측정 오차가 계산 결과에 미치는 영향

Sensitivity and Uncertainty Analysis

한 도 영
D. Y. Han
국민대학교

• 1949년생
• 시스템 및 자동 제어 분야에 관심을 가지고 있음.

1. 머릿말

측정시 독립 변수의 오차가 발생하게 되면 변수들의 수학적 관계로 구할 수 있는 결과도 역시 오차를 갖게 된다. 그런데 변수들의 측정시 발생하는 오차는 각 측정 변수에 따라 결과에 미치는 영향이 다르다. 어떤 변수의 오차는 결과에 큰 영향을 미치고, 다른 변수의 오차는 영향을 거의 주지 않는 경우가 있다. 그러므로 결과에 큰 영향을 주는 변수는 측정의 정확도에 큰 비중을 두어야 하고, 그렇지 않은 변수는 그다지 크지 않은 비중을 두는 것이 타당하다. 이런 문제를 고려하기 위하여 불확정성(Uncertainty)의 개념을 사용하여 민감도(Sensitivity)를 구함으로서 측정 변수가 결과에 미치는 영향을 평가할 수 있다. 별개의 측정 변수가 결과에 차지하는 비중을 변수의 측정전에 계산하기 위해서는 먼저 계산식의 수학적 처리를 거쳐 민감도식(Sensitivity Equation)을 세우고, 민감도 계수(Sensitivity Factor)를 구한다. 그리고 최종적으로 각 변수에 대한 수치적 값을 이용하여 결과의 불확정성을 계산한다.

2. 불확정성 분석

먼저 쉬운 예를 생각해 보자. 출력 P를 구하기 위해 전압(E), 전류(I)를 측정하는 경우를 생각하면 식(1)의 관계가 성립한다.

$$P = EI \quad \cdots\cdots (1)$$

각 항에 대하여 오차를 고려하여 표시하면

$$(P + p) = (E + e)\ (I + i) \quad \cdots\cdots (2)$$

$$P + p = EI + eI + iE + ei \quad \cdots\cdots (3)$$

여기서 매우 작은 값인 ei를 생략하고 식(1)을 식(3)에 대입하면 결과의 오차(p)에 대한 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$p = eI + iE \quad \cdots\cdots (4)$$

식(4)를 식(1)로 나누어 무차원 식으로 유도하면

$$\frac{p}{p}=\frac{eI}{EI}+\frac{iE}{EI} \quad \cdots\cdots (5)$$

변수 ε를 무차원 불확정성으로 정의해서 사용하면 아래와 같은 민감도 식이 성립한다.

$$\varepsilon_P=\varepsilon_E+\varepsilon_I \quad \cdots\cdots (6)$$

식(6)으로 부터 다음의 사항에 대해서 관찰할 수 있다.

− ε_E, ε_I의 계수가 둘다 1.0이므로 결과의 불확정성을 결정하는데 같은 중요성을 가지므로 그들을 측정하는데 똑같은 비중을 두어야 한다.

− E 및 I에서의 1% 오차는 P의 1% 오차를 가져 온다.

이제 일반적인 민감도 식을 유도해 보자. 결과값 R을 측정값 X, Y의 함수라 하면 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$R=f(X,\ Y) \quad \cdots\cdots (7)$$

R에 대한 불확정성을 결정하기 위해 식(7)에 오차를 고려하여 표시하면

$$R+r=f(X,\ Y)+\frac{\partial f}{\partial X}x+\frac{\partial f}{\partial Y}y + \text{고차항} \quad \cdots\cdots (8)$$

작은 값을 가지는 고차항은 무시하고 식(8)에 식(7)을 대입하면

$$r=\frac{\partial f}{\partial X}x+\frac{\partial f}{\partial Y}y \quad \cdots\cdots (9)$$

여기서 r은 결과 R의 불확정성을 나타내고, x, y는 측정값 X, Y에 대한 불확정성을 나타낸다. 식(9)를 식(7)로 나누면 무차원 불확정성 ε_R을 얻을수 있다.

$$\frac{r}{R}=\varepsilon_R=\frac{\frac{\partial f}{\partial X}x}{f(X,\ Y)}+\frac{\frac{\partial f}{\partial Y}y}{f(X,\ Y)} \quad \cdots\cdots (10)$$

식을 더욱 단순화하기 위해 식(10)의 첫째항에 X/X, 둘째항에 Y/Y을 곱하면

$$\varepsilon_R=\frac{\frac{\partial f}{\partial X}X}{f(X,\ Y)}\frac{x}{X}+\frac{\frac{\partial f}{\partial Y}Y}{f(X,\ Y)}\frac{y}{Y} \quad \cdots\cdots (11)$$

윗식을 정리하면

$$\varepsilon_R=\frac{\frac{\partial f}{\partial X}X}{f(X,\ Y)}\varepsilon X+\frac{\frac{\partial f}{\partial Y}Y}{f(X,\ Y)}\varepsilon Y \quad \cdots\cdots (12)$$

무차원 오차를 발생하는 요소를 민감도 계수 S로 정의하면 식(12)는 아래식과 같이 표시되며 이 식을 민감도 식이라 부른다.

$$\varepsilon_R=S_X\ \varepsilon_X+S_Y\ \varepsilon_Y \quad \cdots\cdots (13)$$

식(13)에서 ε_R, ε_X, ε_Y는 R, X, Y에 대한 무차원 불확정성이고 S_X는 ε_R에 대한 ε_X의 민감도, S_Y는 ε_R에 대한 ε_Y의 민감도이며 S_X, S_Y는 둘다 무차원 수 이다.

위에서 고려했던 민감도 식(13)을 더 일반화 시키면 다음과 같다.

$$\varepsilon_R=\sum_{i=1}^{n}S_i\ \varepsilon_i \quad \cdots\cdots (14)$$

여기서 S_i는 무차원 민감도 계수이고 εi는 무차원 불확정성이다.

그러나 위의 식을 사용하여 결과를 계산하려하면 εi의 부호에 대한 문제가 발생한다. εi는 대부분 표준 정규 분포를 가지는 변수들이므로 부호를 알수 없기 때문에 어떤 경우에는 같은 크기의 반대 부호를 가질 수 있고 이러한 이유로 단순히 변수들을 더하는 것으로는 정확한 결과를 얻을수 없다.

이러한 문제점들을 보완하기 위해 식(14)의 각 항들을 제곱해 주면

$$\varepsilon_R^2=S_1^2\ \varepsilon_1^2+S_2^2\varepsilon_2^2+\cdots+S_n^2\varepsilon_n^2 + 2S_1S_2\varepsilon_1\varepsilon_2+\cdots+2S_{n-1}S_n\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n \quad \cdots\cdots (15)$$

윗식에서 $S_i^2\ \varepsilon_i^2$의 모든 항은 부호에 상관없이 양의 값을 가지나 $2\,S_i\,S_j\,\varepsilon_i\,\varepsilon_j$의 값은 일부는 양의 값을, 일부는 음의 값을 갖게 되며 그 평균값이 '0'이 되므로 이 항들을 소거하면

$$\varepsilon_R^2 = S_1^2\varepsilon_1^2 + S_2^2\varepsilon_2^2 + \cdots + S_n^2\varepsilon_n^2 \cdots\cdots\cdots (16)$$

$$\varepsilon_R = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} S_i^2\ \varepsilon_i^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

즉 위의 방정식은 측정값의 오차로 결과의 불확정성을 계산할 수 있는 식으로, 특히 ε_i가 비종속 오차일때 사용될 수 있다.

3. 적용시 주의사항

만약 오차 ε_i가 종속의 형태를 가지고 있으면 식(17)을 사용하기 전에 먼저 수학적인 처리가 필요하다. 예를 들어 밀도의 방정식을 생각해 보자. 질량 m, 길이 l, 폭 w, 높이 h를 측정하여 밀도를 계산할 경우 다음과 같은 방정식을 사용할 수 있다.

$$\rho = \frac{m}{lwh} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

이 식의 민감도식은

$$\varepsilon\rho = \varepsilon m - \varepsilon l - \varepsilon w - \varepsilon h \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

그러나 길이, 폭, 높이를 측정할때는 일반적으로 같은 측정 기구를 사용하므로 εl, εw, εh는 종속 관계가 성립되어 식(17)을 사용하여 결과의 불확정성값 $\varepsilon\rho$를 계산할때는 다음과 같은 식을 사용하여야 한다.

$$\varepsilon\rho = \sqrt{\varepsilon m^2 + (\varepsilon l + \varepsilon w + \varepsilon h)^2} \cdots\cdots\cdots (20)$$

또한 식(17)은 개별 측정값의 정확성(ε_i)으로 결과의 정확성(ε_R)을 계산할때 사용하는 식이므로, 정확도를 표시하는 여러가지 지표, 즉 확률 오차, 표준 편차, 최대 오차등에 공통적으로 사용할 수 있다. 하지만 어떤 특정한 지표를 사용할 경우에도 항상 같은 지표를 일관성 있게 사용하여야 한다. 만약 어떤 ε_i의 측정값 분석에 확률 오차를 사용하였을 경우 다른 ε_i도 확률 오차를 사용하여야 하며, ε_R도 확률 오차로 계산 되어져야 한다.

4. 맺음말

복잡한 수학적 연산을 거치지 않고 측정 변수의 민감도와 각 측정 변수의 불확정성이 계산 결과에 미치는 영향을 실험전에 계산할 수 있는 방법에 대하여 고찰하였다. 측정에 앞서 측정 변수들이 결과에서 차지하는 영향을 고려할 수 있음은 측정 장비의 선택이나 측정의 주요 변수를 결정하는 문제에 적용할 수 있고 그 이외의 여러가지 부분에 효과적으로 사용될 수 있다.

부록

예제 1) 풍선의 부피

공기의 질량 m, 온도 T, 압력 P의 측정을 통해 풍선의 부피(V)를 결정하고자 한다. 질량, 온도, 압력을 변수로 하는 풍선 부피의 계산식은 다음과 같다.

$$V = \frac{mR(T + 273)}{(101.3 + p)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

식(14)를 사용하여 민감도식을 구하면

$$\varepsilon_V = \varepsilon_m + \left[\frac{T}{T + 273}\right]\varepsilon_T - \left[\frac{P}{p + 101.3}\right]\varepsilon_P$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (22)$$

m의 값 0.45, T의 값 21.1, P의 값 13.79에 대해서

$$\varepsilon_V = \varepsilon_m + 0.072\ \varepsilon_T - 0.120\ \varepsilon_P \cdots\cdots\cdots\cdots (23)$$

식(23)에서 보듯이 질량 m에 민감도가 다른 변수의 민감도 보다 크므로 풍선의 부피를 결정할때 질량을 더욱 정확히 측정함이 요구된다.

또한 식(17)에 의하여 부피의 불확정성을 계산할때 식(24)를 사용할 수 있다.

$$\varepsilon_V = \sqrt{\varepsilon_m{}^2 + (0.072\ \varepsilon_T)^2 + (0.120\ \varepsilon_P)^2} \quad \cdots\cdots (24)$$

예제 2) 자유대류

수직 평판을 통과하는 층류 유동의 대류 계수 Nu(Nusselt Number)를 구하는 관계식은 식(25)과 같다.

$$Nu = (Gr\ Pr^2)^{1/4} = Gr^{1/4}\ Pr^{1/2} \cdots\cdots (25)$$

여기서 Gr은 Grashof Number를 나타내고 Pr은 Prandtl Number를 나타낸다.

식(14)에 의해 민감도식을 구하면

$$\varepsilon_{Nu} = \frac{\varepsilon_{Pr}}{2} + \frac{\varepsilon_{Gr}}{4} \quad \cdots\cdots (26)$$

식(26)에서 보듯이 ε_{Nu}에 대하여 ε_{Gr}보다 ε_{Pr}이 더욱 민감함을 알수 있다.

또한 식(17)에 의한 결과의 불확정성의 계산식을 구하면

$$\varepsilon_{Nu} = \left[\frac{\varepsilon_{Pr}}{2}\right]^2 + \left[\frac{\varepsilon_{Gr}}{4}\right]^2 \quad \cdots\cdots (27)$$

Gr, *Pr*에 대한 아래와 같은 전형적인 수치와 불확정성 값에 대하여 무차원화된 값을 구해보면 다음과 같다.

$$Pr = 0.111 \pm 0.0005 \cdots\cdots (28)$$
$$Gr = 73.5 \times 10^{10} \pm 10^8$$

$$\varepsilon_{Pr} = 0.045 \cdots\cdots (29)$$
$$\varepsilon_{Gr} = 0.000136$$

식(28)에서 *Gr*의 불확정성 값이 *Pr*의 불확정성 값보다 큰 값을 가지고 있으므로 측정시 더욱 중요시 될것 같지만, 실제로는 식(*29*)의 무차원화 된 값은 반대의 결과를 보이고 있으므로, *Pr*의 값에 비해 큰 영향을 나타내지 않음을 알 수 있다.