여기서, $u_1(x, t)$ 와 $u_2(x, t)$ 는 시간 t 에서의 수평변위와 수직변위이며, $Y_0(x)$ 는 위치에 따라 변하는 아치의 높이, L 은 아치의 지간이다.

4. 해석프로그램

4.1 무차원 매개변수(Non-dimensional Parameters)

해석결과는 재료의 물성과 하중의 크기, 기하학적 형상 등에 따라 결정되는 무차원 매개변수를 이용하여 나타내었다. 본 연구에서 사용된 무차원 매개변수는 Budiansky, Roth⁽³⁾ 등이 사용한 것으로서 식 (9), (10), (11)으로 표기되는 시간매개변수 τ , 하중매개변수 P_0 , 형상매개변수 γ 이다.

$$\tau = (t/R) \sqrt{E/\rho} \quad (9)$$

$$P_0 = (R/h)^2 (q/E) \quad (10)$$

$$\gamma = \beta^2(R/h) \quad (11)$$

윗식들에서 E 는 탄성계수, ρ 는 단위질량, R 은 아치의 반경, h 는 아치단면의 높이, q 는 하중강도, β 는 radian 으로 환산된 아치중심각의 반, t 는 경과시간을 각각 나타낸다.

4.2 검증용 해석모형

해석 프로그램을 검증하기 위한 해석대상아치는 그림 3에 도시된 바와 같은 양단이 고정된 낮은 평면 원호 아치에 방사형 만재 등분포하중이 step 하중으로 재하되는 경우이다. 여기서 낮은 아치란 어느 특정한 범주에 속하는 아치를 지칭하는 것이 아니라, 상대적인 개념으로서 아치의 높이가 낮아질수록 좌굴 가능성이 높고, 이에 따른 안정성 여부 판단이 중요하다는 의미에서 사용되고 있는 용어이다. 다만 통상 아치지간 대 높이의 비가 1/5 이하인 아치에 대하여는 좌굴안정성 검토가 특히 요구되기 때문에 이 기준을 낮은 아치의 구분기준으로 적용하기도

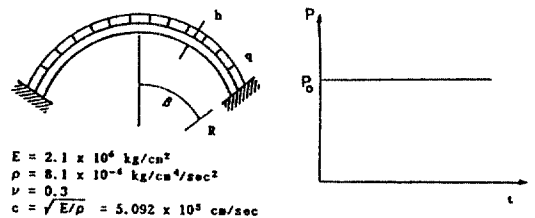


그림 3. 검증용 모형 및 재원

한다. 본 논문의 해석대상아치는 전술한 기준에 따라 아치지간 대 높이의 비가 0.053인 낮은 원호 아치이고, 반경 $R=100\text{cm}$, $\beta=0.209\text{ rad}(12^\circ)$ 의 $1\text{cm}\times 1\text{cm}$ 의 정사각형 단면을 가진 아치이다. 구조의 기하학적인 형상이 대칭이고 또한 하중이 대칭이므로 아치구조의 반을 대상으로 하여 유한요소망을 형성할 수 있다. 이와 같은 원리에 따라 본 연구에서는 아치의 반에 대하여 요소당 절점수가 8 개인 6 개의 유한요소를 사용하였다.

수치해석 방법으로는 Newmark 방식을 사용하였다. 이 때, 수치적분의 정확성 및 안정성을 얻기 위하여 Newmark 가 제안한 평균가속도법(constant acceleration method)의 적분상수 α, λ 를 각각 0.5와 0.25로 하였다. Newmark 방법을 포함한 implicit 시간적분 방식은 시간간격에 관계없이 안정한 해법으로 알려져 있으나, 좌굴현상을 찾는 과정에서 큰 시간 간격을 사용하면 동적 평형상태를 찾지 못하고 발산하는 경우가 많았다. 따라서, 본 연구에서는 시간간격을 3.315×10^{-6} 초로 일정하게 하였다.

4.3 개발된 프로그램의 검증

대상 아치에 등분포 방사하중 $q=42\text{ kg/cm}$ 이 가해진 경우에 대하여 선형 및 비선형해석을 시행한 다음, 그 결과를 범용 프로그램인 NONSAP을 이용하여 얻은 결과와 비교하였다. 여기서는 아치중앙에서의 시간에 따른 수직처짐값을 기준으로 두 해석결과를 비교하였다.

그림 4는 선형해석한 결과를 나타낸 것으로 아치는 최대처짐 0.66 cm, 주기 0.0028 초의 주기적인 진동을 하게 된다. 해석결과를 검증하기 위하여 동일한 경우에 대하여 NONSAP 으로 해석한 결과를 같이 도시하였다. 해석조건은 모두 동일하게 하였다. 전체요소 수, 요소당 절점수를 동일하게 하였고, 수치해석방법도 같은 Newmark 방식을 사용하였으며, 시간간격과 적분상수를 동일하게 하였다. 단, 본 연구에서는 하중이 등분포된 것으로 해석한 반면, NONSAP의 경우는 분포하중을 집중하중으로 치환하여 재하하였다. 그림에서 보는 바와 같이 두 해석은 거의 동일한 결과를 보여줌을 알 수 있다.

그림 5는 동일한 조건에 대한 비선형 해석결과를 보여주고 있다. 본 연구에서 개발된 프로그램을 이용하여 해석한 결과에 의하면 아치는 최대처짐 3.65

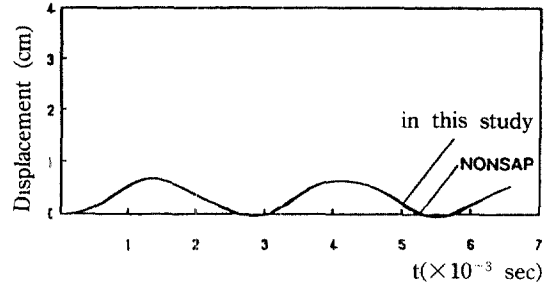


그림 4. 선형해석결과

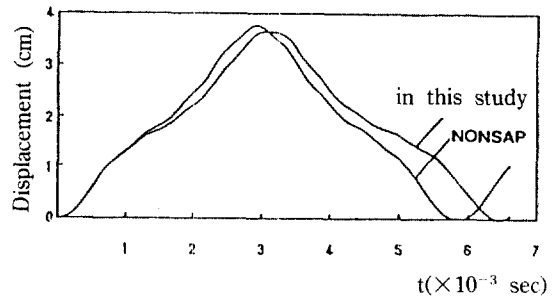


그림 5. 비선형해석결과

cm, 주기 0.0064 초의 진동을 하게 된다. 이는 선형해석의 결과와 비교하면 큰 차이가 있는 것을 알 수 있다. 비선형해석의 결과도 역시 NONSAP의 결과와 비교하였다. NONSAP에 의한 비선형 해석 결과에 따르면 대상아치는 최대처짐 3.77 cm, 주기 0.0059 초의 진동을 한다. 이는 본 연구의 결과에 비하여 진폭은 크게 (3.2%), 주기는 작게 (8.5%) 해석된 것이나 비교적 두 연구결과가 잘 일치하고 있다고 사료된다. 시간적분 상의 오차가 없다고 가정할 때, NONSAP과 본 연구는 모두 8 절점 등매개요수를 사용한 변위법에 의한 해석이므로 인위적인 자유도의 구속에 의하여 구조의 강성을 과대평가하게 된다. 따라서, 두 해석의 결과는 모두 주기를 과소 해석하였다고 사료될 수 있으므로, 본 해석에 의한 주기가 보다 실제 거동에 가깝다고 사료된다. 또한, 정점속도(그림 5의 곡선의 기울기)의 크기를 비교할 때, 본 연구의 결과가 좀 더 유연한 구조로 해석한 것으로 보아 정당한 해석이라 사료될 수 있다. 이러한 내용은 선형인 경우에도 그 차이는 미소하지만 동일한 양상을 보이고 있다.

5. 좌굴임계하중

5.1 만재 동분포하중 재하시의 임계좌굴하중

전장에서 설명된 동적 비선형해석 방법에 의하여 낮은 아치의 동적 임계좌굴하중의 크기를 구할 수 있다. 아치의 형상변화에 따른 좌굴하중의 변화를 검토하기 위하여, 그림 6에서와 같이 같은 지간 (L) 을 유지하는 상태에서 β 와 R의 크기를 조정하여 형상이 변화하는 경우에 대하여 각각 임계좌굴하중을 구하였다. 그림에 보인 외의 다른 조건은 그림 3과 같다. 매개변수를 실제화하여 예시하면, 이 모델들은 각각 (a) R=100 cm, h=1 cm, (b) R=80.33 cm, h=1 cm, (c) R=67.28 cm, h=1 cm의 형상을 갖는다.

임계하중의 결정은 전 절에서 언급된 바와 같이 Budiansky 가 제안한 임계하중의 정의에 따라 처짐비가 갑자기 증가하는 현상이 나타날 때까지 하중을 점증시키며 해석을 실시하였다. 해석결과는 처짐비 Δ 와 시간매개변수 τ 와의 상관관계를 그림으로 도시하여 제시하였다. 그림 7은 모델 (a)에 대한 시간매개변수-처짐비 관계곡선으로서 그림에서 보면

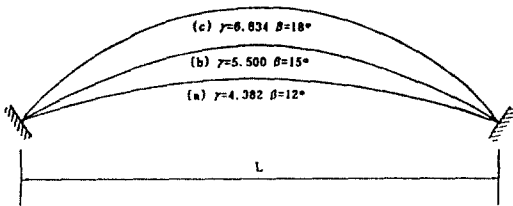


그림 6. 임계하중해석모형

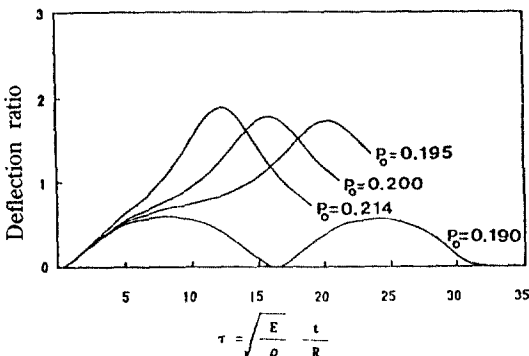


그림 7. 하중 매개변수에 따른 처짐비의 변화 ($\gamma=4.382$)

$P_0=0.190$ ($q=40$ kg/cm)까지는 처짐비가 평균 0.3 정도에서 진동하는 현상을 보이지만 하중이 그 이상으로 미소증가되면 처짐비가 갑자기 증가하는 것을 알 수 있다. 즉 $P_0=0.195$ ($q=41$ kg/cm)에서는 처짐비가 최고 1.7 이상으로 높아진다. 하지만 이 하중을 계속적으로 증가시켜 재하할 경우에는 그 증가에 비례하여 처짐비가 증가하지 않고 거의 일정한 값을 보이고 있다. 단지 처짐비의 급증현상이 하중이 커질수록 빨리 나타남을 알 수 있다. 모델 (b) 및 (c)에 대한 그림 8 및 9의 해석결과에서도 유사한 현상을 볼 수 있다. 그림에서 보는 바와 같이 모델 (b)는 $P_0=0.191$ ($q=62$ kg/cm)에서, 모델 (c)는 $P_0=0.190$ ($q=88$ kg/cm)에서 각각 최대 2.0, 2.2 정도의 처짐비가 나타나고 그 이상의 하중재하에서는 처짐비가 거의 증가하지 않음을 확인할 수 있다.

이 현상을 좀 더 검토하기 위하여 하중크기 변화에 따른 최대처짐비의 변화를 각 모델에 대하여

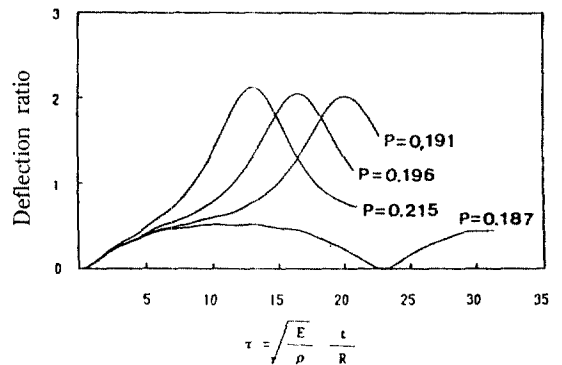


그림 8. 하중 매개변수에 따른 처짐비의 변화 ($\gamma=5.5$)

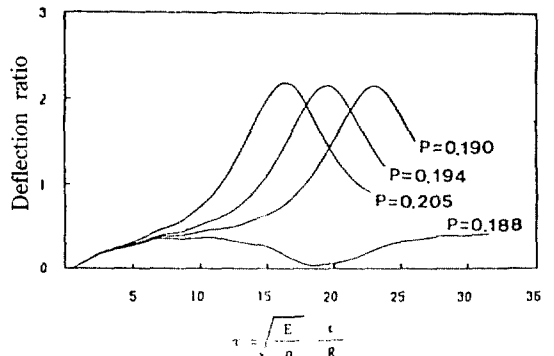
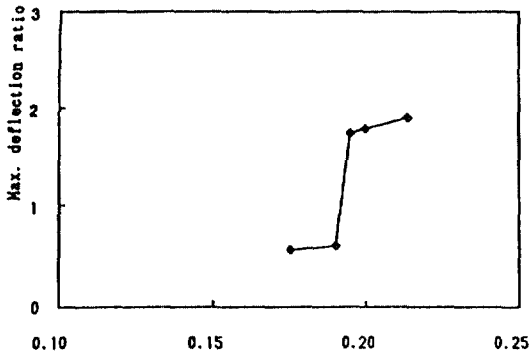
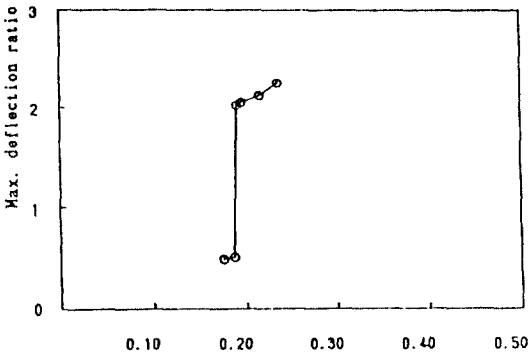


그림 9. 하중 매개변수에 따른 처짐비의 변화 ($\gamma=6.634$)



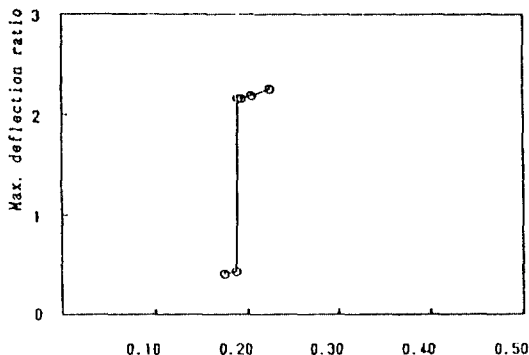
$$P_0 = \left(\frac{R}{h}\right)^2 \frac{q}{E}$$

그림 10. 하중 매개변수에 따른 최대 처짐비 ($\gamma=4.382$)



$$P_0 = \left(\frac{R}{h}\right)^2 \frac{q}{E}$$

그림 11. 하중 매개변수에 따른 최대 처짐비 ($\gamma=5.5$)



$$P_0 = \left(\frac{R}{h}\right)^2 \frac{q}{E}$$

그림 12. 하중 매개변수에 따른 최대 처짐비 ($\gamma=6.634$)

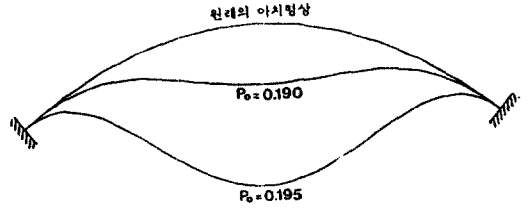


그림 13. P_0 가 0.190, 0.195인 경우의 처짐현상 ($\gamma=4.382$)

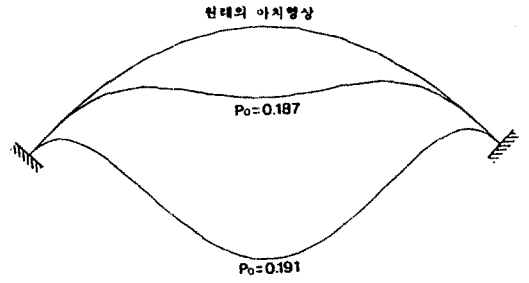


그림 14. P_0 가 0.187, 0.191인 경우의 처짐현상 ($\gamma=5.5$)

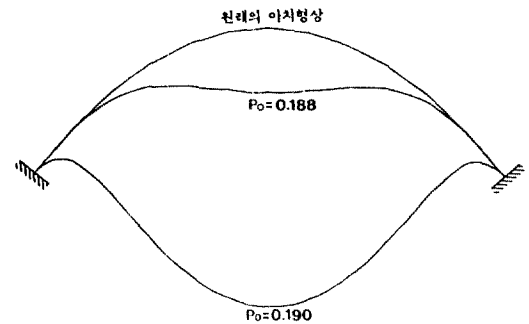


그림 15. P_0 가 0.188, 0.190인 경우의 처짐현상 ($\gamma=6.634$)

그림 10, 11, 12에 도시하였다. 이 그림에 따르면 모델 (a)의 경우 P_0 가 0.190 - 0.195 사이에서 최대 처짐비가 급증함이 확실하다. 모델 (b)의 경우는 0.187 - 0.191 사이에서, 모델 (c)의 경우 0.188 - 0.190 사이에서 동일한 현상을 볼 수 있다.

처짐비가 급증하는 현상을 처짐비가 급증하기 전후의 아치의 변형된 형상을 그림으로 그려서 확인하였다. 그림 13는 모델 (a)의 낮은 아치에 있어서, 처짐비가 과대하게 나타나기 전후의 하중조건에서

최대의 변형이 발생했을 때의 처짐형상을 정규축적으로 그린것이다. 이 그림에서 보면 처짐비가 급증하기 전의 하중조건에서는 아치가 원래의 형상과 같은 형태로 변형이 일어나나, 이 하중을 초과한 다음에는 아치의 형상이 전도된 모습으로 되어 있음을 알 수 있다. 동일한 양상을 모델 (b)에 대한 그림 14, 모델 (c)에 대한 그림 15에서도 볼 수 있다. 이상의 검토에서 처짐비가 급증하는 현상은 아치의 snap-through 현상임을 쉽게 결론지을 수 있다.

5.2 아치의 형상변화에 따른 임계좌굴하중

5.1절에서와 같은 방법을 이용하여 아치의 형상변화에 따른 좌굴하중 크기의 변화를 구한다. 대상 아치는 좀 더 좌굴하중의 변화추세를 명확히 확인하기 위하여 5.1 절에서 선정 한 3 개의 모델 외에 2 개의 모델을 추가하였다. 2개의 추가된 모델도 같은 지간(L)을 유지하면서 아치의 중심각의 반 β 와 아치반경 R을 변화시켜 형상을 바꾸었다. 추가모델은 각각 $R=58.016\text{cm}$, $\beta=21^\circ$ 의 아치와 $R=51.117\text{cm}$, $\beta=24^\circ$ 의 아치로서 식 (11)에 따라 형상매개변수를 구하면 앞의 아치는 7.786, 뒤의 아치는 8.96이 계산된다.

따라서 전체적으로 5 개의 모델을 대상으로 형상변화에 따른 좌굴하중의 변화를 검토하였다. 단, 여기서는 아치의 낮은 정도를 형상매개변수의 크기 비교보다는 아치의 지간 (L) 대 아치의 높이 (H)의 비로 표현할 때 그 정도를 쉽게 짐작할 수 있으므로 위의 5 개 모델의 형상매개변수를 H/L 로 환산하여 5 개의 아치에 대하여 임계좌굴하중을 구하여 그림 16 및 표 1에 나타내었다.

그림 16 및 표 1에 따르면 형상매개변수가 적을수록 좌굴하중이 급격히 떨어짐을 알 수 있다. 예를 들어 $\gamma=4.382$ 인 아치 ($q_{cr}=41\text{kg/cm}$)는 $\gamma=8.96$ 인 아치($q_{cr}=158\text{kg/cm}$)에 비하여 약 26% 밖에 지지능력이 없음을 알 수 있다. 이것은 아치지간 대 높이의 비로 환산하여 비교할 경우 아치지간 대 높이의 비가 0.053인 아치는 0.106인 아치에 비하여 좌굴임계하중이 1/4 밖에 되지 않는 것이다.

결론적으로 형상매개변수가 적을수록, 즉 아치의 높이가 낮아질수록 이 구조물이 받을 수 있는 좌굴저항능력이 급격히 감소하므로, 낮은 아치일수록

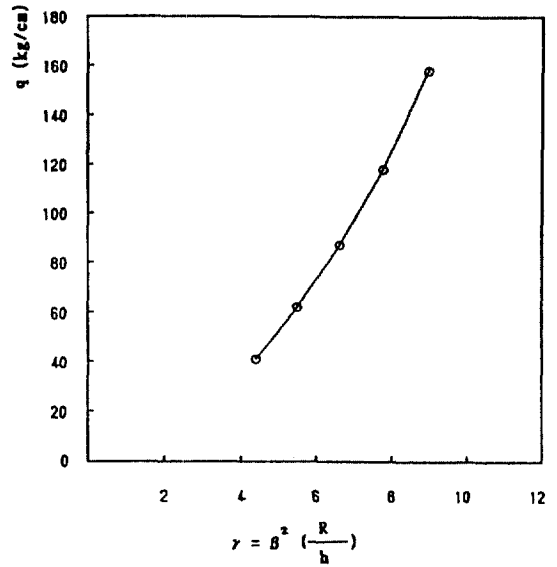


그림 16. 형상 매개변수에 따른 임계좌굴하중

표 1. 형상매개변수에 따른 임계좌굴하중

구 분	모 델				
	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
형상매개변수	4.382	5.5	6.634	7.786	8.96
H/L	0.053	0.066	0.079	0.093	0.106
좌굴임계하중 (kg/cm)	41	62	88	118	158

구조물의 좌굴안정성 여부를 확인할 필요가 있음을 알 수 있다.

5.3 집중하중 재하시의 임계좌굴하중

대상아치는 $\gamma=4.382$ 의 반경 $R=100\text{cm}$, 원의 중심각의 반 $\beta=12^\circ$, 아치의 높이 $h=1\text{cm}$ 의 정사각형 단면을 가진 아치로 하였다. 단일 집중하중이 지간에 걸쳐 이동할 때 좌굴하중의 크기가 어떻게 변화하는지를 확인하기 위하여, 하중을 점중시킴으로서 처짐비가 급증하는 순간의 하중을 구하였다. 대상아치가 대칭구조이므로 전체 구조물의 반을 6 등분하여 아치의 중앙점부터 하중이 지점쪽으로 1 등분씩 이동함에 따른 임계좌굴하중의 변화를 검토하였다.

그림 17은 이에 따른 해석결과를 도시한 것이다.

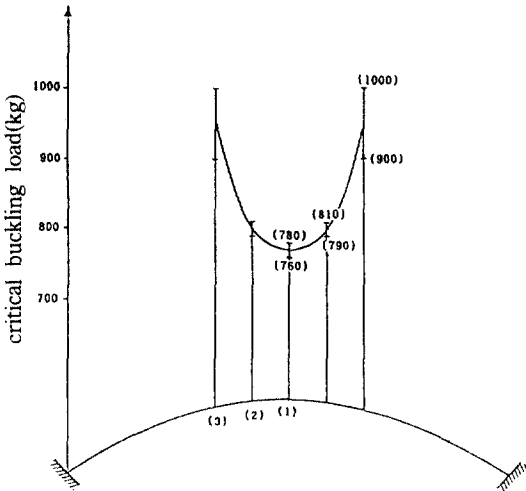


그림 17. 하중재하위치에 따른 임계좌굴하중

그림에서 (1), (2), (3) 은 각각 하중이 아치의 중앙점에 작용할 경우, 아치의 중앙점에서부터 1/6 등분점에 작용할 경우, 1/3 등분점에 작용할 경우의 하중재하점을 나타낸다. 재하점을 3 개로 제한한 것은 하중이 그 이상으로 지점부에 가까워지게 되면 임계하중이 급격히 증가하여 좌굴의 검토가 무의미하기 때문이다. 또한 임계하중을 폭넓게 나타낸 것은 방사하중 재하시처럼 급격한 좌굴발생현상이 나타나지 않고 일정한 하중폭에 걸쳐 좌굴이 발생하고 있기 때문이다. 그림 17에 따르면 하중재하가 아치의 중앙에서 지점쪽으로 이동함에 따라 임계좌굴하중이 증가함을 알 수 있다. 즉 대상아치의 경우 아치 중앙에 하중이 재하될 경우에 좌굴저항능력이 가장 낮은 것을 확인할 수 있다.

5.4 등분포 연직하중 재하시의 임계좌굴하중

등분포 연직하중이 재하될 경우의 임계좌굴하중을 구하였다. 단, 방사하중 재하 시에 대한 임계하중 값과의 비교를 위하여 같은 하중강도의 연직하중과 방사하중이 재하된 경우에 대하여 임계하중을 비교하였다. 대상아치는 4.4 절의 5 개 모델중 높이가 가장 낮은 $\gamma=4.382$ 의 아치와 높이가 가장 높은 $\gamma=8.96$ 의 두 아치로 정하였다. 그 이유는 아치가 낮아질수록 연직하중과 방사하중이 일치됨에 따라 해석결과가 같아지므로 가장 낮은 아치와 가장 높은

표 2. 하중조건에 따른 처짐비 ($\gamma=4.382$)

구 분	하중 강도 (kg/cm)				
	40	41	42	45	
최 대 처짐비	방사하중	0.598	1.732	1.983	1.897
	연직하중	0.585	1.724	1.773	1.891

표 3. 하중조건에 따른 처짐비 ($\gamma=8.96$)

구 분	하중 강도 (kg/cm)				
	155	158	160	200	
최 대 처짐비	방사하중	0.261	2.297	2.247	2.437
	연직하중	0.241	2.282	2.256	2.429

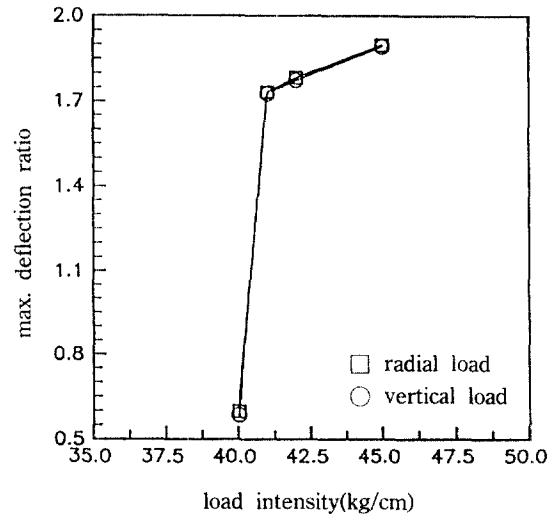


그림 18. 등분포 방사형하중과 연직하중재하시의 좌굴임계하중($\gamma=4.382$)

아치만을 선정함으로써 곡률이 결과에 미치는 영향을 확인하기 위함이다.

해석결과를 표 2, 표 3, 그림 18과 그림 19에 제시하였다. 두 하중조건에 따른 임계좌굴하중 크기를 비교하는 것은 그 차이가 미미할것으로 판단되어 단지 동일 하중 재하시의 최대처짐비를 구하여 비교하였다. 해석결과 두 아치의 경우, 공통적으로 방사하중보다 연직하중 재하시에 처짐비가 적은 것으로 나타났다. 이점으로 보아 방사하중 재하시 좌굴 가능성이 높음을 유추할 수 있다. 아치의 형상에 따른 차이는 $\gamma=4.382$, $\gamma=8.96$ 인 두아치 모두 연

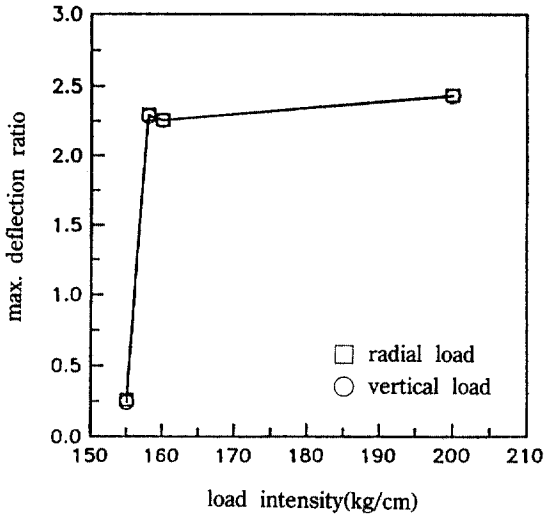


그림 19. 동분포 방사형하중과 연속하중재하시의 좌굴임계하중($\gamma=8.960$)

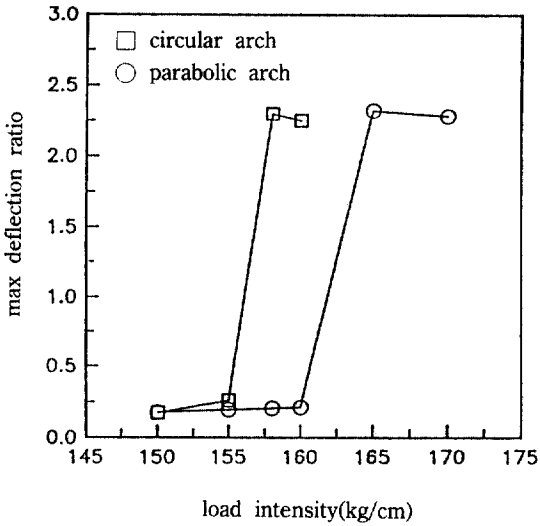


그림 20. 원호아치와 포물선아치의 비교

적하중 재하의 경우가 전체적으로 처짐비가 적게 나타나나 곡률에 따른 영향은 두아치가 낮은 아치이기 때문에 큰 차이를 발견할 수 없다.

5.5 아치의 형상이 포물선 형상인 경우

아치의 형상을 포물선형상으로 바꾸어 5.4 절과 마찬가지로 동일 하중 재하시의 최대처짐비를 구하여 원호아치의 경우와 비교하였다. 두 형상의 아치의 좌굴강성을 비교하는 것이 목적이므로 동분포 방사

표 4. 아치의 형상에 따른 처짐비 ($\gamma=8.96$)

구 분		하중 강도 (kg/cm)				
		150	155	158	160	165
최 대	원호아치	0.175	0.261	2.297	2.249	-
처짐비	포물선아치	0.178	0.196	0.206	0.213	2.32

하중이 재하되는 경우에 대하여 해석을 실시하였다. 이를 위하여 원호아치와 같은 지간과 높이를 갖는 포물선 형상을 구하였다. 여기서는 5.2 절의 5 개 모델 중 아치의 높이가 가장 큰 $\gamma=8.96$ 의 $R=51.117$ cm, $\beta=24^\circ$, $h=1$ cm의 아치를 대상으로 하였다. 그 이유는 아치가 낮아질수록 원호형상이나 포물선형상이 거의 일치하여 그 차이를 확인하기 어렵기 때문이다. 두가지 형상의 아치에 대한 결과를 표 4 및 그림 20에 나타내었다.

표 4에 따르면 원호아치의 경우 하중강도가 155 - 158 kg/cm에서 처음으로 좌굴이 발생하는데 반하여, 포물선아치의 경우는 160 - 165 kg/cm 사이에서 좌굴이 발생함을 확인할 수 있다. 즉, 본 대상아치의 경우 같은 지간과 같은 높이를 갖는 원호아치와 포물선아치의 좌굴강성을 비교할 때 포물선아치의 강성이 다소 큰 것을 알 수 있다.

6. 결 론

본 연구에서는 낮은 아치에 대하여 기하학적 비선형성을 고려한 동적해석방법을 연구하였으며, 이를 좌굴해석에 적용하였다. 본 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) Lagrangian 좌표를 사용하여 기하학적 비선형성을 고려하고, 유한요소에 의한 운동방정식을 Newmark 법에 의하여 해석하는 프로그램을 개발하여 낮은 원호아치의 좌굴임계하중을 산정할 수 있음을 입증하였다.

2) Budiansky 좌굴기준을 비선형 동적 거동해석에 반영하여, 아치의 동적 좌굴현상을 해석할 수 있는 방식을 제안하였고 이를 예로써 증명하였다.

3) 동일한 조건하에서 아치의 높이가 낮아지면 작은 하중에 의해서도 좌굴이 발생하게 되므로, 낮은 아치의 설계시에는 좌굴에 따른 안정성 문제를 고려해야 할 것으로 판단된다.

4) 단일 집중하중을 시간에 걸쳐 이동하면서 좌굴하중의 변화를 구하여 본 결과, 대상아치의 경우 아치중앙에 하중이 재하될 경우에 좌굴저항능력이 가장 낮았음을 확인하였다.

5) 동일 아치에 등분포 연직하중과 방사하중을 재하하여 최대 처짐비를 비교한 결과, 방사하중의 재하시 좌굴가능성이 높음을 알았다.

6) 같은 시간과 같은 높이를 갖는 원호아치와 포물선 아치의 좌굴특성을 비교할 때 포물선 아치의 좌굴강성이 다소 큼을 알 수 있다.

참 고 문 헌

1. Bolotin, V.V., *The Dynamic Stability of Elastic System*, Holden-Day Inc., 1952, pp.1-5.
2. Fung, Y.C. and Kaplan, A., "Buckling of Low Arches and Curved Beams of Small Curvature", *Technical Note 2840*, National Advisory Committee for Aeronautics, 1952, pp.1-75.
3. Budiansky, B. and Roth, R.S., "Axisymmetric Dynamic Buckling of Clamped Shallow Spherical Shells", *NASA, TN D-1510*, 1962, pp. 597-606.
4. Humphreys, J.S., "On Dynamic Snap Buckling of Shallow Arches", *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol.4, No.5, May, 1966, pp.878-886.
5. Lock, M.H., "Snapping of a Shallow Sinusoidal Arch under Step Pressure Load", *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol.4, No.7, 1966, pp.1249-1256.
6. Hsu, C.S., "On Dynamic Stability of Elastic Bodies with Prescribed Initial Conditions", *International Journal of Engineering Science*, Vol.4, No.1,

- 1966, pp.1-21.
7. Fulton, R.E. and Barton, F.W., "Dynamic Buckling of Shallow Arches", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol.97, No.EM3, Jun., 1971, pp.865-877.
8. Lo, D.L.C. and Masur, E.F., "Dynamic Buckling of Shallow Arches", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol.102, No.EM5, Oct., 1976, pp.901-917.
9. Fitzgerald, J.M. and Plaut, R.H., "Snap-Through of a Shallow Arch under the Interaction of Multiple Dynamic Loads", *Developments in Theoretical and Applied Mechanics*, Vol.10, Stoneking, J.E., ed., Proceedings of the Tenth Southeastern Conference on Theoretical and Applied Mechanics, University of Tennessee, 1980, pp.495-503.
10. Welton, R.H.B., "Snap-Through of Arch Model Under Multiple Loads", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol.104, No.EM4, Aug., 1978, pp.964-967.
11. Gregory, W.E. and Plaut, R.H., "Dynamic Stability Boundaries for Shallow Arches", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol.108, No.EM6, Dec., 1982, pp.1036-1050.
12. Donaldson, M.T. and Plaut, R.H., "Dynamic Stability Boundaries for a Sinusoidal Shallow Arch under Pulse Loads", *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol.21, No.3, Mar., 1983, pp.469-471.
13. Malvern, L.E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Media*, Prentice Hall, 1969.
14. Bathe, K.J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1980, pp.301-406.

(接受 : 1992. 2. 28)