

부채형 공간내의 자연대류에 관한 수치해석적 연구

A Numerical Study of Natural Convection within a Trapezoidal Enclosure

배 태 열*, 배 태 석**, 권 순 석***
T. Y. Bae, D. S. Bai, S. S. Kwon

Key Words : Natural Convection(자연대류), Trapezoidal Enclosure(부채형공간)

ABSTRACT

The natural convection heat transfer within a trapezoidal enclosure with parallel cylindrical top and bottom walls at different temperatures and two adiabatic side walls are studied. A finite-difference method has been used to solve the governing equations numerically. The range of parameters studied herein are Prandtl number 0.7, aspect ratio from 0.5 to 4.0, Rayleigh number from 10^3 to 3×10^4 , enclosure tilt angle from 22.5 to 157.5 degrees. Mean and local Nusselt numbers are presented for discussing heat transfer characteristics within the enclosure. The heat balances for the hot and cold walls are differed by less than 1% for converged solutions, so these results appear to be reasonable.

기 호 설 명

<p>A : 내 · 외측벽의 단면적</p> <p>g : 중력 가속도</p> <p>h : 대류 열전달 계수</p> <p>k : 열전도율</p> <p>L : 기준 간격 길이, $R_o - R_i$</p> <p>Nu : Nusselt수, $h \cdot L/k$</p> <p>Pr : Prandtl수, ν/α</p> <p>Q : 방정식의 계수 혹은 축 방향 단위 길이당 전체 열전달량</p>	<p>R : 무차원 반경 방향 좌표</p> <p>Ra : Rayleigh수, $g\beta\Delta TL^3/\nu\alpha$</p> <p>$T$: 온도</p> <p>ΔT : 온도차, $T_i - T_o$</p> <p>V : 무차원 속도</p> <p>ω : 무차원 와도</p> <p>α : 열확산율</p> <p>β : 체적 팽창 계수 혹은 부채형 공간의 경사각</p> <p>ν : 동점성 계수</p> <p>θ : 부채형내 원주방향좌표</p>
---	--

* 동아대학교 대학원 기계공학과

** 경남전문대학 기계설계과

*** 동아대학교 공과대학 기계공학과

Φ : 무차원 온도, $(T-T_c)/\Delta T$

Ψ : 무차원 유동함수

(첨 자)

i : 내측 등온벽

L : 기준 간격 길이

o : 외측 등온벽

r : 반경방향

T : 부채형

θ : 원주방향

- : 평균

1. 서 론

유체가 중력장 내에서 가열되거나 혹은 냉각 되는 곳에서는 대부분 자연대류의 한 형태로 열전달이 일어난다. 초창기의 자연대류에 대한 연구는 등온 무한정체 유체 내에서의 발열체에 의한 열전달에 대한 연구로 시작되어 수년동안 환상 공간^{1,2,3)} 혹은 사각형 공간⁴⁾ 등 밀폐공간 내에서의 자연대류 열전달 문제에 대한 연구가 활발히 진행되어져 왔다. 그러나 최근에는 특수한 설계조건에 만족하는 임의의 좌표계에 대한 특수형상을 가진 공간^{5,6,7)}에서의 자연대류 열전달에 대한 연구가 활발히 수행되고 있다.

본 연구에서는 일반적인 환부착 열교환기, 원자로, 태양열 집열기등에서의 일부분에 해당하는 부채형 공간을 두 개의 평행한 원주형 등온벽($T_i > T_o$)과 45도의 각도를 가진 두 개의 단열벽으로 고려하였다. 이 부채형 2차원 공간에서의 자연대류 열전달 특성을 고찰하기 위하여 Rayleigh수, 간격비, 그리고 회전각을 변수로하여 수치해석 하였다.

2. 수치해석

2-1 지배 방정식

부채형 공간의 도식적 형상은 Fig.1과 같다. 좌측벽과 우측벽은 단열이고, 안벽은 고온등온이고 바깥벽은 저온등온이며, 공간내의 유체는

밀도차로 인한 자연대류가 발생하게 된다. 이때 공간내의 유체는 Boussinesq Approximation을 따른다고 가정할때, 2차원 비 압축성, 층류 자연대류에 대하여 유동함수, Ψ 와 와도, ω 를 도입하여 무차원 방정식으로 정리하면 다음과 같다.

$$\nabla^2 \Psi = -\omega \dots\dots\dots (1)$$

$$\nabla^2 \omega = \frac{1}{Pr} \left(Vr \frac{\partial \omega}{\partial R} + V\theta \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) + Ra \left(\sin\theta \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \frac{\cos\theta}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \dots\dots\dots (2)$$

$$\nabla^2 \Phi = Vr \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \frac{V\theta}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \dots\dots\dots (3)$$

여기서,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$R = \frac{R - R_i}{L} \quad \Phi = \frac{T - T_o}{T_i - T_o} \text{ 이다.}$$

경계조건은 다음과 같다.

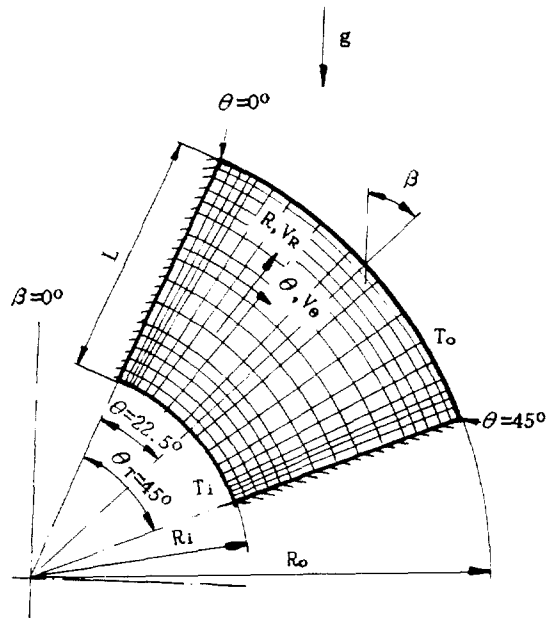


Fig.1 Schematic diagram of the geometry investigated and grid system.

1) $R=0$ 에서

$$V_r = V_\theta = 0, \omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2}, \Phi = 1 \dots\dots (4)$$

2) $R=1$ 에서

$$V_r = V_\theta = 0, \omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2}, \Phi = 0 \dots\dots (5)$$

3) $\theta = 0^\circ, 45^\circ$ 에서

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial R} = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0 \dots\dots (6)$$

2-2 수치해석 방법

수치해석을 하기위하여 방정식 (1)-(3) 과 경계조건 (4)-(6) 을 유한차분법을 사용하여 유한차분식으로 유도한후, S.O.R. 기법으로 수치해석하였다.

이때 수렴기준은 다음과 같다.

$$\frac{Q^m - Q^{m-1}}{Q^m} \leq 10^{-4} \dots\dots (7)$$

여기서 Q 는 유동함수 또는 무차원 온도를 나타내며 m 는 반복횟수를 나타낸다. 안벽과 바깥벽 및 좌우 양측 단열벽 부근에서의 온도구배 계산을 보다 정확히 하기위하여 이곳의 격자간격은 중앙부분의 격자간격보다 미소⁷⁾ 하게 취하였으며, 전체 격자수는 $16 \times 18 = 228$ 개 이며, 하나의 해를 구하는데 소요되는 시간은 32bit 퍼스날 컴퓨터로 약 10분 이내였다.

계산하여 얻어진 결과로 부터 Nusselt수는 다음과 같이 구하였다.

1) 국소 Nusselt수

$$Nu_i = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right)_{R=0} \dots\dots (8)$$

$$Nu_o = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right)_{R=1} \dots\dots (9)$$

2) 평균 Nusselt수

$$\overline{Nu_i} = \frac{1}{A} \int Nu_i \, dA \dots\dots (10)$$

$$\overline{Nu_o} = \frac{1}{A} \int Nu_o \, dA \dots\dots (11)$$

축 방향의 단위 길이당 전체 열전달량 Q 는 다음과 같다.

$$Q_i = k \cdot \pi \cdot \overline{Nu_i} \cdot \Delta T \dots\dots (12)$$

$$Q_o = k \cdot \pi \cdot \overline{Nu_o} \cdot \Delta T \dots\dots (13)$$

열평형의 관점에서 안벽과 바깥벽간의 열전달량은 동일해야 하나 수치계산 과정의 각종 오차로 인하여 대부분 1%미만의 수치계산 오차가 났으며, $Ra = 3 \times 10^4, L/R = 4, \beta = 157.5^\circ$ 에서 최대인 2%의 오차가 생겼다.

3. 결과 및 고찰

본 연구는 부채형 공간에서의 $P_r = 0.7, \theta_r = 45^\circ, 10^3 \leq Ra \leq 3 \times 10^4, 0.5 \leq L/R_i \leq 4, 22.5^\circ \leq \beta \leq 157.5^\circ$ 의 범위에서 각 변수를 변화시키면서 수치해석 하였다.

Fig. 2는 $P_r = 0.7, L/R_i = 2$ 인 경우, $\beta = 22.5^\circ, 67.5^\circ, 112.5^\circ, 157.5^\circ$ 일때의 여러가지 Ra 에 따른 유선과 등온선을 나타낸다. $Ra = 10^3$ 에서는 거의 전도에 의하여 열 전달이 일어나며, 형상의 위치 회전각의 변화에 관계없이 비슷한 유선과 등온선을 나타낸다. 그리고, $Ra = 5 \times 10^3$ 이상에서는 온도 경계층이 발달하면서 온도반전 현상이 일어난다. $22.5^\circ \leq \beta \leq 112.5^\circ, Ra \geq 10^3$ 의 범위에서는 온도경계층의 발달이 뚜렷하나, $\beta = 157.5^\circ$ 에서는 열원이 냉각벽보다 위쪽에 존재함으로 인하여 전도에 의한 열전달이 지배적임을 알수 있다. Ra 의 증가에 따라 유체의 유동은 증가되며, 단열벽 부근에서의 온도구배가 크게 나타나고, 안 및 바깥등온벽 부근에서는 온도구배가 큰 영역이 넓게 나타난다. 이는 Ra 의 증가에 따라 이 부근에서의 열 경계층이 발생되는 것으로 고려된다.

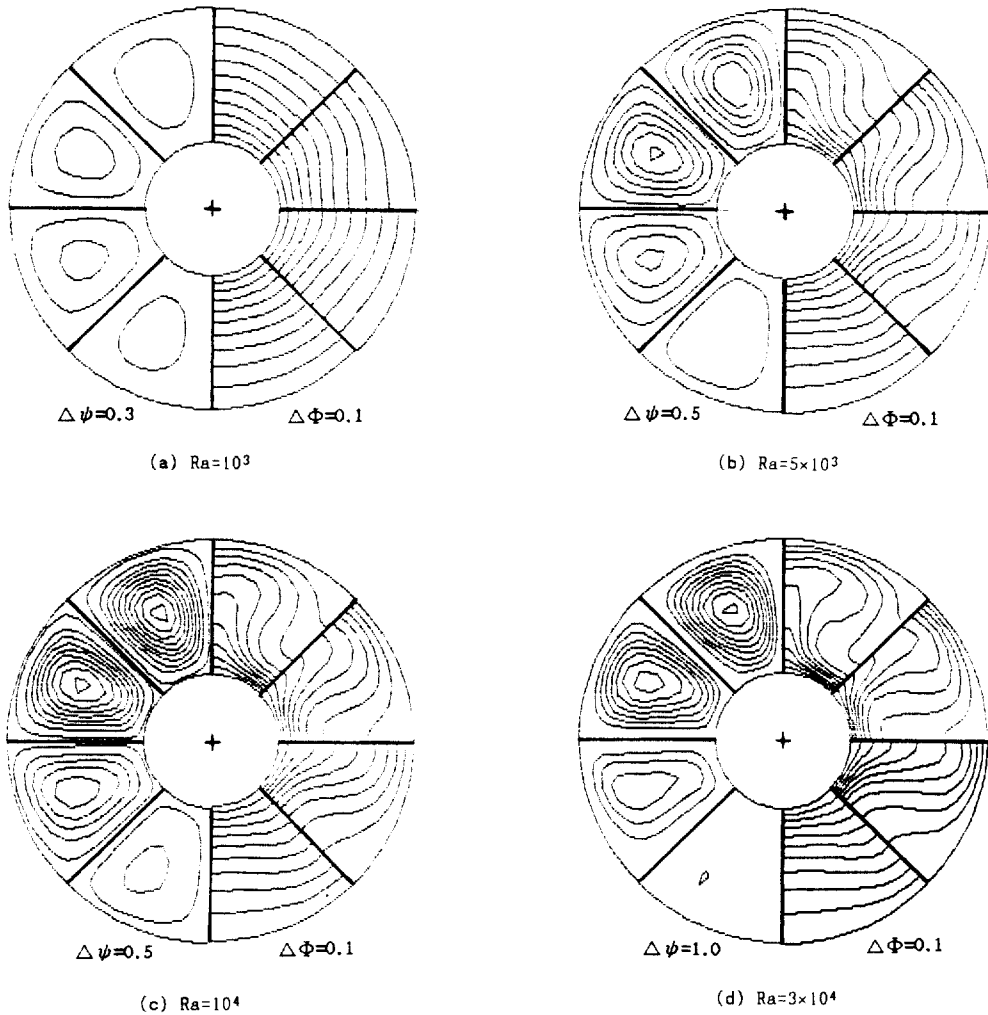


Fig.2 Streamlines and isotherms for various Rayleigh numbers at $P_r=0.7$, $L/R_i=2$, $\beta=22.5^\circ$, 67.5° , 112.5° , 157.5°

Fig.3 은 $Ra=10^4$, $P_r=0.7$ 인 경우 여러가지 L/R_i 에서의, $\beta=22.5^\circ$, 67.5° , 112.5° , 그리고 157.5° 에 대한 유선과 등온선을 나타낸다. L/R_i 의 증가에 따라 온도 반전 구간이 감소하며, 유체의 유동도 감소한다. 이는 공간내의 유체에서 전 열면적이 감소함에 따라 전열량의 감소가 유체 유동에 영향을 주기 때문이다.

Fig.4 는 $P_r=0.7$, $L/R_i=2$ 인 경우, 여러가지 Ra 에서 부채형 공간의 경사각(tilt angle)에 대한 평균 누셀트수를 나타낸다. 레일리수 $R_i=10^3$

에서는 평균 누셀트수의 변화가 거의 없으므로 전도에 의한 열전달이 지배적임을 알 수 있다. $Ra \leq 10^4$ 에서 최대 평균 누셀트수를 나타내는 경사각은 $\beta=45^\circ$ 이고 $Ra > 10^4$ 을 초과하면 경사각 67.5° 부근으로 이동하는데, 이와같은 현상은 안 등온벽 및 바깥등온벽에서 모두 같은 현상이 나타난다. 이는 Ra 의 증가에 따라 안 등온벽 아래에서 발달한 유체유동이 위로 올라가면서 윗부분에서 발생하는 유체유동을 끌어당겨 유체유동을 촉진시키기 때문인 것으로 고려된다.

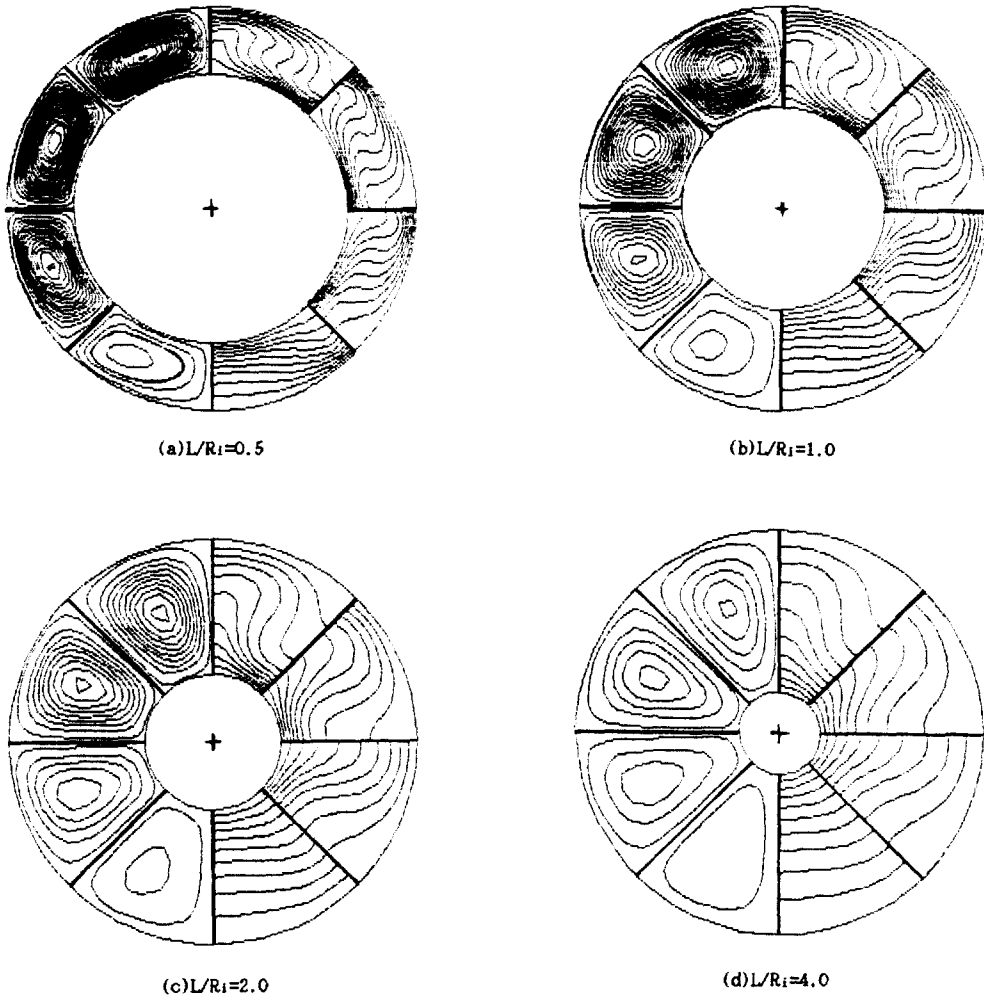


Fig.3 Streamlines and isotherms for various aspect ratios at $Ra=10^4$, $P_r=0.7$, $\beta=22.5^\circ$, 67.5° , 112.5° , 157.5° , $\Delta\Psi=0.5$, $\Delta\Phi=0.1$.

Fig.5는 $Ra=10^4$, $P_r=0.7$, $L/R_i=2$ 인 경우 여러가지 경사각에서 원주방향 좌표에 대한 국소누셀트수를 나타낸다. 안, 바깥 등온벽에서 전도현상이 현저한 구간, $\beta \geq 135^\circ$ 부근에서는 부채형 공간의 원주방향 좌표에 관계없이 국소누셀트값이 최소치로 변화가 적으며, 안 등온벽에서 대류현상이 현저한 구간, $\beta \leq 112.5^\circ$ 에서는 $\theta=0^\circ-10^\circ$ 까지는 국소누셀트값이 최소값으로 거의 변하지 않다가 $\theta=10^\circ-35^\circ$ 의 범위에서는 급격히 증가하여 다시 $\theta=35^\circ-45^\circ$ 까지는 국소누셀트값이 최대치가되어 거의 변하지

않음을 나타낸다. 이구간에서는 회전각과는 관계없이 안 등온벽 $\theta=35^\circ-45^\circ$ 부근에서 가장 큰 열전달이 일어남을 말한다. 그리고 대류현상이 현저한 구간의 바깥등온벽 국소누셀트수의 경우는 $\theta=0^\circ-10^\circ$ 부근까지는 점차 증가하여 $\theta=5^\circ-10^\circ$ 부근에서 최대치가 되며, $\theta=10^\circ-35^\circ$ 까지는 급격히 감소하고, $\theta=35^\circ-45^\circ$ 부근에서 국소누셀트값이 최소가 된다. 이와같은 현상은 좌우 단열벽 주위에서 가열유체의 처음과 마지막의 접촉으로 발생된다.

Fig.6은 $Ra=10^4$, $P_r=0.7$, $\beta=45^\circ$ 인 경우 여러

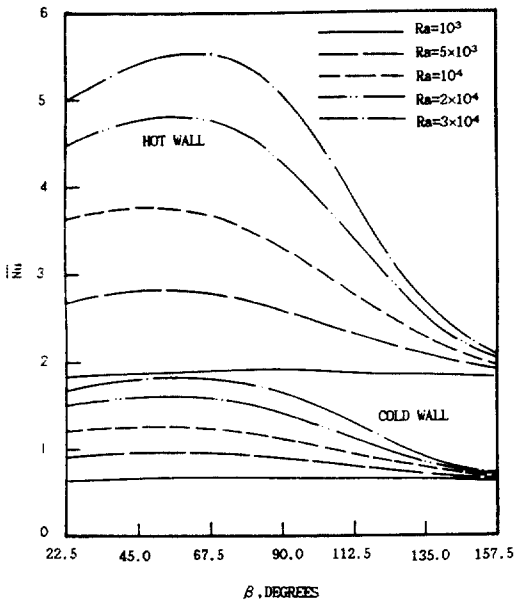


Fig. 4 Mean Nusselt number versus tilt angle for various Rayleigh numbers at $P=0.7$, $L/R=2$.

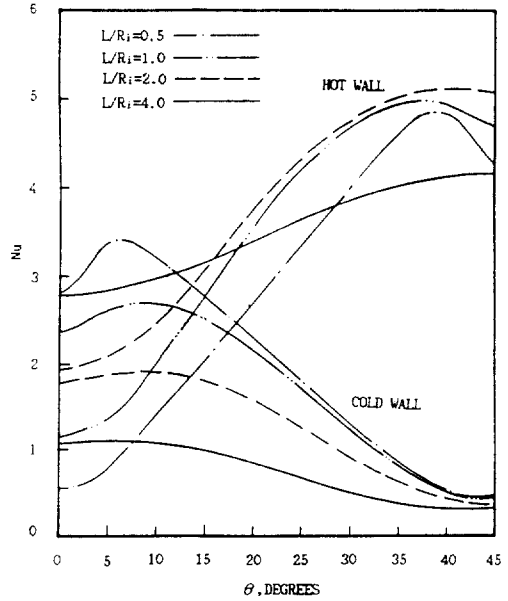


Fig. 6 Local Nusselt number versus angular coordinate for various aspect ratios at $Ra=10^4$, $P=0.7$, $\beta=45^\circ$.

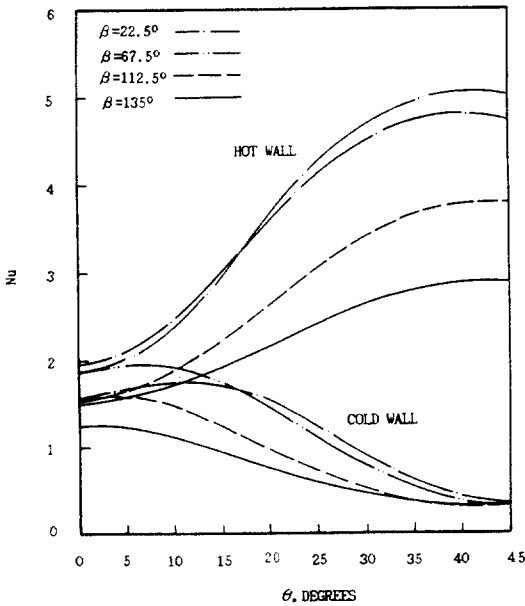


Fig. 5 Local Nusselt number versus angular coordinate for various tilt angles at $Ra=10^4$, $P=0.7$, $L/R=2$.

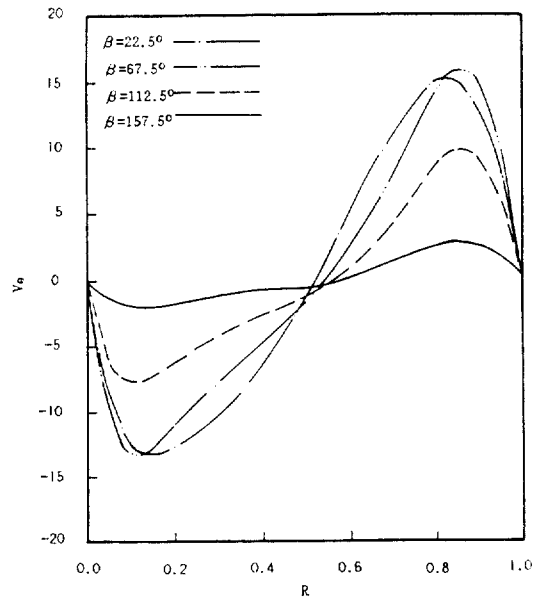


Fig. 7 Dimensionless angular velocity versus dimensionless radial coordinate for various tilt angles at $Ra=10^4$, $P=0.7$, $L/R=2$, $\beta=22.5^\circ$.

가지 L/R_i 에서 원주방향 좌표에 대한 국소 누셀트수를 나타낸다. 안 등온벽에서의 국소 누셀트수 분포는 간격비가 증가함에 따라 $L/R_i \leq 2$ 에서 증가된다. 이는 간격비가 커짐에 따라 전열유체의 증가에 따른 것으로 고려되며, $L/R_i \geq 4$ 의 범위에서는 전열면적에 대한 전열유체량의 비가 대단히 커짐으로 인하여 국소 누셀트수 구배분포가 현저히 감소함을 나타낸다. 바깥 등온벽에서의 국소 누셀트수 분포는 간격비가 증가함에 따라 감소되었다.

Fig.7,은 $Ra=10^4$, $P_r=0.7$, $L/R_i=2$, 그리고 $\theta=20^\circ$ 인 경우 여러가지 경사각에서 반경방향 좌표에 대한 원주방향의 무차원 최대 속도분포를 나타낸다. 무차원 원주방향의 속도 분포는 부채형 공간 중심보다는 안 및 바깥등온 벽면부근에서 속도가 크게 나타난다. 이는 안 등온벽에서 발생된 대류유동이 단열벽면 부근에서 활발한 유동을 형성하기 때문이다. 그리고 무차원 원주방향의 속도의 최대값은 $\beta=67.5^\circ$ 에서 발생되고, 따라서 이경사각 부근에서 열 전달이 최대가 됨을 의미한다.

Fig.8,9는 $Ra=10^4$, $P_r=0.7$, $L/R_i=2$, 그리고 $\theta=7.5^\circ$, 37.5° 인 경우 여러가지 경사각에서의 반경방향 좌표에 대한 무차원 반경방향의 속도 분포를 나타낸다. 무차원 반경방향의 속도분포는 $\theta=7.5^\circ$, 37.5° 에서 각각 최대값을 가지며, 이는 이 부근에서 열전달이 가장 잘 일어남을 의미하고, 부채형 공간 중심 부근이 안, 바깥 등온벽면보다 속도가 크게 나타난다. Fig.7의 무차원 원주방향 속도분포와 Fig.8,9의 무차원 반경방향의 속도분포를 결합하여 고찰하면, 유체유동은 안 등온벽에서 발달한 유체가 좌측 단열벽을 따라 바깥 등온벽을 거쳐 우측 단열벽을 따라서 안 등온벽으로 이동한다.

Fig.10,11,12 및 13은 $Ra=10^4$, $P_r=0.7$, $L/R_i=2$ 그리고 경사각 $\beta=22.5^\circ$, 67.5° , 112.5° 그리고 157.5° 인 경우 여러가지 원주방향 좌표에 대한 무차원 온도 분포를 나타낸다. 경사각의 범위 $\beta \leq 112.5^\circ$ 에서는 대류열전달이 활발하여 양쪽 단열벽면 부근에서 온도구배가 심하고, 중심부근에서는 온도구배가 다소 완만하다. 이는 Fig.2,

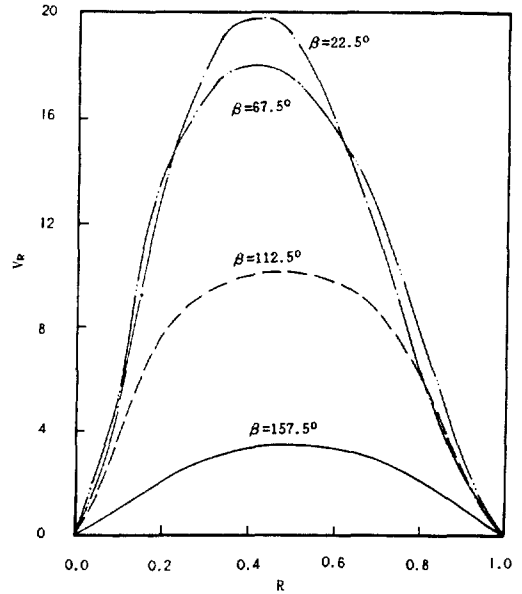


Fig.8 Dimensionless radial velocity versus dimensionless radial coordinate for various tilt angles at $Ra=10^4$, $P_r=0.7$, $L/R_i=2$, $\beta=37.5^\circ$.

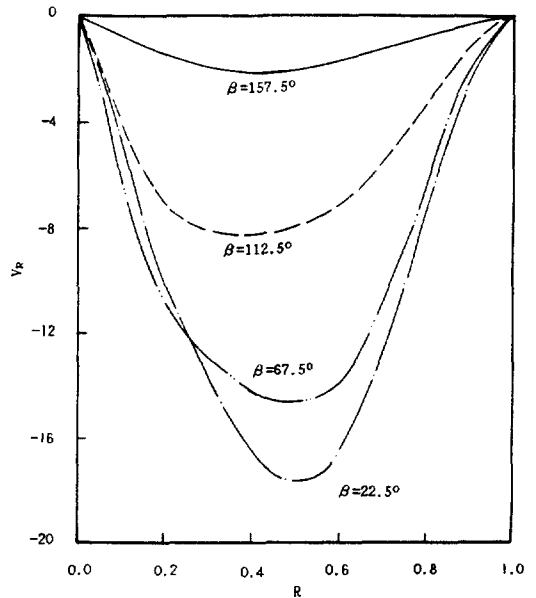


Fig.9 Dimensionless radial velocity versus dimensionless radial coordinate for various tilt angles at $Ra=10^4$, $P_r=0.7$, $L/R_i=2$, $\beta=37.5^\circ$.

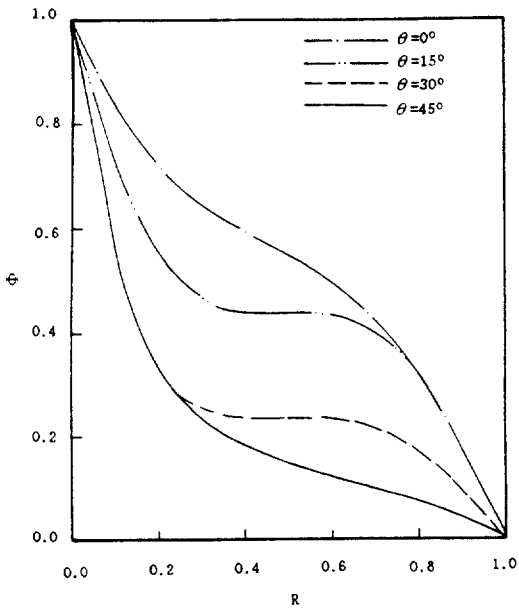


Fig.10 Dimensionless temperature versus dimensionless radial coordinate for various angles at $Ra=10^4$, $Pr=0.7$, $L/R_i=2$, $\beta=22.5^\circ$.

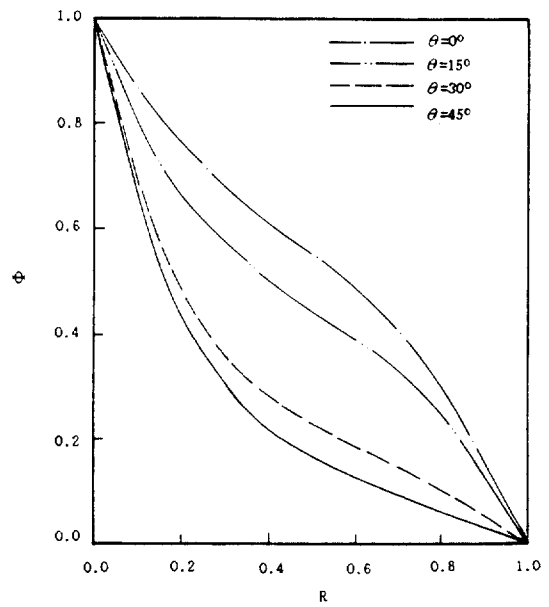


Fig.12 Dimensionless temperature versus dimensionless radial coordinate for various angles at $Ra=10^4$, $Pr=0.7$, $L/R_i=2$, $\beta=112.5^\circ$.

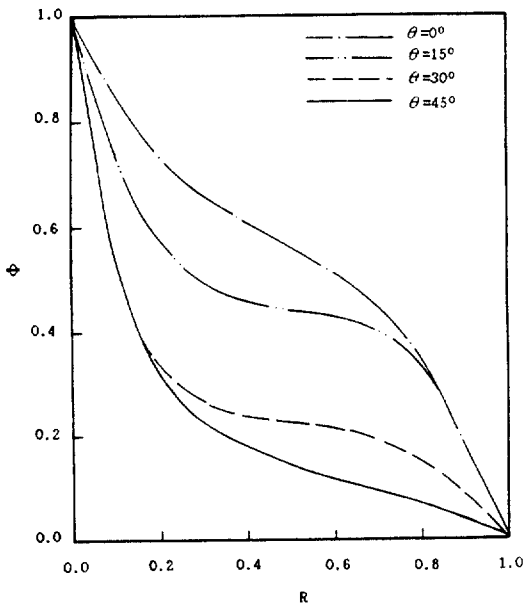


Fig.11 Dimensionless temperature versus dimensionless radial coordinate for various angles at $Ra=10^4$, $Pr=0.7$, $L/R_i=2$, $\beta=67.5^\circ$.

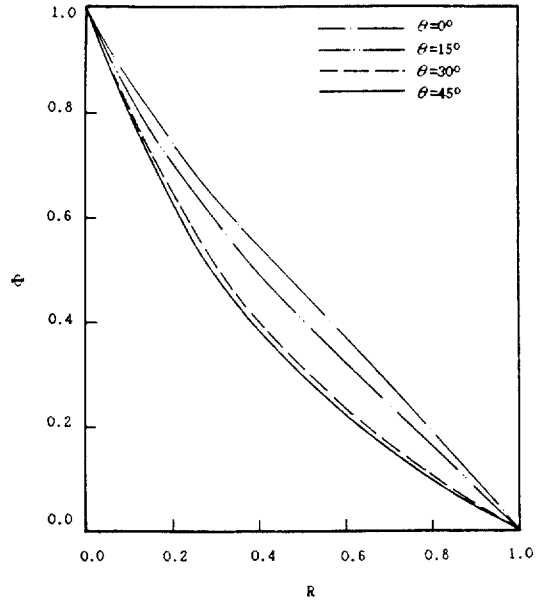


Fig.13 Dimensionless temperature versus dimensionless radial coordinate for various angles at $Ra=10^4$, $Pr=0.7$, $L/R_i=2$, $\beta=157.5^\circ$.

3에서처럼 단열벽 부근에서 열전달이 크게 일어남을 의미하며, $\beta \leq 157.5^\circ$ 에서는 온도구배의 변화가 미소한데, 이는 전도에 의한 열전달이 지배적임을 나타내고 있다.

4. 결 론

본 연구에서 부채형 공간내의 자연대류 열전달 특성을 고찰하기 위하여 $P_r=0.7$, $L/R_i=0.5$, -4.0 , $R_o=10^3-3 \times 10^4$ 그리고 $\beta=22.5^\circ-157.5^\circ$ 를 변수로하여 수치해석 한 결과는 다음과 같다.

(1) 최대 평균 누셀트수는 $Ra=10^4$ 인 경우 $\beta=45^\circ$ 에서 나타났고, $Ra < 10^4$ 인 경우, $\beta=67.5^\circ$ 로 이동하였다.

(2) 대류현상이 현저한 $0^\circ \leq \beta \leq 112.5^\circ$ 에서 보면 최대 국소 누셀트수는 안 등온벽의 경우 $\theta=37.5^\circ$ 부근에서 나타났고, 바깥 등온벽에서는 $\theta=7.5^\circ$ 부근에서 나타났다.

(3) 안 등온벽과 바깥 등온벽의 열평형에서 수치계산오차는 대부분 1%미만으로 본 수치해석결과는 타당함이 입증되었다.

참 고 문 헌

1) T. H. Kuehn, 1976, "Natural Convection Heat Transfer from a Horizontal Circular Cylinder to a Surrounding Cylindrical Enclosure", Ph. D. Thesis, University of Minnesota

- 2) J. H. Lee and T. S. Lee, 1981, "Natural Convection in the Annuli between Horizontal Confocal Elliptic Cylinders", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 24, No. 10, pp. 1739-1742.
- 3) S. S. Kwon, T. H. Kuehn and T. S. Lee, 1982, "Natural Convection in the Annulus between horizontal Circular Cylinders with Three Axial Spacers", ASME J. Heat Transfer, Vol. 104, pp. 118-124.
- 4) K. S. Chang, Y. H. Won and C. H. Cho, 1983, "Pattern of Natural Convection around a Square Cylinder placed Concentrically in a Horizontal Circular Cylinder", ASME J. Heat Transfer, Vol. 105, pp. 273-280.
- 5) L. Iyican, Y. Bayazitoglu, L. C. Witte, 1980, "An Analytical Study of Natural Convective Heat Transfer within a Trapezoidal Enclosure" ASME J. Heat Transfer, Vol. 107, pp.640-647.
- 6) L. M. Simeza and M. M. Yovanovich, 1987, "Shape Factors for Hollow Prismatic Cylinders bounded by Isothermal Inner Circles and Outer Regular Polygons", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 30, No. 4, pp. 812-816.
- 7) 배대석, 권순석, 1989, "수평 비원형 이중관 사이의 환상공간에서의 자연대류" 공기조화 냉동공학 논문집, 제1권, 제4호, pp. 305-312