

계층적 축대칭요소에 의한 P-version 모델

P-Version Model Based on Hierarchical Axisymmetric Element

우광성 · 장용채 · 정우성

Woo, Kwang Sung · Chang, Yong Chai · Jung, Woo Sung

Abstract

A hierarchical formulation based on p-version of the finite element method for linear elastic axisymmetric stress analysis is presented. This is accomplished by introducing additional nodal variables in the element displacement approximation on the basis of integrals of Legendre polynomials. Since the displacement approximation is hierarchical, the resulting element stiffness matrix and equivalent nodal load vectors are hierarchical also. The merits of the proposed element are as follow: i) improved conditioning, ii) ease of joining finite elements of different polynomial order, and iii) utilizing previous solutions and computation when attempting a refinement. Numerical examples are presented to demonstrate the accuracy, efficiency, modeling convenience, robustness and overall superiority of the present formulation. The results obtained from the present formulation are also compared with those available in the literature as well as with the analytical solutions.

요 지

軸對稱 線形彈性 응력해석을 위해 p-version 유한요소법에 기초한 階層的 정식화 과정이 제안되었다. 이 방식은 적분형 르장드르 다항식을 사용하여 절점좌표값을 갖지 않는 절점을 추가하여 형상함수의 조합형태로 變位함수를 근사시키는 방법이다. 形狀函數가 계층적 성질을 갖기 때문에 剛性度행렬과 하중벡터도 계층적이 된다. 본 연구에서 제안된 要素의 長點은 다음과 같다. 첫째, 개선된 수치연산의 효율성이며 둘째, 요소간에 서로 다른 次數의 형상함수를 사용할 수 있고 셋째, p-세분화를 할 때 低次일 때 계산된 값을 그대로 사용할 수 있다. 수치예제를 통해 제안된 요소의 正確度, 效率性, 모델링의 簡便性, 通用性 및 변위와 응력 그리고 에너지 Norm 등을 사용하여 그 우월성을 입증하고 있다. 몇 가지 예제의 해석결과는 이미 발표된 논문과 아울러 해석적 방법에 의한 결과와 비교되었다.

1. 序 論

軸對稱 요소는 축대칭회전체의 3차원해석을 위한

* 정희원 · 전남대학교 토목공학과 조교수

** 정희원 · 전남대학교 공업기술연구소 연구원

*** 정희원 · 전남대학교 토목공학과 석사과정

중요한 해석도구이며 해석모델링의 간편성과 해석에 소요되는 컴퓨터 CPU시간이 3차원 固體 요소에 비해 훨씬 절감되며 정확도도 3차원 고체 요소에 비해 떨어지지 않는 이유로 많이 사용되고 있다. 축대칭 요소의 유한요소 정식화과정은 2차원 평면응력과

평면변형문제와 유사한 관계로 종래의 h-version 유한요소법에서 제안된 알고리즘에 기초하여 많은 연구가 진행되어 왔다. 한편, 1970년에 Zienkiewicz⁽¹⁾는 Lagrange 보간함수를 사용한 高次요소를 제안 하였으나 형상함수의 차수를 증가시킴에 따라 증가된 절점의 위치를 고정시킨 관계로 次數의 증가로 인한 補間函數의 심한 振動(oscillation)과 自己節點(self node)에서는 0이 되는 관계가 강제구속의 역할을 하게 되므로 변위함수를 표현하는데 문제점이 있다고 지적하였다. 1976년 Peano⁽²⁾는 이러한 문제를 低매개변수요소(subparametric element)개념을 사용하여 모서리절점(corner node)에만 좌표값을 갖게 하고 형상함수의 次數 P가 2부터는 좌표값을 갖지 않는 節點(nodeless node)을 사용하여 任意의 函數를 싸인(sine) 및 코싸인(cosine)함수들의 組合으로 표현하는 Fourier급수 개념과 같이 임의의 변위함수를 $P=1$ 에서 $P=2,3,\dots,n$ 까지의 형상함수들의 조합으로 표현하는 방식을 도입하였다. 이 때의 형상함수로는 Legendre 다항식을 사용한 계층적 형상함수가 사용되었다. 1977년 Rossow⁽³⁾는 계층적 개념에 근거한 Co-요소를 제안하였고 1978년 Szabo와 Mehta⁽⁴⁾는 p-version 유한요소법을 인장력을 받는 평판의 파괴역학해석에 적용하여 종래의 h-version 유한요소법에 비해 2배가량 빠른 수렴성을 보여 주었다. 1981년 Babuska⁽⁵⁾는 h-version과 p-version에 대한 수렴성을 수학적으로 입증하였고 hp-version의 수학적모델로 타원형 편미분방정식(elliptical partial differential equation)을 성공적으로 해석하여 구조해석의 가능성을 열어 주었으며 이에 대한 연구가 최근에 의욕적으로 수행되고 있다.⁽⁶⁾ 앞의 연구자들은 대부분 삼각형요소에 근거한데 비하여 다른 연구에서는⁽⁷⁾ 積分型 르장드르함수(integrals of Legendre polynomials)에 기초한 사각형 계층요소를 사용하여 기하학적 형상과 하중조건에 기인한 應力特異가 발생하는 특이성문제를 해석하였으며 특히, 龜裂된 실린더의 파괴역학해석을 하여 좋은 결과를 보인바 있다. Zienkiewicz⁽⁸⁾는 유한요소해석에서 계산된 근사해의 誤差를 許容限界誤차 이내로 효율적으로 줄여 나가기 위해서 가장 最適의 방법을 모색하였다. 즉, 最少 CPU시간으로 最大의 收斂速度(convergence rate) 및 正確度를 갖게 하며 궁극적으로 個個 요소의 오차를 균등하게 분포시키

으로써 應力特異點(stress singular point)과 특이점에서 멀리 떨어진 요소간에서 발생될 수 있는 에너지 Norm 誤差의 差異를 最小化함과 동시에 平均허용한계오차를 만족시켜주는 理論的 알고리즘을 제안하게 되었다. 이를 適應的 유한요소해석(adaptive finite element analysis) 또는, 적응적 체는 hp-세분화라고 한다. 그의 방식은 적응적 체는 h-세분화에 의해 결정된 모델에 P의 次數를 단순증가시킴으로써 收斂性을 훨씬 빠르게 하였으나 적응적 체는 h-세분화된 요소의 갯수도 상당할 정도이므로 오히려 適應的 체는 p-세분화에 의하면 불과 요소의 갯수가 10개 남짓하므로 이에 바탕을 두면서 요소의 個數 및 요소의 크기를 조절하면서 체는설계를 최적화시키는 방식이 연구되어야 일반 사용자가 이용하기에 편리할 뿐만 아니라 입력자료가 대폭 절감되어 질 것이다. 그런 이유로 이 분야에 대한 연구가 지속적으로 연구되고 있는 실정이다. 한편, p-version에 의한 축대칭문제는 원통형 쉘문제 및 적층복합재료(laminated composites)의 熱傳導문제를 階層的 軸對稱 쉘요소를 사용하여 해석한 Surana 등⁽⁹⁻¹¹⁾에 의해 발표된 몇 편의 논문을 제외하고는 찾아보기 힘든 실정이다. 본 연구에서는 Surana가 제안한 요소와 달리 계층적 성질을 갖는 적분형 르장드르함수를 사용하여 軸對稱應力(axisymmetric stress)문제를 해석할 수 있는 一般的인 계층적 축대칭요소를 제안하며 요소의 검증을 위해 두꺼운 圓管(thick-walled cylinder)문제에서 두께방향의 변화에 따른 변위 및 응력의 수렴성을 형상함수의 次數에 따라 살펴보고 요소의 형상비(aspect ratio) 및 포아슨비가 0.5에 접근하는 非壓縮性 材料의 Poisson Locking에 관한 민감도등의 通用性(robustness)이 검토되었다. 한편, 圓形棒(round bar) 및 원형판의 部分龜裂(part crack)이 발생될 때의 應力擴大係數(stress intensity factor)가 산정되어 기존의 3차원 特異要素 및 실험식과 비교되었으며 특히 본 연구에서는 요소와 요소간의 형상함수를 동일한 次數로 고정시킨 종래의 h-version 및 p-version 유한요소방식에서 벗어나 요소와 요소간의 형상함수의 次數를 應力傾斜(stress gradient)가 매우 큰 特異點(singular point) 부근에서는 高次的 형상함수를 사용하고 應力傾斜가 낮은 영역에서는 低次的 형상함수를 사용함으로써 체는 設計(mesh design)를 최적화 시키는 適應的 P-유

한요소법(P-adaptivity)이 시도되었다.

2. 階層要素의 利點

2.1 階層的 性質

종래의 Lagrange 族의 형상함수는 주로 1차 또는 2차를 사용하며 때때로 3차가 사용된다. 1차인 경우 선형의 형상함수가 사용되며 2차인 경우는 1차때 사용된 형상함수와는 독립적으로 2차 형상함수로만 정의된다. 같은 방법으로 3차의 형상함수는 1,2차의 형상함수와는 무관하게 3차의 형상함수로만 새로이 정의되며 이를 비계층요소라 한다. 한편, 본 연구에서는 임의의 변위함수를 여러 개의 형상함수의 조합으로 표현하게 되므로 2차인 경우의 형상함수는 1차때의 형상함수가 그대로 사용되고 2차에 관한 형상함수가 추가되며 3차인 경우도 1,2차의 형상함수가 그대로 사용되며 3차에 대한 형상함수만이 추가되는 방식으로 형상함수가 정의된다. 다시 말하면 P차의 형상함수는 P+1차 형상함수의 部分集合(subset)이 되며 이는 P차의 강성도행렬은 P+1차 강성도행렬의 部分行列(submatrix)이 되는데 그림 1에 비계층요소와 계층적요소의 형상함수가 비교되어 있다. P+1차의 강성도행렬을 구하기 위해서는 P차의 강성도행렬에 P+1차 형상함수의 증가분에 대한 강성도행렬을 더해줌으로써 P+1차의 강성도

P	Non-hierarchical Shape Function		
1			
2			
P	Hierarchic Shape Function		
1			
2			

그림 1. Hierarchical and non-hierarchical shape functions.

행렬을 구하게 된다.

2.2 개선된 數值效率性

유한요소해석에서 근사해의 정확도 및 수렴성은 강성도행렬을 어떻게 구성하느냐에 달려 있다고 해도 과언이 아닐 것이다. 다시 말하면, 강성도행렬이 구해지면 그 이후의 과정은 선형대수학(linear algebra)의 적용만이 남게된다. 任意的 행렬 [K]가 주어졌을때 이 행렬의 수렴성과 반복연산에 의한 해의 오차정도를 추정하기 위해 행렬노름(matrix norm) $\|K\|$ 가 사용되는데 아래와 같이 정의 될 수 있다.

$$\|K\| = \max_{i \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |k_{ij}| \quad (1)$$

여기서, k_{ij} 는 강성도행렬을 나타낸다. 한편, 강성도행렬의 수렴반경(spectral radius) $\rho(K)$ 은 강성도행렬의 고유치(eigen values)로 표현되며 식 (2)와 같다.

$$\rho(K) = \max_{i \leq j \leq n} |\lambda_i| \quad (2)$$

한편, 수렴반경과 매트릭스 Norm은 아래와 같은 성질을 갖는다.

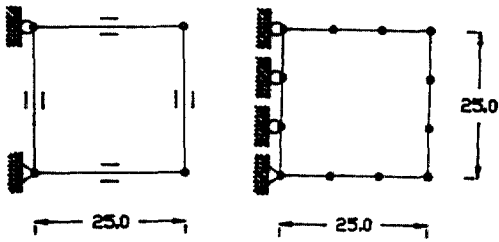
$$\rho(K) \leq \|K\| \quad (3)$$

유한요소법에서는 수학적 표현의 수렴반경을 條件數(condition number) C(K)라 하여 식 (2)와 유사한 형태로 정의되며 이 값은 해의 수렴성 및 반올림오차(round-off errors)등의 수치오차정도를 추정하는데 사용되며 조건수의 값이 커질수록 惡조건행렬(ill-conditioned matrix)이 되며 작아질수록 好조건행렬(well-conditioned matrix)이 된다.

$$C(K) = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|} \quad (4)$$

르장드르함수는 直交性(orthogonality)을 갖는 관계로 1차원 문제의 경우는 강성도행렬이 대각선행렬(diagonal matrix)이 되며, 2차원 문제에서도 대각선행렬(dominantly diagonal matrix)이 되므로 非대각선행(非-diagonal terms)들이 거의 0이 된다. 이러한 이유 때문에 수치연산의 효율성을 증가시키고 동시에 구조해석에 필요한 컴퓨터 CPU시간은

1 CUBIC - ELEMENT



(Hierarchical)

(Isoparametric)

$$C(K)^{hi} = 36.45$$

$$C(K)^{iso} = 390.82$$

그림 2. Improvement of conditioning associated with hierarchical formulation.

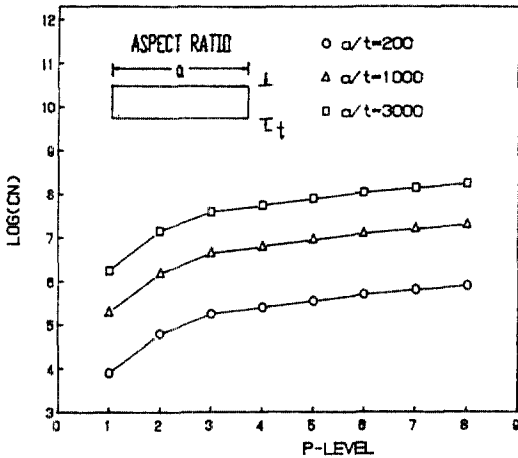


그림 3. Condition number of a/t ratio for different p-levels.

식 (5)과 같이 정의되므로 강성도행렬의 분산도가 작은 계층요소가 유리하게 된다.

$$CPU\ TIME = C \cdot N^\beta \quad (5)$$

여기서, C는 임의의 상수, N은 총자유도수, β 는 강성도행렬의 분산정도(sparseness)를 나타내므로 CPU시간은 주로 총자유도수와 강성도행렬의 분산 정도에 따라 결정된다. 한편, 그림 2에서 동일한 3차 형상함수가 하나는 등매개변수요소에 의한 비계층 형상함수와 적분형 르장드르함수가 사용된 계층 형상함수의 조건수가 비교되고 있는데 이 경우의 강

성도행렬은 정규화된 행렬(normalized stiffness matrix)로 강성도행렬 [K]에 강성도행렬의 대각선항(diagonal terms)의 제곱근의 역수로 정의되는 [S] 행렬을 앞,뒤로 곱하여 정의되는 $[S]^T[K][S]$ 이 된다. 그림에서 보는 바와 같이 조건수가 10배가량 계층요소의 경우가 작은 것을 알 수 있으며, 그림 3은 원형평판을 축대칭요소로 모델링한 경우인데 반경과 두께의 비에 따른 Log C(K)가 도시되어 있는데 형상비(a/t ratio)가 200에서 3000까지 변화했을 때 Log C(K)의 증가를 보여주고 있다. 여기서 Log C(K)는 유효자리수의 손실(number of digits lost)을 나타내며 이 값이 커질수록 유효자리수의 손실이 커지게 되므로 해의 정확도 및 수렴성이 나빠지게 되고 수치적 안정성(numerical stability)이 감소된다. 특히, 컴퓨터가 보유한 유효자리수가 적은 소형컴퓨터사용에 계층요소는 적합한 모델이라 할 수 있다.

2.3 選擇的 형상함수次數의 분포

종래의 유한요소방식에서는 해석영역의 主要素에 동일한 次數의 형상함수를 사용하는 반면에 새로 제안되는 계층요소는 요소와 요소간의 서로 다른 형상함수의 차수를 사용할 수 있다. 즉, P차와 P+1차로 정의되는 요소가 인접되어 있을 때 共通境界(inter-element)에서의 연속성은 낮은 형상함수의 차수 P로 일치시키고 그러기 위해서 P차에서 P+1차의 고차항에 관한 절점은 경계조건으로 구속시킴으로써 만족된다. 이에 관한 예제로 원형봉의 내부에 동전모양의 균열(penny-shaped crack)이 발생되었을 때 그림 4와 같이 3개의 체분형태로 모델링하였다. Mesh A는 4개의 요소로 모델링하고 형상함수의 次數를 P라고 할 때 P=4로부터 P=8까지 증가시키며, Mesh B는 균열선단부근의 2개요소는 P라고 하고 나머지는 4차로 고정시킨 후 P=4에서 P=8까지 증가시켜 보았으며 이에 대한 수렴성이 그림 5에 나타나 있다. 이 때 P차와 4차가 만나는 공통 경계에서는 공히 4차로 연속성을 이루었으며, 공통 경계에서 P차로 연속성을 유지하지 않은 이유는 高次(higher order)로 연속성을 유지하는 것이 低次(lower order)로 인접요소간의 연속성을 일치시키는 것보다 물론 정확도는 미소한 차이로 증가되나 高次를 사용하는 까닭에 자유도의 증가가 발생하게

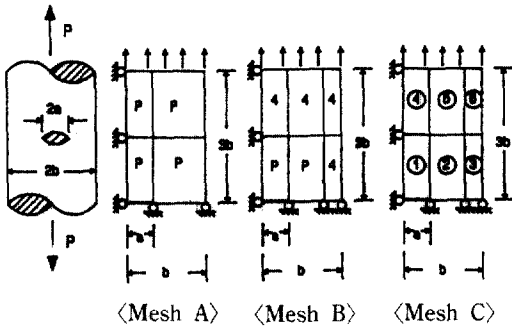


그림 4. P-version model for penny-shaped crack in a round bar.

되어 전체적인 수렴속도를 비교하면 低次로 연속성을 유지하는 것이 보다 효율적이라 할 수 있으며 高次와 低次의 차이가 커지면 커질수록 이에 대한 차이가 뚜렷해지는 것을 알 수 있었다. 한편, Mesh C는 균열선단을 포함하는 2개의 요소에서도 서로 다른 형상함수를 사용하였을 때 이에 대한 수렴성이 표 1에 나타나 있다.

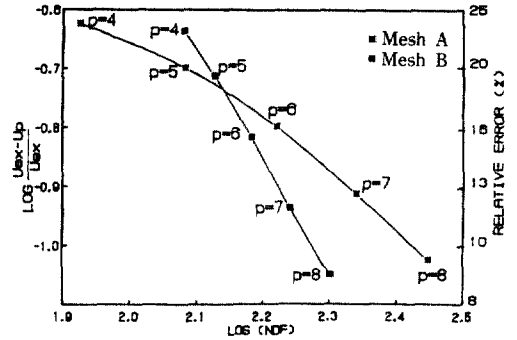


그림 5. Relative error in strain energy vs. number of D.O.F. for penny-shaped crack in a round bar.

3. 軸對稱 階層要素의 P-version 모델

3.1 積分型 르장드르 形狀函數

적분형 르장드르다항식에 근거한 계층적 형상함수는 $[-1,1] \times [-1,1]$ 로 정의되는 正規領域(stan-

표 1. Optimal Sequence of P-distribution of Penny-shaped Crack in a Round Bar

Polynomial Order (Element No.)						Number of D.O.F.	LOG $\frac{U_{ex}-U_p}{U_{ex}}$	Relative Error (%)
1	2	3	4	5	6			
4	4	4	4	4	4	120	-0.63546	23.15
4	5	4	4	4	4	129	-0.65983	21.89
4	6	4	4	4	4	136	-0.67658	21.06
4	7	4	4	4	4	147	-0.69039	20.40
4	8	4	4	4	4	160	-0.69535	20.17
5	4	4	4	4	4	129	-0.69162	20.34
5	5	4	4	4	4	134	-0.71276	19.37
5	6	4	4	4	4	145	-0.75135	17.72
6	4	4	4	4	4	136	-0.72632	18.78
6	5	4	4	4	4	145	-0.76915	17.05
6	6	4	4	4	4	152	-0.81551	15.29
6	7	4	4	4	4	166	-0.86687	13.59
7	5	4	4	4	4	154	-0.81156	15.43
7	6	4	4	4	4	167	-0.87082	13.46
7	7	4	4	4	4	174	-0.93507	11.61
7*	8	4	4	4	4	192	-0.98793	10.30
8	7	4	4	4	4	189	-0.98727	10.28
8	8	4	4	4	4	200	-1.04923	8.93

dard domain)에서 정의되며 3개의 그룹으로 나누어진다. 첫번째 그룹은 基本모우드(basic mode)로 P=1일 때의 선형 형상함수를 의미하고 두번째 그룹은 P=2부터는 低매개변수요소(subparametric element)를 사용하기 때문에 절점의 좌표값을 갖지 않는 절점(nodeless node)이 꼭지점을 제외한 4개의 변에 추가되는 모우드로 周邊모우드(edge mode)이며 식 (6)과 같이 정의된다.

$$\{P_i(\xi) \mid i \geq 2, \xi \in [-1, 1], P_i(-1) = P_i(1) = 0\} \quad (6)$$

여기서, $P_i(\xi)$ 는 적분형 르장드르함수로 식 (7)과 같다.

$$P_i(\xi) = \int_{-1}^{\xi} L_{i-1}(t) dt \quad (7)$$

여기서, $L_{i-1}(t)$ 는 Rodrigues에 의해 식 (8)과 같이 정의된다.

$$L_n(t) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$$

한편, $\eta=1$ 일 때의 형상함수는 식 (9)와 같으며 같은 방법으로 사각형 계층요소의 4개변에 대한 형상함수를 정의할 수 있다.

$$N_i(\xi, \eta) = P_i(\xi) \frac{(\eta + 1)}{2} \quad (9)$$

세번째 그룹은 거품모우드(bubble mode) 또는, 内部모우드(internal mode)라 하는 것인데 이것은 유한요소解의 수렴조건중 하나인 完全性(completeness)를 만족시켜주기 위한 모우드로 $i+j=P$ 라고 했을 때 P가 4차이상부터 발생하게 되며 식 (10)과 같이 정의되는데 요소의 변에서는 모두 0이 됨을 만족시켜 준다.

$$N_i(\xi, \eta) = P_i(\xi) \cdot P_j(\eta), \quad i, j \geq 2 \quad (10)$$

3.2 剛性度행렬

만약에 기준축을 중심으로 한 회전체가 기하학적 및 재료적 성질이 원주방향의 좌표 θ 에 대해 독립적일 때 이를 軸對稱이라 정의한다. 다시 말하면 外的으로는 3차원 입방체이나 수학적으로는 2차원으로 정식화 시킬 수 있으므로 半徑방향 변위(radial displacement) u 와 軸방향 변위(axial displacement)

w 로 나타낼 수 있다. 유한요소 정식화과정은 근본적으로 평면응력과 유사하며 응력과 변형도 관계는 식 (11)과 같다.

$$\{\sigma_r \sigma_\theta \sigma_z \sigma_{zr}\} = [D] \{ \epsilon_r \epsilon_\theta \epsilon_z \epsilon_{zr} \} - \{\epsilon_0\} + \{\sigma_0\} \quad (11)$$

여기서, $[D]$ 는 彈性행렬(elasticity matrix)이고 재료가 균일하고 等方性이면 식 (12)와 같다.

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \text{Symm.} & & 1 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (12)$$

한편, 변위와 변형도 관계로부터 식 (13)을 유도할 수 있으며 $[B]$ 를 변형도행렬이라 한다.

$$[B] = \begin{bmatrix} \partial/\partial r & 0 \\ 1/r & 0 \\ 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial z & \partial/\partial r \end{bmatrix} \quad (13)$$

그러므로, 강성도행렬은 식 (14)와 같이 나타낼 수 있다.

$$[K]_{ij}^e = 2\pi \int B_i^T \cdot D \cdot B_j r dr dz \quad (14)$$

여기서, 반경방향의 좌표 r 은 식 (15)과 같으며 N_i 는 형상함수를 나타낸다.

$$r = \sum_{i=1}^{NODE} r_i \cdot N_i \quad (15)$$

4. 軸對稱要素의 通用性

4.1 形狀比

Robinson⁽¹²⁾과 Meyer⁽¹³⁾의 논문에 의하면 종래의 변위법에 근거한 h-version 유한요소로 單一요소(single element) 테스트에서 형상비가 좋은 변위값을 갖기 위해서는 7까지, 그리고 좋은 응력값을 갖기

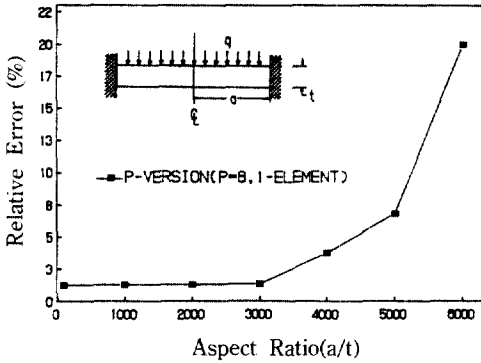


그림 6. Relative error in displacements with respect to aspect ratio a/t.

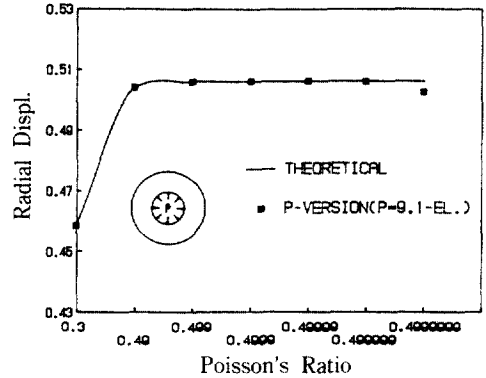


그림 7. Radial displacements for incompressible materials.

위해서는 3까지 사용할 수 있음을 보여 주고 있으며 형상비가 커짐에 따라 수치오차가 커지므로 응력경사가 큰 특이점 부근에서는 가급적 형상비가 1이 되도록 제안하고 있다. 물론, 요소의 종류에 따라 형상비의 기준이 다소 변화될 수 있으나 대체로 이와 같은 기준을 적용하더라도 큰 무리는 없을 것이다. 본 연구에 사용되는 계층요소를 사용하게 되면 이러한 형상비에 대한 기준이 무의미해지는 것을 알 수 있다. 다시 말하면, h-version 테스트와 같이 단일 요소에 P=8차의 형상함수를 사용하여 고정단으로 지지된 원형평판의 반경과 두께의 형상비를 a/t라 할 때 그림 6에서 보는 바와 같이 a/t가 10에서 6000까지 변화함에 따른 변위의 상대오차가 도시되어 있다. 이에 의하면 a/t=3000까지는 상대오차가 2%미만이고, a/t=4000일 때는 3.7%, a/t=5000일 때는 6.8%, 그리고 a/t 6000일 때는 22.0%로 오차가 커짐을 볼 수 있다. 허용오차를 5%로 보면 P=8일 때 형상비 a/t=4000까지 사용하더라도 전혀 영향을 받지 않음을 알 수 있으므로 유한대판법(finite strip method)의 개념을 굳이 사용할 필요가 없어진다.

4.2 非壓縮性 材料

균일하고 등방성을 갖는 재료의 선형탄성 문제에서 식 (12)로 부터 라미(Lame)의 상수 λ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (16)$$

여기서 ν 가 0.5에 접근하는 非壓縮性 材料이면 $\lambda \rightarrow \infty$ 가 되며 剛性도가 ∞ 가 되어 강성도가 과대 추정된다. 이와 같은 현상을 포아슨잠김현상(Poisson locking phenomenon)이라 하는데 본 연구에서는 p-version 또는 hp-version 유한요소법을 사용하게 되면 이와 같은 현상을 피할 수 있다. 예를 들면, 單位하중의 내압을 받는 두꺼운 실린더에서 탄성계수 $E=1.0 \times 10^6$ psi, 內徑 $r_i=3.0$ in 이고 外徑 $r_o=9.0$ in 이라 할 때 P=9인 단일-요소의 계층적 축대칭요소로 모델링하여 포아슨비 ν 를 0.3에서 0.499999로 변화함에 따른 반경방향의 변위가 그림 7에 圖示되어 있다. 같은 요소로 해석한 正規變位(normalized displacement) 및 正規應力(normalized stress)은 근사해/실체해로 정의하였는데, 그 값이 1.0이 되면 근사해와 실체해가 같음을 의미하며 이들의 결과가 SAP90 프로그램의 결과와 비교되어 표 2에 표시되어 있다.

5. 數值解析 例

5.1 두꺼운 圓管(Thick-walled cylinder)

內徑이 2.5 in이고 外徑이 17.5 in인 두꺼운 원관이 內壓을 1000 psi을 받고 있다. 탄성계수 E는 30×10^6 psi이고 포아슨비 ν 는 0.0이라 할 때, 반경방향에 따른 변위가 Timoshenko⁽¹⁴⁾에 의하면 평면변형(plane strain)조건일 때 식 (17)과 같이 구해진다.

$$u = \frac{(1+\nu) \cdot p \cdot R_i^2}{E \cdot (R_o^2 - R_i^2)} [R_o^2/r + (1-2\nu) \cdot r] \quad (17)$$

표 2. Normalized radial displacements and stresses

Poisson's ratio (ν)	Radial displacement		Radial stress	
	SAP90	P-version	SAP90	P-versio
0.3	1.000	1.000	0.98	1.00
0.49	1.000	1.000	0.78	0.99
0.499	0.986	1.000	1.12	0.94
0.4999	0.879	1.000	17.82	0.38
0.49999		1.000		5.21
0.499999		0.999		61.13
0.4999999		0.993		
0.49999999		0.932		

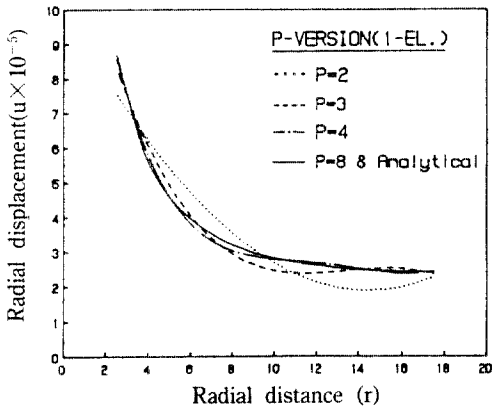


그림 8. Radial displacements along the thickness.

여기서, p 는 内壓을 나타내며 R_i 와 R_o 는 각각 内徑과 外徑을 의미한다. p -version 해석모델은 單一 요소에 형상함수의 次數는 1에서 10까지 변화시켰다. 次數의 변화에 대한 변위 및 응력의 수렴성이 그림 8과 그림 9에서 검토되었다. 변위는 3차부터 수렴하기 시작하였고 8차인 경우는 거의 이론값과 일치하였다. 한편, 응력은 원주방향의 응력은 P 가 2차부터 수렴하기 시작하는데 비하여 반경방향 즉, 수직응력은 P 가 4차부터 수렴하는 차이를 보여 주고 있다.

5.2 圓形棒의 축대칭 V-形 龜裂(Axisymmetric notch in a round bar)

圓形 中實棒에 V형으로 축대칭균열이 발생될 때 균열선단에서의 응력확대계수가 연구되었다. 통상, 이와 같은 문제는 2차원 축대칭요소를 사용하여

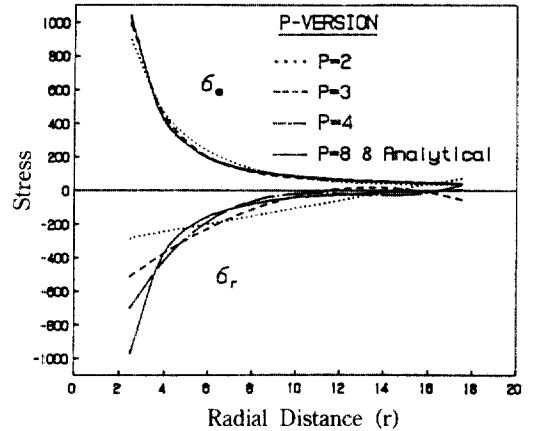


그림 9. Radial and circumferential stresses along the thickness with different p -levels.

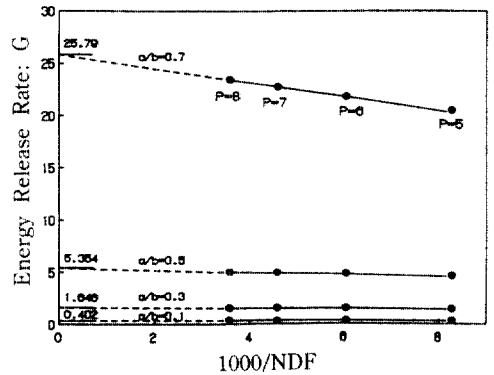


그림 10. Strong linearity of 1000/NDF versus strain energy release rate G .

왔으나 해의 정확도와 수렴성이 떨어지는 문제가 지적되어 최근의 연구논문^(11,15)에서는 3차원 고체요소를 사용하여 모델링하여야 하며 해의 정확도를 높이기 위해서는 균열선단에서 3차원 四分點要素(3-D quarter-point element)를 사용하게 된다. Banks-Sills 등⁽¹⁵⁾은 3차원 모델링에 의한 27절점 特異要素를 사용하였는데 총절점수가 무려 3927개가 사용되었다. 여기에 경계조건을 제외한 사용 절점수에 절점당의 자유도를 곱해보면 소요되는 총 자유도수를 예측할 수 있다. 그러나, 2차원 축대칭 계층요소를 사용하여 같은 수준의 정확도를 갖는 p -version 모델은 4개 요소에 P 8차를 사용하였을 때 불과 280 정도의 총 자유도수가 필요하게 된다. 식 (5)를 감

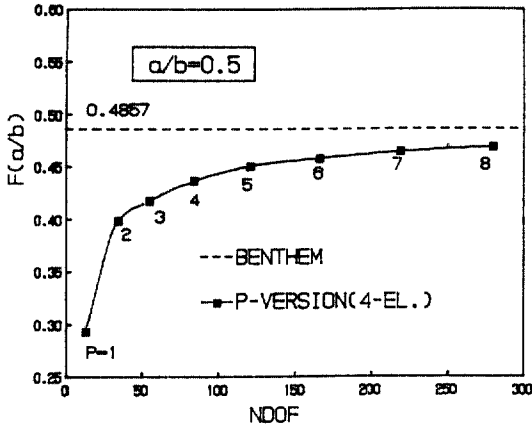


그림 11. Convergence characteristics of correction factor $F(a/b)$ with respect to number of D.O.F.

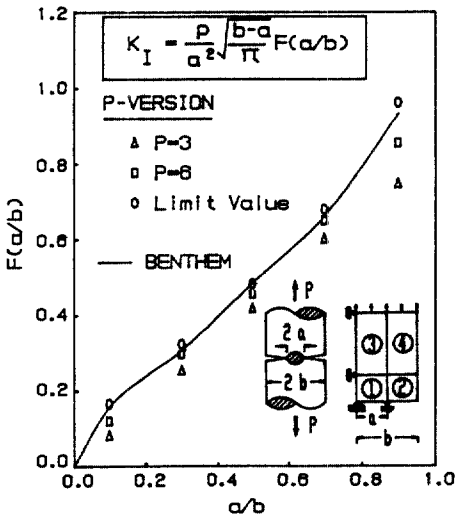


그림 12. Correction factor $F(a/b)$ with respect to a/b ratio.

안한다면 쉽게 소요되는 컴퓨터 CPU 시간을 비교 해볼 수 있을 것이다. 본 연구에서는 응력확대계수를 산정하기 위해 假想龜裂擴張法(virtual crack extension method)이 사용되었으며 그림 10에서 보듯이 자유도의 逆數와 에너지방출률(energy release rate) 사이에 강한 線形性(strong linearity)이 있음을 발견할 수 있다. Szabo⁽⁴⁾의 인장력을 받는 균열된 평판해석과 본인에 의한 균열된 셀문제해석⁽⁷⁾에서도 이와 같은 선형성을 발견할 수 있었다. 이로 부터

外挿法(extrapolation method)을 사용하게 되면 자유도가 무한대에 접근할 때의 값을 산정할 수 있다. 이 값은 곧, 유한요소법으로 예측할 수 있는 正解(exact solution)라 할 수 있으며 이러한 성질을 이용하면 파괴역학해석은 물론 일반 구조해석에서도 P의 차수를 크게 증가시키지 않고도 정확한 값을 예측할 수 있게 한다. 그림 11은 자유도의 증가에 따른 형상계수(shape factor or correction factor) $F(a/b)$ 가 $a/b=0.5$ 일 때 수렴하는 양상을 보여주고 있으며 V형 축대칭균열의 응력확대계수는 그림 12에 나타나 있다. 한편, 그림 12는 균열이 진전함에 따라 4개요소로 모델링한 p-version 모델이 P=3차와 P=5차 그리고 외삽법에 의해 구한 한계값(limit value)들과 Benthem⁽¹⁶⁾의 境界選點法(boundary collocation method)에 의한 값과 좋은 비교를 보여주고 있다.

6. 結 論

축대칭 회전체를 해석하기 위해서 적분형 르장드르함수에 근거한 축대칭 계층요소가 제안되었다. 변위와 응력값의 정확도는 물론이고 수렴속도가 종래의 h-version 유한요소법에 비해 훨씬 빠른 것을 알 수 있었다. 계층요소의 장점을 간략히 정리하면 구조물을 형상화하는데 최소개수의 요소가 사용되는 모델링의 간편성을 들 수 있으며 르장드르함수가 갖는 직교성에 기인하여 강성도행렬이 대각선화는 물론 好조건행렬(well-conditioned matrix)이 되는 까닭에 수치오차가 현격히 줄어들었으며 또한, 요소와 요소간에 서로 다른 형상함수의 차수를 사용할 수 있다는 장점이 있음을 보여 주었다. 한편, 응력 특이성이 발생하는 균열문제에서 자유도의 逆數와 에너지방출률 또는 응력확대계수사이에는 강한 선형성이 있음을 알 수 있었으며 이를 사용하여 자유도가 무한대가 될 경우의 한계값(limit value)을 계산할 수 있기 때문에 일반적인 구조물의 유한요소해석도 가능함을 제시하고 있다. 이와 같은 결과를 토대로 본 연구에서 제안하는 축대칭 계층요소의 p-version 모델은 현재까지 개발된 많은 축대칭요소들에 對 상대적으로 많은 장점이 있다고 결론지을 수 있다.

参 考 文 献

1. O.C. Zienkiewicz, B.M. Iron, J. Campbell and F. Scott, "Three dimensional stress analysis", In High Speed Computing of Elastic Structure, Vol.1, pp.413-432, *Proceedings of the Symposium of International Union of Theoretical and Applied Mechanics*, Liege (1970).
2. A.G. Peano, "Hierarchies of conforming finite elements for plane elasticity and plate bending", *Comput. Math. Applic.* Vol.2, pp.211-224 (1976).
3. M.P. Rossow, K.C. Chen and J.C. Lee, "Computer implementation of the constraint method", *Compu. Struct.* Vol.6, pp.203-209 (1976).
4. B.A. Szabo and K.A. Mehta, "p-Convergent finite element approximations in fracture mechanics", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.12, pp.551-561 (1978).
5. I. Babuska and M.R. Dorr, "Error estimates for the combined h and p-version of the finite element method", *Num. Math.*, Vol.37, pp.257-277 (1981).
6. S. Holzer, E. Rank and H. Werner, "An implementation of the hp-version of the finite element method for Reissner-Mindlin plate problems", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.30, pp.459-471 (1990).
7. K.S. Woo and P.K. Basu, "Analysis of singular cylindrical shells by p-version of F.E.M.", *Int. J. Solids & Struct.*, Vol.25, pp.151-165 (1989).
8. O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu and N.G. Gong, "Effective and practical h-p-version adaptive analysis procedures for the finite element method", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.28, pp.879-891 (1989).
9. K.S. Surana and N.J. Orth, "Axisymmetric shell elements for heat conduction with p-approximation in the thickness direction", *Computers & Structures*, Vol.33, No.3, pp.689-705 (1989).
10. K.S. Surana and N.J. Orth, "p-Approximation axisymmetric shell elements for heat conduction in laminated composites", *Computers & Structures*, Vol.33, No.5, pp.1251-1265 (1989).
11. K.S. Surana and N.J. Orth, "P-Version hierarchical axisymmetric shell element", *Computers & Structures*, Vol.39, No.3/4, pp.257-268 (1991).
12. J. Robinson, "Single Element Test", *CMAME*, Vol. 7, pp.191-200 (1976).
13. C. Meyer, "Finite Element Idealization", *ASCE* (1987).
14. S.P. Timoshenko and F.W. Goodier, "*Theory of Elasticity*", 3rd Edition (1984).
15. L. Banks-Sills and R. Kopelman, "On the computation of stress intensity factors for three-dimensional geometries with singular, twenty-seven-noded, distorted elements", *Computers & Structures*, Vol.41, No.5, pp.981-986 (1991).
16. H. Tada, P. Paris and G.R. Irwin, "*The Stress Analysis of Cracks Handbook*", Second Edition, Paris Production (1985).

(接受：1992. 8. 10)