Journal of the KSQC
Vol. 20, No. 1, June. 1992

1992년 6월 韓國品質管理學會誌 제20권 제1호

퍼지目標計劃 模型의 補助問題化
On Auxiliary Linear Programming Problems for Fuzzy Goal Programming

朴 相 圭*

Abstract

In this paper fuzzy goal programming problems with fuzzy constraints and fuzzy coefficients in both matrix and right hand side of the constraints set are considered. Because of fuzzy coefficients in both members of each constraint ranking methods for fuzzy numbers are considered. An additive model to solve fuzzy goal programming problems is formulated. The diversity of each methods provides a lot of different models of auxiliary linear programming problems from which fuzzy solutions to the fuzzy goal programming problem can be obtained.

1. 序 論

일반적인 目標計劃法(Goal Programming)에서는 目標와 制約條件에 利用되는 係数들이 明確히 規定되어 있어야만 希望水準의 達成程度를 알 수 있다. 그런데 意思決定狀況이 변하거나 目標나 制約條件 등에 대한 信頼性이 缺如되어 있거나 不正確한 母数로 되어있는 퍼지環境(Fuzzy Environment)인 경우에는 確定的인 目標計劃模型을 수립하기가 곤란하다. 이러한 狀況을 고려하여

* 大有工業専門大學 工業經營科

Narasimhan[1]은 퍼지目標(Fuzzy Objectives)와 制約條件에 퍼지部分集合(Fuzzy Subsets)의 概念을 사용하여 퍼지目標計劃模型(Fuzzy GP)을 수립하였다. 이에 비하여 Hannan[2]은 한 개의 線型計劃問題로 單純化된 模型을 제시하였는데 Narasimhan이 제시한 모형의 最適解와 같은 결과를 얻었다. 이어서 Rubin과 Narasimhan[3]은 각 퍼지목표가 階層的(Hierachy) 形態로 되어있는 模型을 제시하였으며, Tiwari[4] 등은 각 퍼지목표에 대하여 "매우 중요하다.", "보통 정도 중요하다." 또는 "그다지 중요하지 않다." 등과 같이 意思決定者가 表現하더라도 第 1順位, 第 2順位 및 第 3順位 등의 優先順位를 차례로 할당한 先達成優先順位(Preemptive Priority)를 고려한 퍼지목표계획모형을 제시하였다. 한편, Rao[5] 등은 意思決定者가 達成하려는 目標에 明確한 希望値를 부여하고 있는가에 따라서 목표계획법과 퍼지목표계획법사이에 주요한 차이가 있다고 보고서, 목표계획모형에서 목표들을 不明確한 希望水準을 가지는 것으로 간주하고, 偏差變數를 所屬函數(Membership Function)로 代替시킨 후에 優先順位의 構造에 따라서 세 가지로 分類한 加法模型(Additive Models)을 제시하였다.

이상의 퍼지목표계획모형에서는 목표만 퍼지상태로 간주하였으며, 제약조건에 대하여는 퍼지상태로 간주하지 않고 있다. 즉, 技術係數와 資源制約이 퍼지인 상태일 경우에는 이들 값이 특정한 값에 일치하지 않거나, 所屬程度가 특정수준에 대하여 계단함수로 되어 있지 않으면 可能解가 존재하지 않거나, 無限個의 制約式을 가지는 線型計劃問題가 되어 계산이 불가능해 지기 때문[6]이다. 따라서 본 연구에서는 다음의 사항을 전제로 하여 퍼지목표계획모형을 수립하고, 퍼지숫자간의 순위관계를 이용한 보조문제를 수립하는 방법을 제시하고자 한다.

첫째, 각 목표는 퍼지상태이고, 부정확한 희망수준을 갖는다.

둘째, 기술계수와 우측값(Right Hand Side Value)은 퍼지상태이나, 意思決定變數는 퍼지상태가 아니다.

셋째, 모형은 線型達成函數 및 線型制約으로 構成된다.

넷째, 퍼지상태는 三角퍼지數字(Triangular Fuzzy Numbers)로 나타낸다.

이상의 조건을 고려한 퍼지목표계획모형을 수립하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\text{Find} \quad X \\ &\text{to satisfy } \tilde{G}_k(X) \geq \tilde{g}_k \\ &\text{subject to } \tilde{A}X \leq \tilde{b} \\ &\qquad X \geq 0,\ k = 1,\ 2,\ \cdots,\ \ell \end{aligned} \quad \cdots\cdots (1)$$

단, X는 x_1, x_2, ……, x_n으로 된 n-벡터, $G_k(X)$와 g_k는 k번째 目標와 希望水準, $\tilde{A}$는 三角퍼지數字의 (m×n)行列, $\tilde{b}$는 三角퍼지數字의 列(Column) 벡터인데 기호 "~"은 퍼지狀態를 意味한다.

2. 퍼지數字의 關係

의사결정자는 부정확한 식(1)의 퍼지제약으로 말미암아 이 제약을 완벽하게 달성할 수 없다. 이러한 사실에 대하여 Delgado[7]는 所屬函數로 표현하고, i번째(i=1, 2,……,m)제약에서 許容할 수 있는 정도의 크기를 퍼지數字로 나타냈는데 그 결과는 다음과 같다.

$$\Sigma \tilde{a}_{ij} x_j \leq \tilde{b}_i + \tilde{t}_i (1-\alpha),\ i=1,\ 2, \cdots, m\ ;\ j=1, 2, \cdots, n, \alpha \in (0,\ 1] \quad \cdots\cdots (2)$$

그러면 식(1)은 다음과 같이 된다.

Find X_j

to satisfy $G_k(X) \geq g_k$

subject to $\Sigma\ a_{ij}x_j \leq b_i + t_i(1-\alpha),\ \alpha \in (0,\ 1]$ ············ (3)

$x_j > 0, \geq i = 1, 2, \cdots, m\ ;\ j = 1, 2, \cdots, n\ ;\ k = 1, 2, \cdots, \ell$

本 硏究에서는 식(2)로 表現되는 關係 ≤ 에 대하여 意思決定者가 順位關係를 適用하는 경우로 다음의 觀點을 중심으로 고려하기로 한다.

2.1. 實數線上에 각 퍼지數字를 射影하는 順位函數인 境遇

Yager[8]에 의해 제안된 순위함수를 이용하는 방법으로 다음과 같다.

$F : N(R) \Rightarrow R$ ············ (4)

일 때 $\tilde{a}$, $\tilde{b} \in N(R)$이고, F가 순위함수이면 $\tilde{a} \leq \tilde{b}$는 $F(\tilde{a}) \leq F(\tilde{b})$를 의미한다. 따라서 $\tilde{a}$의 무게중심은 $[a_1,\ a_3]$구간에서 다음과 같이 정해진다.

$$F_1(\tilde{a}) = \int x\mu_{\tilde{a}}(X)dx / \int \mu_{\tilde{a}}(X)dx \quad \cdots\cdots (5)$$

이 결과를 식(2)에 적용하면 다음의 대소관계를 얻는다.

$$\Sigma[a_1 + a_2 + a_3]_{ij}X_j \leq [b_1 + b_2 + b_3]_i + [t_1 + t_2 + t_3]_i(1-\alpha),\ \alpha \in (0,\ 1] \quad \cdots\cdots (6)$$

한편, $\alpha_{max} = hgt(\tilde{a})$이고 α－수준집합(Level Sets)이 $[a_1^\alpha,\ a_3^\alpha]$라고 하면 α－수준집합의 평균치는 $M[a_1^\alpha,\ a_3^\alpha]$이 된다. 따라서 $\tilde{a}$의 무게중심은 다음과 같이 정해진다.

$$F_2(\tilde{a}) = \int_0^{\alpha max} M[a_1^\alpha,\ a_3^\alpha]d\alpha \quad \cdots\cdots (7)$$

이 결과를 식(2)에 적용하면 다음의 대소관계를 얻는다.

$$\Sigma[a_1 + 2a_2 + a_3]_{ij}X_j \leq [b_1 + 2b_2 + b_3]_i + [t_1 + 2t_2 + t_3](1-\alpha),\ \alpha \in (0,\ 1] \quad \cdots\cdots (8)$$

2.2. 意思決定者가 確信하는 大小關係를 優先順位로 고려하는 경우

Adamo[9]에 의해 제안된 방법으로 k－選好指數(Preference Index)는 다음과 같이 定義하였다.

$$F_k(\tilde{a}) = \max[X \mid \mu_{\tilde{a}}(X) \geq k] \quad \cdots\cdots (9)$$

이 정의에 따라서 $K \in [0,\ 1]$의 소속정도를 갖는 $\tilde{a} \leq \tilde{b}$는 다음의 대소관계를 의미한다.

$$F_k(\tilde{a}) \leq F_k(\tilde{b}) \quad \cdots\cdots (10)$$

따라서 이 결과를 식(2)에 적용하면 다음의 대소관계를 얻는다.

$$\Sigma[ka_2 + (1-k)a_3]_{ij}X_j \leq [kb_2 + (1-k)b_3]_i + [kt_2 + (1-k)t_3]_i(1-\alpha) \quad \cdots\cdots (11)$$

2.3. 可能性 理論인 경우

Dubois－Prade[10]에 의해서 제시된 방법으로 다음과 같이 두 경우로 나뉘어 진다.

$\tilde{a}$에 대한 $\tilde{b}$의 支配可能性度(Grade of Possibility of Dominance)와 支配必要性度(Grade of Necessity of Dominance)를 다음과 같이 定義하였다.

$$Poss(\tilde{a} \leq \tilde{b}) = \underset{y,\ x\ y \geq x}{Sup}\ Min[\mu_{\tilde{a}}(X),\ \mu_{\tilde{b}}(y)] \quad \cdots\cdots (12)$$

$$Nec(\tilde{a} \leq \tilde{b}) = \underset{y,\ x\ x \leq y}{Inf\ Sup}\ Max[\tilde{\mu}_b(y),\ \tilde{\mu}_b(X)\ ] \quad \cdots\cdots (13)$$

이 두 결과를 식(2)에 각각 적용하면 다음의 대소관계를 얻는다.

$$\Sigma[ka_2+(1-k)a_1]_{ij}X_j \le [kb_2+(1-k)b_1]_i+[kt_2+(1-k)t_1]_i(1-\alpha) \quad \cdots\cdots(14)$$

$$\Sigma[ka_2+(1-k)a_1]_{ij}X_j \le [(1-k)b_2+kb_1]_i+[(1-k)t_2+kt_1]_i(1-\alpha) \quad \cdots\cdots(15)$$

단, $\alpha\in(0,\ 1]$과 $k\in[0,\ 1]$임.

3. 퍼지目標計劃模型의 補助問題化

서론에서 식(1)로 제시한 퍼지목표계획모형의 解를 구하기 위하여 퍼지목표를 所屬函數로 變更시키고, 퍼지제약을 順位關係를 이용한 結果인 大小關係를 適用하면 각 目標의 優先順位의 構造에 따라서 單純加法模型(Simple Additive Models), 加重値加法模型(Weighted Additive Models) 및 先達成加法模型(Preemptive Priority Additive Models)을 수립할 수 있다.

3.1. 單純加法模型

이 모형은 의사결정자가 각 목표의 중요도를 모두 같다고 보고 모형을 수립하는 경우로 퍼지 목표계획모형인 식(1)의 퍼지제약에 Yager의 결과인 식(6)을 적용하면 다음과 같이 線型計劃問題인 補助問題를 수립할 수 있다.

Maximize $C(\mu)=\Sigma\ \mu_k$

subject to

$$\mu_k=\begin{cases}1 & ,\ G_k(X)\le g_k\\ \dfrac{G_k(X)-L_k}{g_k-L_k} & ,\ L_k\le G_k(X)\le g_k\\ 0 & ,\ G_k(X)\ge g_k\end{cases}$$

$$\mu_k\le 1 \quad \cdots\cdots(16)$$

$$\Sigma[a_1+a_2+a_3]_{ij}X_j\le[b_1+b_2+b_3]_i+[t_1+t_2+t_3]_i(1-\alpha)$$

$x_j,\ \mu_k\ge 0,\ i=1,2,\cdots,m\ ;\ j=1,2,\cdots,n\ ;\ k=1,2,\cdots,\ell\ ;\ \alpha\in(0,\ 1]$

단, L_k는 k번째 퍼지목표의 下限許容값으로 意思決定者가 狀況에 따라서 主觀的으로 決定하는 값이다.

이 보조문제는 單體法(Simplex Method)으로 解를 구할 수 있다.

식(16)의 퍼지제약을 식(8), (11), (14) 및 (15)로 대체하면 또 다른 보조문제를 각각 수립할 수 있다.

3.2. 加重値加法模型

의사결정자가 각 목표의 相對的 重要度에 따라서 각 目標에 加重値를 부여하는 형태인 모형으로, 각 목표의 가중치를 $w_k(k=1,\ 2,\cdots,\ \ell)$라고 하고, 식(1)의 퍼지목표계획모형의 퍼지제약에 Yager의 결과인 식(6)을 적용하면 다음과 같이 線型計劃問題인 補助問題를 수립할 수 있다.

Maximize $C(\mu)=\Sigma\ W_k\mu_k$

subject to

$$\mu_k=\begin{cases}1 & ,\ G_k(X)\le g_k\\ \dfrac{G_k(X)-L_k}{g_k-L_k} & ,\ L_k\le G_k(X)\le g_k\\ 0 & ,\ G_k(X)\ge g_k\end{cases}$$

$$\mu_k\le 1 \quad \cdots\cdots(17)$$

$$\Sigma[a_1+a_2+a_3]_{ij}X_j\le[b_1+b_2+b_3]_i+[t_1+t_2+t_3]_i(1-\alpha)$$

$x_j,\ \mu_k\ge 0,\ i=1,2,\cdots,m\ ;\ j=1,2,\cdots,n\ ;\ k=1,2,\cdots,\ell\ ;\ \alpha\in(0,\ 1]$

$w_1+w_2+\cdots+w_l=1$

단, L_k는 k번째 퍼지목표의 下限許容값으로 意思決定者가 狀況에 따라서 主觀的으로 決定하는 값이다.

이 보조문제는 單體法(Simplex Method)으로 解를 구할 수 있으며, 식(17)의 퍼지제약을 식(8), (11), (14) 및 (15)로 대체하면 또 다른 보조문제를 각각 수립할 수 있다.

3.3. 先達成加法模型

이 모형은 특정한 목표가 우선적으로 達成되지 않고서는 다른 目標들이 고려될 수 없는 상황으로 이러한 경우에 補助模型은 다음과 같은 原理로 수립될 수 있다. 우선 順次的으로 먼저 達成되어야 할 目標들을 決定한다. 그런 다음에 第 1順位로 達成해야 할 目標들을 利用하여 單純加法模型의 形態로 副問題(Subproblem)를 수립하고 해를 구한다. 이어서 第 2順位로 達成할 목표들을 이용하여 單純加法模型을 수립하는데 이 과정에서 주의할 사항은 第 1順位로 先達成된 目標의 所屬函數의 값이 制約條件으로 追加된다는 점이다. 이와같은 순서로 最下位의 目標에 대한 副問題를 수립하고, 解를 구하면 原 問題의 最終解를 얻게 된다.

따라서 식(1)의 퍼지제약에 Yager의 결과인 식(6)을 적용하면 다음과 같이 第 t次 副問題를 수립할 수 있다.

$$\text{Maximize } C(\mu)=\Sigma(\mu_s)_{pt}$$

$$\text{subject to} \quad \mu_k = \begin{cases} 1 & , \ G_s(X) \le g_s \\ \dfrac{G_s(X)-L_s}{g_s-L_s} & , \ L_s \le G_s(X) \le g_s \\ 0 & , \ G_s(X) \ge g_s \end{cases}$$

$$\mu_s \le 1 \quad \cdots\cdots\cdots(18)$$

$$\Sigma[a_1+a_2+a_3]_{ij}X_j \le [b_1+b_2+b_3]_i+[t_1+t_2+t_3]_i(1-\alpha)\ ;\ \alpha \in (0,\ 1],$$

$$(\mu)_{pr}=(\mu^*)_{pr}$$

$$x_j,\ \mu_s \ge 0,\ i=1,2,\cdots,m\ ;\ j=1,2,\cdots,n\ ;\ k=1,2,\cdots,(s-1)$$

단, L_s는 S번째 퍼지목표의 下限許容값으로 意思決定者가 狀況에 따라서 主觀的으로 決定하는 값이며, $(\mu_s)_{pt}$는 第 t次 副問題에 속한 目標의 所屬函數이고, $(\mu^*)_{pr}$은 第 (t−1)次까지 先達成된 所屬函數의 값이다.

이 補助問題도 單體法(Simplex Method)으로 解를 구할 수 있으며, 식(18)의 퍼지제약을 식(8), (11), (14) 및 (15)로 대체하면 또 다른 補助問題를 각각 수립할 수 있다.

4. 結 論

일반적인 목표계획법의 목표와 제약조건에 이용되는 계수들은 確定的인 상태로 모형이 수립되지만, 퍼지環境下에서는 確定的인 모형을 수립하기가 어렵다. 本 硏究에서는 이와같은 狀況 중 制約條件의 技術係數와 資源制約의 퍼지상태를 三角퍼지數字로 表現한 퍼지목표계획모형을 考慮하였다.

이러한 퍼지제약에 대하여 퍼지數字間의 順位關係의 結果인 大小關係를 이용하여 선형계획문제의 형태로 보조문제화하여 여러 解를 구하는 方法을 單純加法模型, 加重値加法模型 및 先達成加法模型에 대하여 각각 적용하였다.

본 논문에 적용된 順位化法의 結果 以外에도 Chang[11]의 結果도 適用될 수 있으므로 새로운 순위화법이 개발된다면 그 결과도 적용될 수 있을 것이다. 목표의 계수들이 퍼지상태이거나 목표와 제약식이 非線型(Nonlinear)인 경우는 본 논문에서는 고려되지 않았으므로 이러한 경우의 모형수립과 해법에 대하여 새로운 順位化法의 開發과 함께 앞으로 硏究되어야 할 分野가 될 것이다.

參考文獻

1. Narasimhan, R.(1980), "Goal Programming in Fuzzy Environment", Decision Science, Vol. 11, No. 12, pp. 325－336.
2. Hannan, E. L.(1981), "On Fuzzy Goal Programming", Decision Science, Vol. 12, No. 3, pp. 522－531.
3. Rubin, P. A. and Narasimhan, R.(1984), "Fuzzy Goal Programming with Nested Priorities", Fuzzy Sets and Systems 14, pp. 115－129.
4. Tiwari, R. N., Dharmar, S. and Rao, J. R. (1986), "Priority Structure in Fuzzy Goal Programming", Fuzzy Sets and Systems 19, pp. 251－259.
5. Tiwari, R. N., Dharmar, S. and Rao, J. R. (1987), "Fuzzy Goal Programming-An Additive Model", Fuzzy Sets and Systems 24, pp. 27－34.
6. Negoita, C. V.(1981), "The Current Interest in Fuzzy Optimization", Fuzzy Sets and Systems 6, pp. 261－269.
7. Delgado, M., Verdegay, J. L. and Vila, M. A.(1989), "A General Model for Fuzzy Linear Programming", Fuzzy Sets and Systems 29, pp. 21 －29.
8. Yager, R. R.(1981), "A Procedure for Odering Fuzzy Subsets of the Unit Interval", Inform. Sci., 24, pp. 143－161.
9. Adamo, J. M.(1980), "Fuzzy Decision Trees", Fuzzy Sets and Systems 4, pp. 207－219.
10. Dubois, D. and Prade, H.(1983), "Ranking Fuzzy Numbners in the Setting of Possibility Theory", Inform. Sci., 30, pp. 183－224.
11. Chang, H. (1981), "Ranking of Fuzzy Utilities with Triangular Membership Functions", Proc. Int. Conf. on Policy Analysis and Information Systems, pp. 263－272.