

## 두 등온 수평 평판 사이의 상변화 열전달

### Heat Transfer with Phase Change between Two Isothermal Horizontal Plates

서 용 권\*  
Y. K. Suh

Key Words : 상변화 열전달(Heat transfer with phase change), 히스테리시스(Hysteresis), 베나드 대류(Benard convection), 스펙트럴 방법(Spectral method).

#### ABSTRACT

A two-dimensional Benard-convection system with a phase-change material inside has been analysed. The main purpose of the present study is to clarify the basic reason of the hysteresis found by the previous investigators. The interface between the solid and the liquid is assumed to be planar. The analysis was performed with heat transfer rates under the steady state on the interface. It was found that the hysteresis occurs due to the abrupt increase in the heat transfer rate at the onset of natural convection in the classical Benard-convection system. The spectral method was applied to obtain the steady solution of the natural convection for the specific material and to confirm the hysteresis phenomenon.

#### 기 호 설 명

<p><math>f</math> : 함수</p> <p><math>g</math> : 중력가속도</p> <p><math>H</math> : 평판사이의 간격</p> <p><math>H_L</math> : 액체층의 두께</p> <p><math>h</math> : 액체층의 무차원 두께 (<math>H_L/H</math>)</p> <p><math>h_c</math> : 전도에서 대류로 천이될 때 (임계시)의 <math>h</math></p> <p><math>h_i</math> : 상변화 물질의 잠열</p> <p><math>k</math> : 열전도계수의 비 (<math>k_s/k_l</math>)</p>	<p><math>k_s</math> : 고체의 열전도계수</p> <p><math>k_l</math> : 액체의 열전도계수</p> <p><math>L</math> : <math>h</math>를 기준으로 한 무차원 파장 (<math>l/h</math>)</p> <p><math>L_c</math> : 임계시의 <math>L</math></p> <p><math>l, l^*</math> : Benard cell의 무차원 및 실제 파장 (<math>l = l^*/H</math>)</p> <p><math>l_c</math> : 임계시의 <math>l</math></p> <p><math>n</math> : 상변화면에 대한 수직방향의 단위벡터</p> <p><math>\overline{Nu}_0</math> : 상변화면에서의 평균 Nusselt수</p> <p><math>\overline{Nu}_1</math> : 아랫면에서의 평균 Nusselt수</p>
--	--

\* 동아대학교 공과대학 기계공학과

- $Pr$  : Prandtl수 ( $\nu / \alpha_L$ )  
 $Ra$  :  $h$  기준의 Raleigh수 ( $\beta gh^3(T_1 - T_f) / (\alpha_L \nu)$ )  
 $Ra_H$  :  $H$  기준의 Raleigh수 ( $\beta gh^3(T_1 - T_f) / (\alpha_L \nu)$ )  
 $Ra_c$  : 임계시의  $Ra$  ( $= 1708$ )  
 $Ra_2$  : 전도-대류 곡선에서  $\theta_1 = \theta_{1c}$  에 해당하는  $Ra$  값  
 $S_{te}$  : Stefan 수 ( $k_L(T_1 - T_f) / (h_f \rho \alpha_L)$ )  
 $T$  : 온도  
 $T_i$  : 상변화 물질의 융점  
 $T_0$  : 윗면의 온도  
 $T_1$  : 아랫면의 온도  
 $t, t^*$  : 무차원 및 실제 시간 ( $t = t^* / (H^2 / \alpha_L)$ )  
 $x, x^*$  : 수평방향의 무차원 및 실제 좌표 ( $x = x^* / H$ )  
 $y, y^*$  : 수평방향의 무차원 및 실제 좌표 ( $y = y^* / H$ )  
 $X$  : 수평방향의 무차원 좌표 (식 (21))  
 $Y$  : 수직방향의 무차원 좌표 (식 (9))

## 회 략 문 자

- $\alpha$  : 열확산계수의 비 ( $\alpha_w / \alpha_L$ )  
 $\alpha_w$  : 고체의 열확산계수  
 $\alpha_L$  : 액체의 열확산계수  
 $\beta$  : 열확장계수  
 $\zeta, \zeta^*$  : 무차원 및 실제 와도 ( $\zeta = \zeta^* / (\alpha_w / H^2)$ )  
 $\eta$  : 상변화면의 위치 (무차원)  
 $\theta$  : 무차원 온도 ( $(T - T_f) / (T_1 - T_f)$ )  
 $\theta_0$  : 윗면의  $\theta$  값 ( $(T_0 - T_f) / (T_1 - T_f)$ )  
 $\theta_1$  :  $-k\theta_0$   
 $\theta_{1c}$  : 임계시의  $\theta_1$   
 $\theta_{1m}$  : 함수  $f$ 의 극대치  
 $\theta^{(s)}$  : 고체에서의  $\theta$   
 $\theta^{(L)}$  : 액체에서의  $\theta$   
 $\nu$  : 동점성 계수  
 $\rho$  : 밀도  
 $\varphi, \varphi^*$  : 무차원 및 실제 유동함수 ( $\varphi = \varphi^* / \alpha_L$ )

## 1. 서 론

일반적으로 고체가 액체로 변할 때 (즉 용해

시) 열이 흡수되고, 액체가 고체로 변할 때 (즉 응고시) 열이 방출된다. 이 열을 잠열 (latent heat)이라고 하는데, 거의 일정한 온도에서 열의授受가 이루어 지므로 공학적으로 널리 이용되고 있다(예를들면, 태양열의 저장, 우주선에서의 열제어(thermal control)등). 따라서 이러한 잠열을 이용한 열교환 장치 및 열관리 장치의 최적설계와 올바른 운용을 위해서는 상변화를 수반하는 열전달 문제에 대한 정확한 해석이 필요하다. 상변화시의 열 및 유체의 유동특성의 올바른 해석은 이 외에 주조, 제강, 결정화(crySTALLIZATION), 소재의 정화(purification of materials)등의 여러 산업분야에서도 절실히 요청되고 있다.

상변화 열전달에 있어서 액상의 유동에 따른 자연대류 현상이 열전달 특성에 중요한 영향을 미친다는 사실은 Sparrow 등<sup>(1)</sup>과 Bathelt 등<sup>(2,3)</sup>의 연구결과 처음 확인되었다. 그 후의 중요 연구 사항을 용해과정상의 자연대류 문제를 중심으로 살펴보자. Rieger 등<sup>(4)</sup>은 수평원주 외부의 상변화 문제를 수치해석한 바, 자연대류가 시작되는 천이구역에서 국소 열전달 계수는 극치를 가짐을 보였다. 그 후 수평원주의 내부 문제에 대하여 많이 취급되었는데, Saitoh와 Hirose<sup>(5)</sup>, Rieger 등<sup>(6)</sup>, Ho와 Viskanta<sup>(7)</sup>, Rieger와 Beer<sup>(8)</sup> 등의 연구보고를 보면 원주 내부의 하부에 형성된 보오텍스에 대해 집중적인 논란이 있었음을 알 수 있다. 직사각형 내부의 문제는 Ho와 Viskanta<sup>(9,10)</sup>, Benard 등<sup>(11)</sup>, Gau와 Viskanta<sup>(12)</sup>에 의해 연구된 바 있다.

한편, 국내에서는 유와 노<sup>(13)</sup>, 이 등<sup>(14)</sup>의 연구 성과를 지적할 수 있다.

지금까지 살펴본 연구들은 모두, 모든 경계의 온도를 융점 이상으로 유지한 경우에 대한 것들이다. 따라서 시간이 경과하면 고체와 액체의 경계면 (상변화면이라 칭함)은 계속 변하여 정상상태가 존재할 수 없다. 이와는 달리 경계의 일부 면을 융점 이하로 유지시켜 주위의 고체를 과냉각(subcooling) 시키면 상변화면이 고정되는 정상상태가 존재할 수 있다. Beckermann과 Viskanta<sup>(15)</sup>는 직사각형 내부의 문제에서 하나의

수직 벽면이 융점 이상으로, 다른 수직 벽면이 융점 이하로 유지된 경우에 대하여 연구하였는데, 정상상태에서의 상변화면이 자연대류의 영향으로 수직방향으로부터 많이 벗어나는(심한 경우에는 거의 대각선 방향인) 결과가 보고되었다. 한편, Davis 등<sup>(16)</sup>과 Dietsche와 Müller<sup>(17)</sup>는 수평방향으로 충분히 긴 두 평판 사이의 문제에서 윗면이 융점 이상으로, 아랫면이 융점 이하로 유지된 경우(앞으로 DMD 모델이라 칭함)에 대하여 연구하였는데, 상면의 온도를 증가시킬 때와 감소시킬 때의 열전달 특성이 서로 다른 즉 히스테리시스(hysteresis) 특성이 나타남을 발견하였다.

본 연구에서는 DMD의 모델을 대상으로 하여 히스테리시스가 발생하는 근본 원인을 규명하는데 목적이 있다. 고액경계면은 해석의 편의상 평면으로 가정하였으며, 그 위치는 자유롭게 변할 수 있도록 하였다. 해석적 분석과 동시에 스펙트럴(spectral) 방법에 의한 수치해석을 동원하여 히스테리시스의 근본원인과 발생상황을 조사하였다.

본 연구 모델은 일부 경계면이 융점 이하로 유지되는 상변화 문제에 있어서 국부적으로 나타나는 열전달 특성을 대변할 수 있으리라 예상된다. 예를들면, 상면이 융점 이하로 유지되는 직사각형 내부의 문제는 물론이고, 두 동심원주 사이의 문제에서 내측원주가 융점 이하로 유지되는 경우도 하부에서의 열 및 유체유동을 점근적으로 묘사할 수 있을 것이라 생각된다.

## 2. 수 식 화

간격  $H$  만큼 떨어진 두 수평 평판 사이에 융점  $T_f$ 를 가진 상변화 물질이 채워져 있고, 아랫면은  $T_1 > T_f$ 로, 윗면은  $T_0 < T_f$ 의 온도로 유지되는 경우를 생각한다(Fig.1). 그러면 상변화 물질은, 아랫면 가까이에서는 액체로, 윗면 가까이에서는 고체로 존재할 것이다. 이 때 상하면의 온도차가 그리 크지 않을 때는 액체에서의 열전달은 전도에 의해서만 이루어진다. 그러다가 두 온도차가 어느 임계치 이상이 되면 액체층에서는

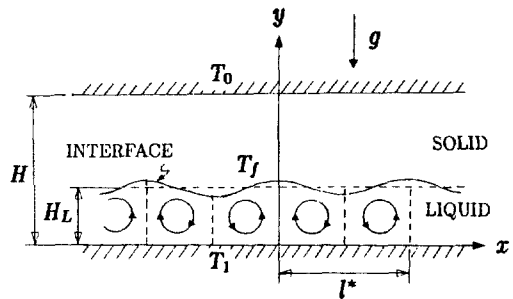


Fig. 1 Schematic diagram of the model and coordinate system.

자연대류가 일어나고 열전달은 더욱 활발히 이루어진다. 본 문제의 수치화를 위하여 몇가지 가정을 한다. 우선 액체는 부력항의는 비압축성이며, 자연대류는 층류 2차원 유동으로 이루어진다고 가정한다. 이제 무차원화된 지배방정식을 쓰면 아래와 같다.

액체 :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} = Pr \nabla^2 \zeta - Ra_H Pr \frac{\partial \theta}{\partial x} \dots \dots \dots (1)$$

$$\nabla^2 \psi = \zeta \dots \dots \dots (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \nabla^2 \theta \dots \dots \dots (3)$$

고체 :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \nabla^2 \theta \dots \dots \dots (4)$$

여기서  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  이다.  $x$ -방향의 경계조건은 무차원 길이  $l$  마다 반복되는 조건으로 하였다. 여기서  $l$ 은 고전적 Benard convection 문제에서 자연대류가 시작되는 임계점에서의 파장에 해당하는 값을 환산한 것으로 하였다. 그리고  $y$ -방향의 경계조건은 다음과 같다.

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \text{ at } y = 0, \eta \dots \dots \dots (5)$$

$$\theta = \begin{cases} 1 & \text{at } y=0 \\ 0 & \text{at } y=\eta \dots\dots\dots (6) \\ \theta_0 (\theta_0 < 0) & \text{at } y=1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = Ste [k \nabla \theta^{(S)} - \nabla \theta^{(L)}] n \text{ at } y=\eta \dots\dots\dots (7)$$

여기서  $y=\eta(t, x)$ 는 경계면의 형상을 나타낸다. 식(7)에서 액체와 고체의 밀도는 같은 것으로 하였다.

문제의 간편화를 위하여 또한 스펙트럴 방법의 사용을 가능하게 하기 위하여 본 연구에서는 상변화면을 다음과 같이 평면으로 가정하였다.

$$\eta = h(t) \dots\dots\dots (8)$$

그러나, 이러한 근사화가 열전달의 기본특성을 근본적으로 해친다고 생각되지 않는다. 그리고, 액체층의 두께를 일정하게 하기 위하여 (Chebyshev 다항식을 쓰기 위함) 다음과 같이 정의된  $Y$ 를  $y$  대신 사용하기로 한다.

$$Y = \frac{y}{h(t)} - \frac{1}{2} \dots\dots\dots (9)$$

이에 따라 식 (1)-(7)은 아래와 같이 변형된다.

액체 :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{h'}{h} \left( Y + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial Y} + \frac{1}{h} \left( \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial Y} \right) = Pr \nabla_1^2 \zeta - Ra_H Pr \frac{\partial \theta}{\partial x} \dots\dots\dots (10)$$

$$\nabla_1^2 \psi = \zeta \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{h'}{h} \left( Y + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial \theta}{\partial Y} + \frac{1}{h} \left( \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = \nabla_1^2 \theta \dots\dots\dots (12)$$

고체 :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{h'}{h} \left( Y + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \alpha \nabla_1^2 \theta \dots\dots\dots (13)$$

경계조건 :

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial Y} = 0 \text{ at } Y = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \dots\dots\dots (14)$$

$$\theta = \begin{cases} 1 & \text{at } Y = -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{at } Y = \frac{1}{2} \dots\dots\dots (15) \\ \theta_0 (\theta_0 < 0) & \text{at } Y = \frac{1}{h} - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$h' = Ste \left[ \frac{k}{h} \frac{d\theta^{(S)}}{dY} - \frac{1}{hl} \int_0^1 \frac{\partial \theta^{(L)}}{\partial Y} dx \right] \text{ at } Y = \frac{1}{2} \dots\dots\dots (16)$$

여기서  $\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial Y^2}$  이다. 그리고 ,

은 시간에 대한 미분을 나타낸다.

### 3. 정상상태에서의 히스테리시스 특성

정상상태에서 고체에서의 온도분포는 간단히 다음과 같이 된다.

$$\theta^{(S)} = \theta_0 \frac{y-h}{1-h} \dots\dots\dots (17)$$

이것을 (16)식에서 대입하면

$$0 = \frac{-\theta_1}{1-h} - \frac{1}{hl} \int_0^1 \frac{\partial \theta^{(L)}}{\partial Y} \Big|_{Y=\frac{1}{2}} dx \dots\dots\dots (18)$$

을 얻는다. 여기서 우변의 적분 값을 구하기 위해서는 액체에서의 지배방정식 (10)-(12)를 (14)-(15)의 경계조건으로 풀어야 한다. 정상상태에서의  $h$ 는 일정하므로 이 문제는 바로 고전적인 Benard convection 문제인 것이다. 그러나 본 모델에서의 Rayleigh수  $Ra_H$ 와 Benard cell의 파장  $l$ , 및 수평방향의 좌표  $x$ 는  $H$ 를 기준으로 한 것이므로, 고전적 Benard convection 문제에서 통상 사용하는  $h$  기준의 Rayleigh수  $Ra$ , cell의 파장  $L$ , 및 수평방향의 좌표  $X$ 와의 관계를 다음과 같이 분명히 할 필요가 있다.

$$Ra = Ra_H h^3 \dots\dots\dots (19)$$

$$L = \frac{l}{h} \dots\dots\dots (20)$$

$$X = \frac{x}{h} \dots\dots\dots (21)$$

그러면, 전도에서 자연대류가 시작되는 임계 값은 잘 알려진 바와 같이

$$Ra_c = 1708, L_c = 2.016 \dots\dots\dots (22)$$

이 된다.<sup>(18)</sup> 그러면 (18)식은 아래와 같이 된다.

$$\theta_1 = \left( \frac{1}{h} - 1 \right) \overline{Nu}_u \dots\dots\dots (23)$$

$$\overline{Nu}_u = - \frac{1}{L} \int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial Y} \Big|_{y=\frac{1}{2}} dX \dots\dots\dots (24)$$

$Pr$ 과  $L$ 이 일정하다고 하면  $\overline{Nu}_u$ 는  $Ra$ 의 함수이다. 그러나 실제적으로 (실험에서 또는 현실에서) 주어지는 것은  $Ra_H$ 이고,  $Ra$ 는  $Ra_H$ 와  $h$ 로부터 (19)식에 의해 구해야 하는 것이다. 따라서  $\overline{Nu}_u$ 는  $h$ 의 함수로 생각해야 하고 이에 따라 식 (23)은  $h$ 에 관한 비선형 산술 방정식이 된다.  $\overline{Nu}_u$ 의 함수 형태를 구하기 위해 다음장에서 설명한 바와 같이 스펙트럴 방법을 써서 고전적 자연대류 문제를 수치해석 하였다. Davis 등<sup>(16)</sup>과 Dietsche와 Müller<sup>(17)</sup>가 사용한 유체인 사이클로헥산(cyclohexane)의 경우 ( $Pr=17.6$ )에 대해 여러가지  $Ra$ 에서 정상해를 얻었다. 이로부터 구한  $\overline{Nu}_u$ 를 가장 잘 나타내되 가능한 간단한 형태의 함수로서 다음과 같은 근사 함수를 선택하였다.

$$\overline{Nu}_u = 4.1 - 71.236(Ra + 300)^{-0.41218} \dots\dots\dots (25)$$

Fig.2는 식 (25)가 수치해석에 의해 구한 data들을 잘 나타내고 있음을 보여 준다. 식 (25)에 의해 산술 방정식 (23)은 따라서,

$$f(h; Ra_H) = \theta_1 \dots\dots\dots (26)$$

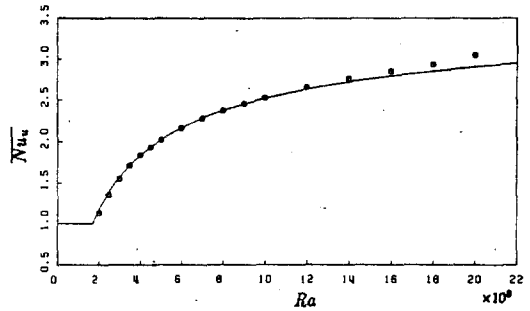


Fig. 2 The average Nusselt number  $\overline{Nu}_u$  at the upper boundary in the Benard convection obtained numerically (marked as circle) :  $Pr=17.6, L=2.016$ . Solid curve is made by equation(25).

$$f = \begin{cases} \left( \frac{1}{h} - 1 \right) & \text{for } h \leq h_c \\ \left( \frac{1}{h} - 1 \right) [4.1 - 71.236(Ra_H h^3 + 300)^{-0.41218}] & \text{for } h \geq h_c \end{cases} \dots\dots\dots (27)$$

$$h_c = \left( \frac{Ra_c}{Ra_H} \right)^{\frac{1}{3}} \dots\dots\dots (28)$$

와 같이 표현될 수 있다. 즉 액체의 두께  $h$ 는 (26)에서 나타낸 바와 같이 주어진  $\theta_1$ 이 함수  $f$ 를 자르는 위치에서 결정되는 것이다. Fig.3은 여러가지  $Ra_H$ 에 따른 함수  $f$ 의 모양을 보여주고 있다. 이 그림에서 알 수 있는 바와 같이, 해의 수는  $Ra_H$ 와  $\theta_1$ 에 따라서 1개 이상 3개까지 존재한다. 비선형 산술 방정식 (26)의 해를 수치적으로 구한 결과에 의하면  $Ra_H=5125$ 를 기준으로 하여 해의 갯수가 달라진다. 즉,  $Ra_H < 5125$ 이면 어떠한  $\theta_1$ 에서도 오직 한개의 안정한 해가 존재하며 (Fig.4(a)),  $Ra_H > 5125$ 에서는  $\theta_{1c} < \theta_1 < \theta_{1m}$ 의 범위에서 3개의 해가 그 외의  $\theta_1$  값에서는 1개의 안정한 해가 존재한다(Fig.4(b)). 여기서 3개의 해가 존재하는 경우,  $h$ 가  $h_c$ 와  $h_m$  사이의 값을 취하는 해는 불안정하고 나머지 두 해는 안정하다. 중간의 해가 불안정한 이유를 설명하면 다음과 같다. 평형상태로부터  $h$ 가 미소양만큼 증가했다고 가정하면,  $f > \theta_1$  즉 상 변화면에서 액체측에서의 열전달율이 고체측에

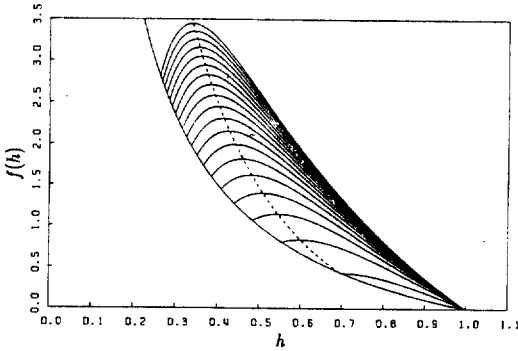
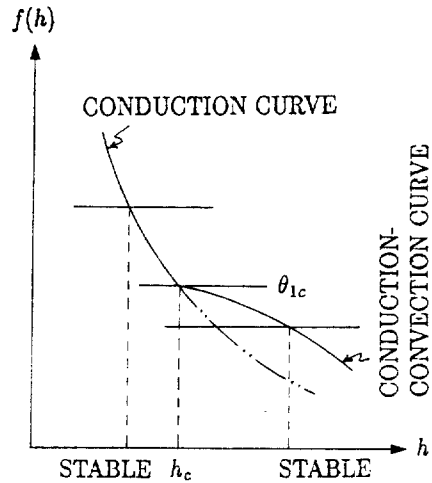


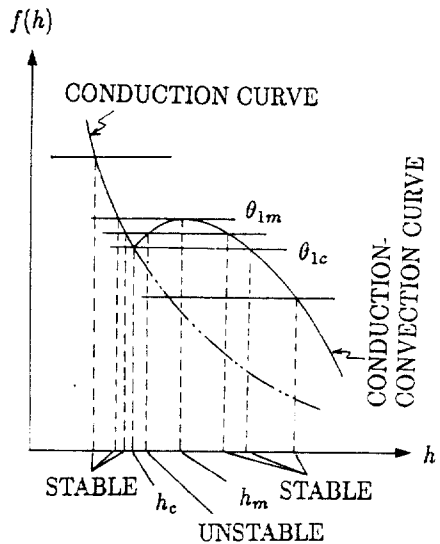
Fig. 3 Curves of  $f$  (equation(27)) for  $Ra_H=5, 000, 10000, \dots, 95000$  (from below). The dotted curve is collection of points of maximum values of  $f$ .

서의 열전달율보다 더 크게 되어 고체가 용해할 수 밖에 없고 이에 따라  $h$ 는 더욱 증가하는 결과를 가져온다. 반대로,  $h$ 가 미소양만큼 작아졌다고 가정하면, 액체가 응고하면서  $h$ 가 더욱 작아지는 방향으로 진행된다. 이와같이  $\theta_1 < \theta_1 < \theta_{1m}$ 의 영역에서 두개의 안정한 해가 존재하므로 히스테리시스 현상이 나타나는 것이다. 즉  $\theta_1$ 이 감소할 때는 액체가 전도 상태를 유지하다가  $\theta_1 = \theta_{1c}$ 에서 갑자기 자연대류 상태가 되고  $h$ 는 불연속적으로 증가하며 열전달 계수도 도약한다. 그리고  $\theta_1$ 이 증가할 때는 대류상태를 유지하다가  $\theta_1 = \theta_{1m}$ 에서 갑자기 전도 상태로 변하고  $h$ 와 열전달 계수는 불연속적으로 감소하는 현상을 보이는 것이다. 히스테리시스의 강도는  $\theta_1 = \theta_{1c}$ 에서의 대류 상태에서의  $Ra$  값 즉  $Ra_2$ 에 의해 비교적 정확하게 측정할 수 있다. 즉 임계상태인  $Ra_H=5125$ 에서는  $Ra_2=1708$ 로서  $Ra_c$ 와 동일하여 히스테리시스 강도는 0이고,  $Ra_H$ 가 증가할수록  $Ra_2$ 도 증가하여  $Ra_c$ 와의 차이가 커져 이에 따라 히스테리시스의 강도가 커진다고 볼 수 있다. 수치해석에 의하면 궁극적으로  $Ra_H \rightarrow \infty$ 로 접근할 때  $Ra_2 \rightarrow 6463$ 으로 접근하며, 이때  $h$ 는 1.56배 만큼 증가하게 된다.

결국 DMD의 모델에서 히스테리시스가 발생하는 근본 원인은 고전적 Benard convection 문제에서의 자연대류가 시작되는 임계점 주위의



(a) The case without hysteresis



(b) The case with hysteresis

Fig. 4 Schematic showing determination of the steady liquid height  $h$  for given  $\theta_1$ . At  $h=h_c, Ra=Ra_c=1708$ . (a) is for the case without hysteresis and (b) for the case with hysteresis.

열전달 특성에서 찾을 수 있다. 즉 전도에서 대류로 넘어가는 임계점까지는 Rayleigh 수가 증가하더라도 Nusselt 수는 1을 유지하지만, 임계점을 넘어서면 Rayleigh 수의 증가에 따라 Nusselt 수가 크게 증가하기 때문이다. 이러한 증가율의 급증으로 인하여 그때까지 연속적으로 후퇴하면서 양측과의 열의授受를 잘 맞추던 상변화면이 갑자기 크게 후퇴하여 새로운 위치에서 균형을 이루지 않을 수 없는 것이다. 이와 유사한 개념을 대류에서 전도로 넘어가는 과정에 대하여도 적용할 수 있다.

#### 4. 수치해석

전장에서 우리는 히스테리시스가 발생하는 근본 원인을 밝혔다. 본장에서는 경계조건 (14) - (16)하의 지배방정식 (10) - (12)를 수치해석하여 과연 이러한 히스테리시스 현상이 실제 발생할 수 있는지 확인하도록 한다. 또한 본장의 수치해석은 전장의 근사식 (25)를 유도하는 기본 data를 제공하는데도 필요하다.

사용된 수치해석 방법은 소위 스펙트럴 방법이다. 그 과정을 간략히 설명하면 다음과 같다. 우선, 종속변수를  $Y$ -방향으로는 Chebyshev 다항식으로,  $x$ -방향으로는 Fourier 급수로 전개한 다음 지배방정식에 대입한다. (여기서 Fourier 급수 전개는 cell의 모양이  $x$ -방향으로 반복된다는 조건에서만 가능하다. 그리고 cell의  $x$ -방향의 크기에 해당하는  $l$  값은  $l = L/h_c$  즉 임계시의 파장으로 취했으며, 계산과정중 변하지 않는 것으로 하였다. cell의  $x$ -방향의 크기가, 특히 전도상태에서 대류상태로 도약하는 과정에서, 변하겠으나 하는 문제는 본 연구의 범주를 벗어나며 여기서는 고려하지 않았다.) 다음으로, 시간에 대한 적분은 소위 분할법(splitting method)으로 즉 2단계로 나누어 실시한다; 첫 단계에서, 대류항과 소스(source)항을 Adams-Bashforth 법으로 양적으로 처리하며, 둘째 단계에서, 확산항을 Crank-Nicolson법으로 음적으로 처리한다. 여기서 첫단계의 작업은 물리적 공간에서, 둘째 단계의 작업은 스펙트럴 공간

에서 실시하는데, 물리적 공간과 스펙트럴 공간 사이의 변환은 수도-스펙트럴(pseudo-spectral) 방법에 따라 FFT의 알고리즘으로 처리하였다. 스펙트럴 방법의 기본 개념과 일반에 대해서는 예를들면 참고문헌(19)를 참조할 수 있다. Fig.5 는 본 계산 알고리즘의 흐름도를 나타낸다.

본 수치해석의 알고리즘을 확인하고 알맞은 격자계의 선정을 위하여  $Pr=0.71$ 에 대한 고전적 Benard convection 문제를 수치해석하였다. 계산결과  $16 \times 16$ 의 격자계에서  $Ra=10000, 20000$

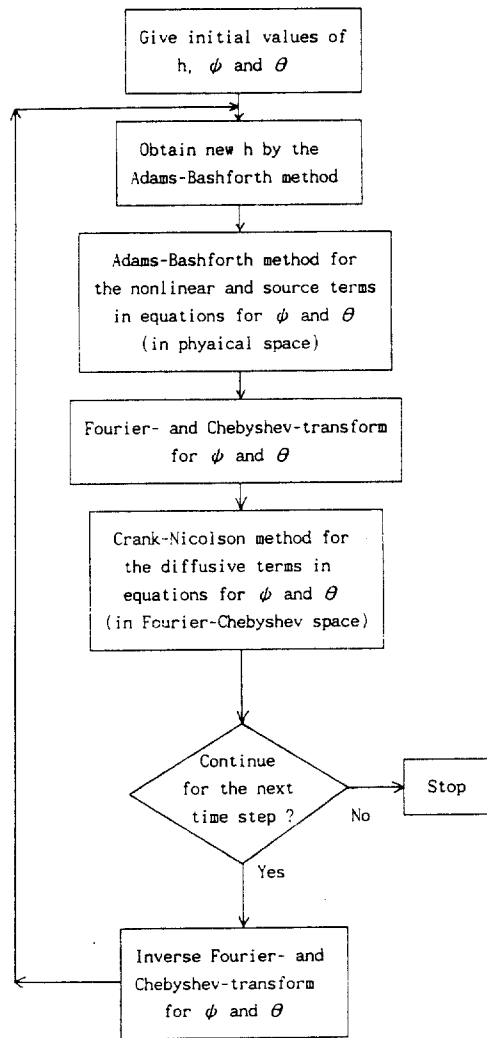


Fig. 5 Flow chart of the numerical computation.

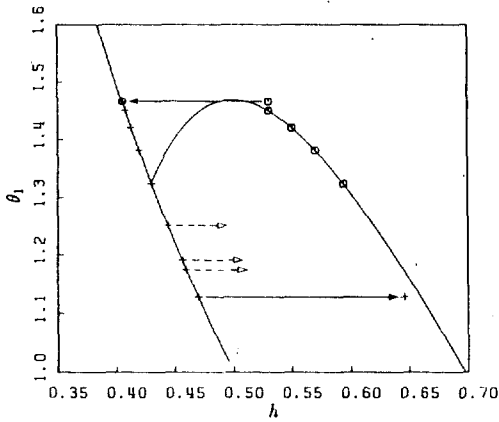


Fig. 6 Hysteresis phenomenon at  $Ra_H=21500$ . Circles denote the process of increasing  $\theta_1$  and crosses denote that of decreasing  $\theta_1$ . Dotted-line arrows indicate that each case has tendency of shifting from the conduction state to the conduction-convection state, but the growth was so slow that the computation was stopped on the way.

때  $\overline{Nu_w} = 2.649, 3.233$ 이었으며, Clever와 Busse<sup>(20)</sup>의 계산값 2.661, 3.258과 비교적 잘 맞음을 알 수 있다. 이에 따라 모든 계산은 격자계  $16 \times 16$ 으로 하여 수행하였다.

Fig.2는  $Pr=17.6$ 에 대한 정상상태의 계산 결과로서 이미 전장에서 사용된 바 있다.

히스테리시스의 확인을 위하여  $Ra_H=21500$ 에 대하여 수치해석한 결과가 Fig.6이다. 처음  $\theta_1$ 을 감소시켜 가면서 각  $\theta_1$ 에 대한 정상해를 구하였다(그림에서 십자 표시한 것). 임계점 상부에 위치한 5개의 점에서는 초기 섭동이 소멸하여 정상해가 얻어졌으나, 임계점 하부의 점에서는 초기 섭동이 증가하는 것을 확인하였다. 그림에서 점선화살표로 표시한 것은 그 증가율이 매우 낮아서 도중에 계산을 중지한 것을 나타내며, 실선화살표로 표시한 것은 도약과정을 끝까지 추적한 것을 나타낸다. 다음에,  $\theta_1$ 을 증가시켜 가면서 계산을 수행하였는데(그림에서 원형으로 표시한 것), 상부의 실선화살표로 나

타낸 바와 같이 대류에서 전도로 도약하는 과정을 확인할 수 있었다.

## 5. 결 론

아랫면이 융점 이상으로, 윗면이 융점 이하로 유지된 두 수평 평판 사이에 상변화 물질이 채워진 경우에 대한 열전달 및 유체유동 문제를 해석적 및 수치적 방법으로 연구하였다. 그 결과를 요약하면 다음과 같다.

- 1) 히스테리시스 발생요인은, 근본적으로, 전도에서 대류로 천이할 때 액체층에서의 열전달율이 Rayleigh수의 증가에 따라 급증하기 때문이다.
- 2) 본 연구에서 취급한 모델에서, 히스테리시스 현상은  $Ra_H > 5125$  때 발생한다.
- 3)  $Ra_H \rightarrow \infty$ 의 접근시, 전도에서 대류로 도약할 때 액체층의 두께는 1.56배로 커진다.
- 4) 스펙트럴 방법으로 열 및 유체의 유동장을 수치해석한 결과 히스테리시스 현상이 확인되었다.

## 후 기

본 연구는 한국과학재단의 기초연구 지원(과제번호 901-0901-026-1)에 의해 수행되었으며, 이에 감사드린다.

## 참 고 문 헌

1. Sparrow, E.M., Patankar, S.V. and Ramadhyani, S., 1977, "Analysis of Melting in the Presence of Natural Convection in the Melt Region," J. Heat Transfer, Vol.99, pp.520-526.
2. Bathelt, A.G., Viskanta, R. and Leidenfrost, W., 1979, "An Experimental Investigation of Natural Convection in the Melted Region around a Heated Horizontal Cylinder," J. Fluid Mech., Vol.90, pp.227-239.
3. Bathelt, A.G., Viskanta, R. and Leidenfrost, W., 1979, "Latent Heat-of-Fusion Energy Sto-



- rage : Experiments on Heat Transfer from Cylinders during Melting," J.Heat Transfer, Vol.101, pp.453-458.
4. Rieger, H., Projahn, U. and Beer, H., 1982, "Analysis of the Heat Transport Mechanisms during Melting around a Horizontal Circular Cylinder," Int. J. Heat mass Transfer, Vol.25, pp.137-147.
  5. Saitoh, T. and Hirose, K., 1982, "High Rayleigh Number Solutions to Problems of Latent Heat Thermal Energy Storage in a Horizontal Cylinder Capsule," J. Heat Transfer, Vol.104, pp. 545-553, 1982.
  6. Rieger, H., Projahn, U., Bareiss, M. and Beer, H., 1983, "Heat Transfer during Melting inside a Horizontal Tube," J. Heat Transfer, Vol.105, pp.226-234.
  7. Ho, C.-J. and Viskanta, R., 1984, "Heat Transfer during Inward Melting in a Horizontal Tube," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.27, pp. 705-716.
  8. Rieger, H. and Beer, H., 1986, "The Melting Process of Ice inside a Horizontal Cylinder : Effects of Density Anomaly," J. Heat Transfer, Vol.108, pp.166-173.
  9. Ho, C.-J. and Viskanta, R., 1984, "Inward Solid-Liquid Phase-Change Heat Transfer in a Rectangular Cavity with Conduction Vertical Walls," Int. J. Heat Transfer, Vol.27, pp.1055-1065.
  10. Ho., C.-J. and Viskanta, R., 1984, "Heat Transfer during Melting from an Isothermal Vertical Wall," J. Heat Transfer, Vol.106, pp.12-19.
  11. Benard, C., Gobin, D. and Martinez, F., 1985, "Melting in Rectangular Enclosures : Experiments and Numerical Simulations," J. Heat Transfer, Vol.107, pp.794-803.
  12. Gau, C. and Viskanta, R., 1986, "Melting and Solidification of a Pure Metal on a Vertical Wall," J. Heat Transfer, Vol.108, pp.174-181.
  13. 유호선, 노승탁, 1986, "좌표변환에 의한 상 변화과정의 수치해석," 대한기계학회 논문집, 제10권, 제4호, pp.585-592.
  14. 이윤표, 유호선, 김민수, 노승탁, 1989, "수평원관 주위에서 가열 벽면을 고려한 상변화 열전달 해석," 대한기계학회 논문집 제13권 제6호, pp.1310-1320.
  15. Beckermann, C. and Viskanta, R., 1989, "Effects of Solid Subcooling on Natural Convection Melting of a Pure Metal," J. Heat Transfer, Vol.111, pp.416-424.
  16. Davis, S.H., Müller, U. and Dietsche, C., 1984, "Pattern Selection in Single-Component Systems Coupling Venard Convection and Solidification," J. Fluid Mech., Vol.144, pp.133-151.
  17. Dietsche, C. and Müller, U., 1985, "Influence of Benard Convection on Solid-Liquid Interfaces," J. Fluid Mech., Vol.161, pp.249-268.
  18. Drazin, P. and Reid, W., 1981, Hydrodynamic Stability, Cambridge Univ. Press.
  19. Canuto, C., Hussaini, M.Y., Quarteroni, A. and Zang, T.A., 1988, Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer-Verlag.