

〈論 文〉

## 면외변형 링 요소를 이용한 고유해석

문원주\* · 민옥기\*\* · 김용우\*\*\*

(1993년 1월 6일 접수)

### An Eigen Analysis with Out-of-Plane Deformable Ring Element

Won-Joo Moon, Oak-Key Min and Yong-Woo Kim

**Key Words :** Out-of-Plane Deformable Ring (면외변형 링), Uniformly Full Integration (일괄적 완전적분), Uniformly Reduced Integration (일괄적 감차적분), Selective Reduced Integration (선별적 감차적분), Spurious Constraint (가성구속), Spurious Mode (가성모드), Incorrect Rigid Body Motion (이상강체운동형), Bending Frequency (굽힘진동수), Torsional Frequency (비틀림진동수), Transverse Thickness-Shear Frequency (전단진동수)

#### Abstract

This paper presents the theoretical natural frequencies of out-of-plane deformable ring based on the variables such as out-of-plane deflection, torsional rotation and shear rotation. Based on the same variables, a finite element eigen analysis is carried out by using the  $C^0$ -continuous, isoparametric element which has three nodes per element and three degrees-of-freedom at each node. Numerical experiments are performed to find the integration scheme which produces accurate natural frequencies, natural modes and correct rigid body motion. The uniformly reduced integration and the selective reduced integration give more accurate numerical frequencies than the uniformly full integration, but the uniformly reduced integration produces incorrect rigid body motion while selective reduced integration does correct one. Therefore, the ring element based on the three variables which employes selective reduced integration is recommended to avoid spurious modes, to alleviate the error due to shear locking and to produce correct rigid body motion, simultaneously.

#### 1. 서 론

면외변형 링 (out-of-plane deformable ring)은 기어, 링 요소를 보강한 셀 등과 같이 실제로 링으로 모델링할 수 있는 부품에 많이 응용되고 있다. 따라서 링의 면외진동 (out-of-plane flexural vibration)

문제는 링의 정적인 해석과 더불어 흥미있는 연구 주제가 되어 왔다.<sup>(1~3)</sup>

Love는 링의 평면에 대해서 대칭인 임의의 단면을 갖는 얇은 링에 대한 고유진동수를 유도하였다.<sup>(4)</sup> 그러나 전단변형효과와 회전관성효과를 무시했기 때문에 고차 절직경모드 (high nodal diameter mode)로 진동하는 얇은 링 또는 두꺼운 링의 거동에 대해서는 Love의 고전적인 해는 부정확하다. Rao는 이 효과를 고려하여 두꺼운 링의 진동수에 대한 3차 진동수방정식 (cubic frequency equation)

\*정회원, 연세대학교 기계공학과 대학원

\*\*정회원, 연세대학교 기계설계학과

\*\*\*정회원, 순천대학교 기계공학과

을 유도하였다.<sup>(5)</sup> 그러나 계산결과와 실험결과<sup>(2)</sup>에 대한 비교를 살펴보면 몇몇의 경우는 심각한 오차를 나타내고 있다. 또한 그는 링 진동의 비틀림모드를 고려하지 않았다. Volterra는 두꺼운 링의 면외진동에 대해서 internal constraint 방법을 적용하여 고유진동수를 유도하였다.<sup>(6,7)</sup> 그가 유도한 고유진동수는 원형 단면을 갖는 링의 실험 측정값과 잘 일치하였다. Kirkhope는 전단변형과 회전관성효과를 고려하고, 에너지방법을 적용하여 동적 강성행렬(dynamic stiffness matrix)을 유도하였고 이를 이용하여 링의 고유진동수를 구하였다.<sup>(8)</sup> 또한 그 결과를 Kuhl의 실험 측정값<sup>(9)</sup>과 비교하여 제시하였다.

본 논문에서는 면외변형 링의 유한요소해석을 위해  $C^0$ -연속요소를 사용하였다. 그러나  $C^0$ -연속요소의 경우 강성행렬을 완전수치적분(full integration)을 하면 가상구속(spurious constraint)이 발생되고 이로 인해 강성이 실제보다 크게 계산되어 수치해에 오차를 유발시킨다.<sup>(12,13)</sup> 이러한 가상구속에 의한 오차는 링 요소뿐 만 아니라 전단변형이 가능한 직선보(shear deformable beam), 전단변형이 가능한 판(shear deformable plate) 및 셸(shell) 등에서도 나타난다.<sup>(10,11,14~16)</sup>

가성구속에 의한 오차를 해결하기 위해 전통적인 형상함수 대신에 수정형상함수를 적용하거나 수치적분시 완전적분 대신에 감차적분(reduced integration)을 적용함으로써 가상구속을 제거하여 수치해의 오차를 완화시킬 수 있다. 그러나 적분점의 개수의 지나친 감소는 요소의 구속조건의 부족때문에 수치해에 오차를 발생시킬 수 있다. 이러한 요인으로 인해서 가상모드(spurious mode) 또는 제로에너지모드(spurious zero energy mode)로 불리는 이상변위모드가 나타난다. 고유진동수 및 고유진동형도 강성에 관련되어 있으므로 변위와 응력에 서처럼 가상구속에 의한 오차가 발생할 수 있다.<sup>(10,14,15)</sup>

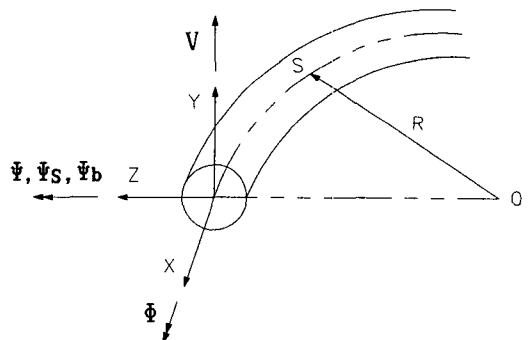
Min과 Kim은 Kirkhope의 면외변형 곡선보 이론을 사용하여, 가상구속을 고려한 유한요소 수식화를 전개하고, 그에 따른 해석결과가 기존의 요소보다 우수함을 보여주었다.<sup>(11,16,17)</sup> 본 논문에서는 이들의 연구결과를 바탕으로, 면외변형 링의 진동에 대하여 가상구속과 가상모드를 고려한 유한요소 수식화를 행한다. 그러나 Kirkhope는 링 평면의 수직방향의 변위(deflection:  $V$ ), 링 단면의 중립

축방향의 비틀림회전(torsional rotation:  $\Phi$ )과 중립축의 전단회전(shear rotation:  $\Psi_s$ )을 사용하여 동적 강성행렬을 유도하여 고유진동수를 구하였다. 이때에 에너지모드에서 나타나는 각 변수의 미분차수의 최대차가 2차 이상이 되기 때문에 가상구속을 제거하기 위해서는 과도한 감차적분을 해야만 한다. 그럴 경우 가상강체운동(spurious rigid body motion)이 많이 발생된다. 따라서 위와 같은 미분차수의 최대차를 줄이기 위해, 본 논문에서는 링 평면의 수직방향의 변위, 링 단면의 중립축방향의 비틀림회전과 중립축의 굽힘회전(bending rotation:  $\Psi_b$ )을 사용하여 동적 강성행렬을 유도하고 유한요소 수식화를 전개한다. 또한 일괄적 감차적분법, 일괄적 완전적분법 그리고 선별적 감차적분법을 적용하여 수치실험을 실시하여, 유한요소해석의 결과로써 얻은 고유진동수를 이론해와 비교 검토한다. 그래서 가상구속에 의한 오차를 완화시키고 가상모드를 배제시키면서 정확한 강체운동형 및 고유진동형을 묘사할 수 있는 새로운 면외변형 링 요소를 제시하고자 한다.

## 2. 이 론

### 2.1 면외변형 링의 운동방정식

링 요소의 변위와 부호는 Fig. 1과 같다. 이 때 링은 균일하고 링 평면에 대해서 대칭인 단면을 갖는다. 변형되지 않은 곡선보의 중심선이 평면상의



- $V$  : Out-of plane deflection
- $\Phi$  : Out-of plane slope of the centroidal axis
- $\Phi$  : Torsional rotation of the section
- $\Phi_b$  : Slope due to bending
- $\Phi_s$  : Slope due to transverse shear

Fig. 1 Coordinate system and displacements of out-of-plane deformable ring

곡선이고 그 평면이 각 점에서 곡선보의 주 평면 (principal plane)이면 곡선보의 진동은 면내진동 (in-plane vibration)과 면외진동의 두 경우로 분리 된다.<sup>(4)</sup> 따라서 원형 링의 경우 면내진동과 면외진동이 연성되지 않는다. 또한 중립축 (centroidal axis: S)은 단면의 전단중심의 축 (axis of shear centers)과 일치한다고 가정한다. 이때 링 평면에 수직방향의 변위 ( $V$ ), 링 단면의 중립축방향의 비틀림회전 ( $\Phi$ )과 중립축의 전단회전 ( $\Psi_s$ )은 연성되어 있다.

중립축의 면외기울기 (out-of-plane slope)는 다음과 같이 표현된다.

$$\Psi = \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \Psi_b + \Psi_s \quad (1)$$

절직경  $n$ 개를 갖는 모드로 자유진동하는 링의 변위를 기하학적 적합조건을 만족시키도록 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} V(\theta, t) &= \bar{V} \cos(n\theta) \exp(i\omega t) \\ \Psi_b(\theta, t) &= \bar{\Psi}_b \sin(n\theta) \exp(i\omega t) \\ \Phi(\theta, t) &= \bar{\Phi} \cos(n\theta) \exp(i\omega t) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $\omega$ 는 고유진동수이고,  $t$ 는 시간,  $i$ 는 허수 단위 (imaginary unit)이다. 또한  $\bar{V}$ ,  $\bar{\Psi}_b$ ,  $\bar{\Phi}$ 는 각 변위의 진폭 (amplitude)을 나타낸다.

링의 면외곡률 (out-of-plane curvature)  $K_1$ 과 비틀림 (twist)  $K_2$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial \Psi_b}{\partial \theta} - \Phi \right) \\ &= \frac{1}{R} (n \bar{\Psi}_b - \bar{\Phi}) \cos(n\theta) \exp(i\omega t) \\ K_2 &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \Psi_b \right) \\ &= -\frac{1}{R} (\bar{\Psi}_b - n \bar{\Phi}) \sin(n\theta) \exp(i\omega t) \end{aligned} \quad (3)$$

또한 전단회전은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Psi_s &= \Psi - \Psi_b \\ &= \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \Psi_b \\ &= -\left( \frac{n}{R} \bar{V} - \bar{\Psi}_b \right) \sin(n\theta) \exp(i\omega t) \end{aligned} \quad (5)$$

면외변형을 하는 링의 변형에너지 ( $U$ )는 전단변형에너지 ( $U_s$ : transverse shear strain energy), 굽힘변형에너지 ( $U_B$ : out-of-plane bending strain energy) 및 비틀림변형에너지 ( $U_T$ : axial twisting str-

ain energy)로 구성되어 있다.<sup>(6)</sup> 즉,

$$U = U_s + U_B + U_T \quad (6)$$

여기서,  $U_s = \int \frac{1}{2} kGA (\Psi_s)^2 R d\theta$

$$U_B = \int \frac{1}{2} EJ_{20} (K_1)^2 R d\theta$$

$$U_T = \int \frac{1}{2} C (K_2)^2 R d\theta \quad (7)$$

이다. 식(6)의 하첨자  $S, B$  및  $T$ 는 차례로 전단 변형, 굽힘변형 및 비틀림변형을 의미한다. 여기서  $k$ 는 전단변형 수정계수 (shear correction factor)이고,  $E$ 는 종탄성계수 (young's modulus),  $A$ 는 링의 단면적,  $G$ 는 횡탄성계수 (shear modulus),  $R$ 은 링의 반지름이다.  $J_{20}$ 는 단면 2차 모멘트 (the 2nd moment of area)로서 다음과 같이 정의된다.

$$J_{20} = \int_A y^i z^i dA \quad (8)$$

비틀림강성 (torsional rigidity)  $C$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$C = \int_A G (y^2 + z^2) nA \quad (9)$$

면외변형을 하는 링의 운동에너지 ( $T$ )는 링의 평면에 수직방향의 변위 ( $V$ )에 의한 운동에너지 ( $T_V$ ), 굽힘회전 ( $\Psi_b$ )에 의한 운동에너지 ( $T_B$ ) 및 축방향의 비틀림회전 ( $\Phi$ )에 의한 운동에너지 ( $T_T$ )로 구성된다.<sup>(6)</sup> 즉,

$$T = T_V + T_B + T_T \quad (10)$$

여기서,  $T_V = \int \frac{1}{2} \rho A (\dot{V})^2 R d\theta$

$$T_B = \int \frac{1}{2} \rho J_{20} (\dot{\Psi}_b)^2 R d\theta$$

$$T_T = \int \frac{1}{2} \rho J_p (\dot{\Phi})^2 R d\theta \quad (11)$$

이다. 식(10)의 하첨자  $V, B$  및  $T$ 는 차례로 수직방향의 변위, 굽힘회전 및 축방향의 비틀림회전에 의한 운동에너지를 의미한다. 여기서  $\rho$ 는 밀도 (mass density)를 의미하며,  $J_p = J_{02} + J_{20}$ 이다.

운동에너지와 변형에너지로부터 Lagrangian을 구하여 각각의 변위  $q_i$ 에 대해서 편미분을 수행하면 운동방정식을 다음의 형태로 얻을 수 있다.

$$\{[K] - \omega^2 [M]\} \{q\} = \{0\} \quad (12)$$

여기서 변위진폭벡터  $q$ 는 다음과 같다.

$$q^T = [q_1, q_2, q_3] = [\bar{V}, \bar{\Phi}, \bar{\Psi}_b] \quad (13)$$

여기서 동적 강성행렬 (dynamic stiffness matrix), 즉 변위진폭벡터  $q$ 에 대응하는 행렬  $[[K]-\omega^2[M]]$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\pi R \begin{bmatrix} kGA \frac{n^2}{R^2} & 0 & -kGR \frac{n}{R} \\ -\omega^2 \rho A & & \\ \hline & \frac{EJ_{20}+n^2C}{R^2} & -\frac{n}{R^2} (EJ_{20}+C) \\ & -\omega^2 \rho J_p & \\ \hline & & \frac{n^2 EJ_{20}+C}{R^2} + kGA \\ & & -\omega^2 \rho J_{20} \end{bmatrix} \quad (14)$$

SYMMETRIC

## 2.2 면외변형 링 요소의 유한요소 수식화

구속되지 않은 면외변형 링 (unconstrained out-of-plane deformable ring)의 고유진동수를 구하기 위해 링의 자유진동문제를 고려한다. 이를 위해 Hamilton의 원리를 적용하여 링 요소의 강성행렬과 질량행렬 (mass matrix)을 유도한다.

링의 면외 곡률  $K_1$ 과 비틀림  $K_2$  및 전단회전  $\Psi_s$ 는 Fig. 1의 곡선 좌표계에서 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{R} (R\Psi_{b,s} - \Phi) \\ K_2 &= \frac{1}{R} (R\Phi_s + \Psi_b) \\ \Psi_s &= \Psi - \Psi_b = V_{,s} - \Psi_b \end{aligned} \quad (15)$$

식(6)과 식(10)으로부터 면외변형 링의 변형에너지 ( $U$ )와 운동에너지 ( $T$ )를 곡선 좌표계에서 나타내면,

$$U = \frac{1}{2} \int [kGA (V_{,s} - \Psi_b)^2 + EJ_{20} (\Psi_{b,s} - \frac{\Phi}{R})^2 + C (\Phi_{,s} + \frac{\Psi_b}{R})^2] dS \quad (16)$$

$$T = \frac{1}{2} \int [\rho A (\dot{V})^2 + \rho J_{20} (\dot{\Psi}_b)^2 + \rho J_p (\dot{\Phi})^2] dS \quad (17)$$

이다.

이제 식(17)에 Hamilton의 원리, 즉

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U) dt = 0 \quad (18)$$

을 적용하고 운동에너지 항을 시간에 대하여 부분

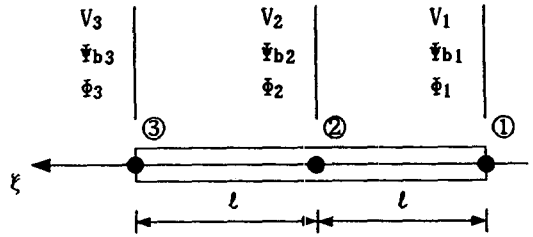


Fig. 2 Nodal variables of a typical quadratic ring element

적분을 수행하여,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int [\rho A \dot{V} \delta V + \rho J_{20} \dot{\Psi}_b \delta \Psi_b + \rho J_p \dot{\Phi} \delta \Phi \\ + kGA (V_{,s} - \Psi_b) \delta (V_{,s} - \Psi_b) \\ + EJ_{20} (\frac{\Phi}{R} - \Psi_{b,s}) \delta (\frac{\Phi}{R} - \Psi_{b,s}) \\ + C (\Phi_{,s} + \frac{\Psi_b}{R}) \delta (\Phi_{,s} + \frac{\Psi_b}{R})] dS dt = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

을 얻는다. 여기서  $t_0$ 와  $t_1$ 는 임의의 시각을 의미한다.

절점에서 정의되는 변위를 Fig. 2와 같은 2차 아이소파라메트릭 링 요소 (quadratic isoparametric ring element)의 형상함수를 사용하여 곡선 좌표계에서 절점변위벡터 ( $U_i$ ,  $i=1, 2, 3$ )로 표시하면 다음과 같이 정의된다.

$$U_i = [V_i, \Psi_{bi}, \Phi_i]^T \quad i=1, 2, 3 \quad (20)$$

요소의 변위를 다시 벡터로 표시하면,

$$U = [U_1, U_2, U_3]^T \quad (21)$$

이다. 따라서 요소의 가속도벡터는

$$\dot{U} = [\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_3]^T \quad (22)$$

로 표시할 수 있고, 여기서 절점 가속도벡터는 다음과 같다.

$$\dot{U}_i = [\dot{V}_i, \dot{\Psi}_{bi}, \dot{\Phi}_i]^T \quad i=1, 2, 3 \quad (23)$$

여기서 자유도  $V$ ,  $\Psi_b$ ,  $\Phi$ 와 각 자유도의 곡선 좌표  $S$ 에 대한 1차 도함수 및 자유도의 시간  $t$ 에 대한 2차 도함수를 2차 형상함수 (quadratic shape function:  $N_i$ ,  $i=1, 2, 3$ )를 사용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V &= \sum_{i=1}^3 N_i V_i, \quad \dot{V} = \sum_{i=1}^3 N_i \dot{V}_i, \quad V_{,s} = \sum_{i=1}^3 N_{i,s} V_i \\ \Psi_b &= \sum_{i=1}^3 N_i \Psi_{bi}, \quad \dot{\Psi}_b = \sum_{i=1}^3 N_i \dot{\Psi}_{bi}, \quad \Psi_{b,s} = \sum_{i=1}^3 N_{i,s} \Psi_{bi} \end{aligned}$$

$$\phi = \sum_{i=1}^3 N_i \phi_{ii}, \quad \ddot{\phi} = \sum_{i=1}^3 N_i \ddot{\phi}_i, \quad \phi_{,s} = \sum_{i=1}^3 N_{i,s} \phi_i \quad (24)$$

최종적으로 위 식의 형태는

$$M\ddot{U} + KU = 0 \quad (25)$$

으로 정리된다. 여기서 요소 강성행렬  $K$ 는

$$K = \sum_{i,j=1}^3 K_{ij} \quad (26)$$

이고, 요소 강성행렬의 원소  $K_{ij}$ 는

$$K_{ij} = \int_{h^e} B_i^T D B_j dS \quad (27)$$

이다. 여기서  $h^e$ 는 요소의 길이 즉,  $h^e = 2\ell$ 이다.

탄성행렬  $D$ 는

$$D = \begin{bmatrix} KGA & 0 & 0 \\ 0 & EJ_{20} & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad (28)$$

이고, 변형률행렬  $B_i$ 는

$$B_i = \begin{bmatrix} N_{i,s} & -N_i & 0 \\ 0 & -N_{i,s} & N_i/R \\ 0 & N_i/R & N_{i,s} \end{bmatrix} \quad (29)$$

이다. 그리고 요소 질량행렬  $M$ 은

$$M = \sum_{i,j=1}^3 M_{ij} \quad (30)$$

이고, 요소 질량행렬의 원소  $M_{ij}$ 는 다음과 같다.

$$M_{ij} = \int_h^e N_i^T P N_j dS \quad (31)$$

여기서 관성행렬  $P$ 는

$$P = \begin{bmatrix} \rho A & 0 & 0 \\ 0 & \rho J_{20} & 0 \\ 0 & 0 & \rho J_p \end{bmatrix} \quad (32)$$

이고, 행렬  $N_i$ 는

$$N_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (33)$$

이다.

### 3. 수치해석 및 검토

본 절에서는 2.1절에서 유도한 동적 강성행렬을

이용하여 면의변형 링의 이론 고유진동수(theoretical natural frequency)를 구하고, 또한 본 논문에서 제안한 면의변형 링 요소를 사용하여 얻은 유한 요소해석 결과를 이론해와 비교 검토한다.

#### 3.2 모델 선정 및 검토

수치적분 방법에 따라서 강성에 관련된 변위 및 응력뿐 만 아니라 고유진동수 및 고유진동형에서도 가상구속 또는 가상모드에 의한 오차가 발생할 수 있으므로, 가상구속과 가상모드의 영향을 고려하기 위해 구속이 없는 사각 단면의 링에 대해서 링 단면의 두께 대 반지름의 비( $d/R$ )가 다른 모델을 선정하여 이론해를 구하여 기존의 실험값과 비교 검토하고, 각 모델의 수치해를 이론해와 비교 검토한다. 이를 위해 Fig. 3과 같은 형상을 갖는 세가지 모델을 선정하여 수치실험을 실시한다.

링의 재료상수는 각 경우 모두 다음과 같다.

중탄성계수	$E = 2.07 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
푸아송 비	$\nu = 0.29$
횡탄성계수	$G = E/2(1+\nu) = 8.023 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
전단변형 수정계수	$k = 5/6$
밀도	$\rho = 7833 \text{ Kg/m}^3$

또한 각 모델의 기하학적 치수는 다음과 같다.

- (1) 링 단면의 두께 대 반지름의 비( $d/R$ )가 0.01인 링
  - $R = 0.044776 \text{ m}$
  - $d = 0.000448 \text{ m}$
- (2) 링 단면의 두께 대 반지름의 비( $d/R$ )가 0.4618인 링
  - $R = 0.03656 \text{ m}$
  - $d = 0.01688 \text{ m}$

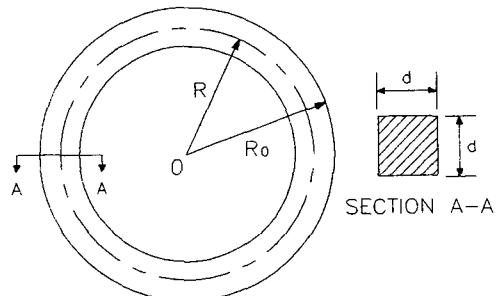


Fig. 3 Geometry of unconstrained out-of-plane deformable ring

(3) 링 단면의 두께 대 반지름의 비( $d/R$ )가 1.1298인 링

$$R=0.02876 \text{ m}$$

$$d=0.03248 \text{ m}$$

3.2 이론해

앞의 2.1절에서 구한 식(14)의 동적 강성행렬을 이용하여 3.1절에서 선정된 세가지 링 모델에 대해서 고유진동수를 절직경이 0개인 모드( $n=0$ )부터 5개인 모드( $n=5$ )까지 구하여서 Table 1~Table 3에 정리한다. 여기서 굽힘진동수의 경우는 절직경이 0개인 경우와 1개인 경우는 강체운동(rigid body motion)을 나타낸다.<sup>(5,20)</sup> 고유진동수는 동적 강성행렬을 이용하여 구한 고유치( $\lambda_{ij}$ )와 고유진동수( $\omega_{ij}$ )와의 관계를 이용하여 바꾸어 준 값이다.

$$\omega_{ij} = \frac{\sqrt{\lambda_{ij}}}{2\pi} \tag{34}$$

여기서 하첨자  $i$ 는  $i$ 번째 모드,  $j$ 는  $j$ 번째 변위를 의미한다. 즉,  $\omega_{11}$ 은 면의 수직방향의 변위( $V$ )에 대한 고유진동수, 즉 굽힘진동수(bending frequency)를 의미하며,  $\omega_{12}$ 는 축 방향의 비틀림회전( $\phi$ )에 대한 고유진동수 즉 비틀림진동수(torsional frequency)를 의미하며,  $\omega_{13}$ 는 중립축의 굽힘회전( $\phi_b$ )에 대한 고유진동수 즉 전단진동수(transverse thickness-shear frequency)를 의미한다.

Table 1~Table 3의 이론해를 살펴보면  $d/R$ 가 증가할수록 굽힘진동수( $\omega_{n1}$ )는 현저히 증가하고 비틀림진동수( $\omega_{n2}$ )도 증가하는 경향을 나타내나 전단진

동수( $\omega_{n3}$ )는 감소하는 경향이 있다. 따라서  $d/R$ 가 증가할수록 비틀림진동수( $\omega_{n2}$ )와 전단진동수( $\omega_{n3}$ )가 저차의 진동수로 내려오는 경향이 있다.

굽힘진동수( $\omega_{n1}$ )의 경우 Table 4에 나타낸 바와 같이 이론해와 Kuhl<sup>(9)</sup>의 실험값을 비교하면,  $d/R$ 가 0.4618인 경우는 대략 4.5%~5.4%의 백분율 오차를 갖는 반면  $d/R$ 가 1.1298인 경우는 대략 14%~30%의 백분율 오차를 갖는다. 여기서 Table 4에 나타낸 이론해의 실험값에 대한 백분율 오차는 다음과 같이 계산한다.

$$\text{Percentage error (\%)} = \frac{(\text{이론해}) - (\text{실험값})}{(\text{실험값})} \times 100 \tag{35}$$

**Table 2** Theoretical natural frequencies of complete circular ring ( $d/R=0.4618$ ): where\* denotes rigid-body motion

n	Theoretical Frequency [Hz]		
	Bending frequency( $\omega_{n1}$ )	Torsional frequency( $\omega_{n2}$ )	Transverse thickness-shear frequency( $\omega_{n3}$ )
0	0*	15824	97437
1	0*	20462	100908
2	6924	31172	110234
3	17639	43716	123419
4	30116	56850	138969
5	43424	70243	156019

**Table 1** Theoretical natural frequencies of complete circular ring ( $d/R=0.01$ ):where\* denotes rigid-body motion

n	Theoretical Frequency [Hz]		
	Bending frequency( $\omega_{n1}$ )	Torsional frequency( $\omega_{n2}$ )	Transverse thickness-shear frequency( $\omega_{n3}$ )
0	0*	12921	3595487
1	0*	17215	3595548
2	138	26164	3595733
3	395	36491	3596040
4	761	47302	3596469
5	1235	58323	3597022

**Table 3** Theoretical natural frequencies of complete circular ring ( $d/R=1.1298$ ):where\* denotes rigid-body motion

n	Theoretical Frequency [Hz]		
	Bending frequency( $\omega_{n1}$ )	Torsional frequency( $\omega_{n2}$ )	Transverse thickness-shear frequency( $\omega_{n3}$ )
0	0*	20116	55559
1	0*	23173	65869
2	15416	36757	86256
3	33785	52772	109656
4	52358	69425	134462
5	70643	86412	160135

**Table 4** Percentage error of theoretical bending frequencies with respect to experimental frequencies of complete circular ring by Kuhl<sup>(9)</sup>

n		d/R=0.4618			d/R=1.1298		
		Frequency[Hz]		Percentage error(%)	Frequency[Hz]		Percentage error(%)
		Experimental	Theoretical		Experimental	Theoretical	
0	$\omega_{01}$	-	0	-	-	0	-
	$\omega_{02}$	-	15824	-	-	20116	-
	$\omega_{03}$	-	97437	-	-	55559	-
1	$\omega_{11}$	-	0	-	-	0	-
	$\omega_{12}$	-	20462	-	-	23173	-
	$\omega_{13}$	-	100903	-	-	65869	-
2	$\omega_{21}$	6620	6924	4.59	13485	15416	14.32
	$\omega_{22}$	32150	31172	-3.04	46050	36757	-20.18
	$\omega_{23}$	-	110234	-	-	86256	-
3	$\omega_{31}$	16790	17639	5.06	28100	33785	20.03
	$\omega_{32}$	45000	43716	-2.85	63900	52772	-17.41
	$\omega_{33}$	-	123419	-	-	109656	-
4	$\omega_{41}$	28700	30116	4.93	41600	52358	25.86
	$\omega_{42}$	58650	56850	-3.07	-	69425	-
	$\omega_{43}$	-	138969	-	-	133462	-
5	$\omega_{51}$	41200	43424	5.40	54500	70463	29.62
	$\omega_{52}$	72250	70243	-2.78	-	86412	-
	$\omega_{53}$	-	156019	-	-	160135	-

백분율 오차는  $d/R$ 가 증가할수록 심해진다. 이러한 오차의 주 원인은 수치해가 근본적으로 링 이론으로부터 계산된데 반해,  $d/R$ 가 1.1298인 경우는 링이라기 보다는 원형디스크(circular disk)에 가깝기 때문이다. 즉,  $d/R$ 가 2로 되면 링은 원형 디스크가 되므로 이 경우에는 링 이론이 더 이상 만족하지 않는다. 따라서 본 논문에서 사용한 면외변형 링 이론의 타당성은 대략 링 단면의 두께 대 반지름의 비( $d/R$ )가 1까지로 제한된다.<sup>(5)</sup>

**3.3 수치실험 및 검토**

수치실험은 Table 5에 나타낸 세가지 적분법을 3.2절에서 선정한 세 모델에 적용하여 실시한다. Table 5의 첫번째 적분법을 일괄적 감차적분법(UR-

I; uniformly reduced integration)이라 정의하고, 두번째 적분법을 일괄적 완전적분법(UFI; uniformly full integration)이라 정의하고, 세번째 적분법을 선별적 감차적분법(SRI; selective reduced integra-

**Table 5** Integration schemes of quadratic out-of-plane deformable ring element

Integration schemes	Number of integration points per element					
	$U_s$	$U_B$	$U_T$	$T_V$	$T_B$	$T_T$
URI	2	2	2	3	3	3
UFI	3	3	3	3	3	3
SRI	2	3	3	3	3	3

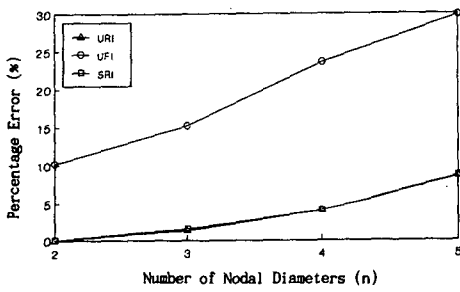
tion)이라 정의한다.

여기서 일괄적 감차적분법(URI)을 선택한 이유는 첫째 각 에너지모드에 포함된 가성구속을 완화시킬 수 있고, 둘째 김의 이론<sup>(10)</sup>에 의하면 구속이 없는 면외변형 링에서는 일괄적 완전적분법(UFI)과 일괄적 감차적분법(URI)의 경우 모두 이론적인 가성모드가 발생하지 않기 때문이다. 또한 선별적 감차적분법(SRI)을 선택한 이유는 전단변형에너지에 포함된 가성구속에 의한 오차가 굽힘변형에너지 및 비틀림변형에너지에 포함된 가성구속에 의한 오차가 훨씬 크기 때문에 즉, 전단가성구속에 의해 강성과잉현상이 발생되기 때문에 전단변형에너지에 포함된 가성구속만을 완화시키기 위함이다.<sup>(11)</sup> 면외변형 링에서는 선별적 감차적분법(SRI)의 경우

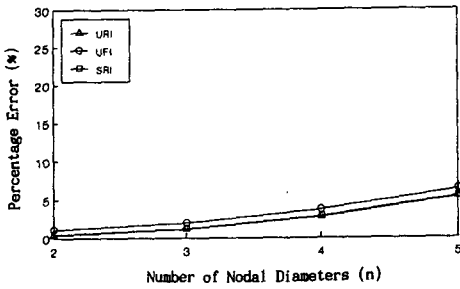
도 가성모드는 발생하지 않는다.

(1) 적분법에 따른 고유진동수의 정확도 비교

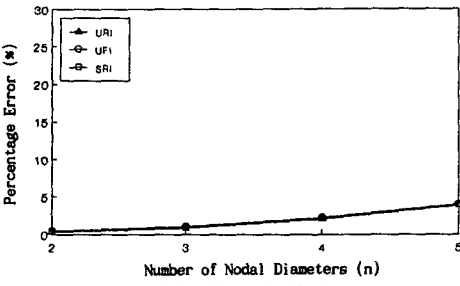
면외변형 링에서 가성구속에 의한 영향을 고려하면, 일반적으로 일괄적 완전적분법(UFI)에 의한 수치해(번위)보다 일괄적 감차적분법(URI)에 의한 수치해가 더 정확하고 전단변형에너지에 포함된 가성구속을 완화시킨 선별적 감차적분(SRI)에 의한 수치해는 일괄적 감차적분법(URI)에 의한 수치해와 유사한 결과를 나타낸다.<sup>(10)</sup> 또한  $d/R$ 가 감소할수록 면의 수직변위( $V$ )의 경우에는 전단가성구속에 의한 오차가 특히 심각하게 나타나기 때문에 일괄적 완전적분법을 적용한 경우의 수치해(굽힘진동수)는 세 모델 중  $d/R$ 가 가장 작은 링의 경우에 오차가 가장 클 것으로 예측된다.<sup>(10,17)</sup>



(a)  $d/R=0.01$

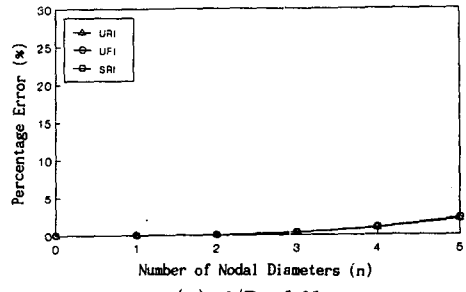


(b)  $d/R=0.4618$

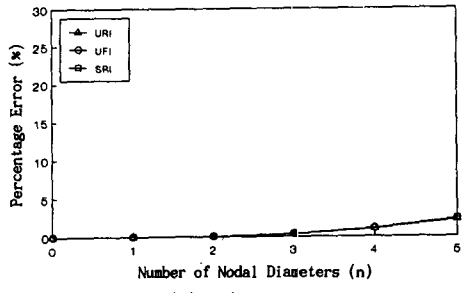


(c)  $d/R=1.1298$

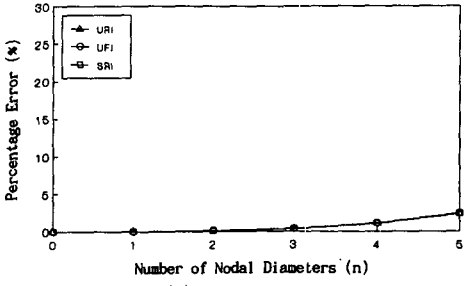
Fig. 4 Percentage error of bending frequencies of unconstrained out-of-plane deformable ring



(a)  $d/R=0.01$



(b)  $d/R=0.4618$



(c)  $d/R=1.1298$

Fig. 5 Percentage error of torsional frequencies of unconstrained out-of-plane deformable ring

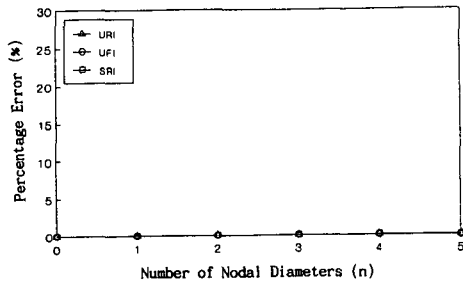


본 절에서는 고유진동수의 경우도 일괄적 감차적 분법에 의한 결과와 선별적 감차적분법에 의한 결과가 일괄적 완전적분법에 의한 결과보다도 더 정확하다는 사실을 알아보기 위해서, 이 세가지 적분법에 의해서 구한 고유진동수의  $d/R$ 의 변화에 따른 정확도를 Fig. 4~Fig. 6에 도시한다. 여기서 Fig. 4~Fig. 6에서의 수치해의 이론해에 대한 백분율을 오차는 다음과 같이 계산한다.

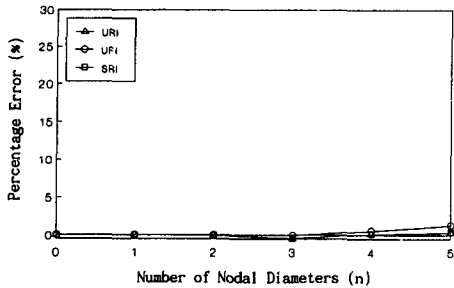
$$\text{Percentage error (\%)} = \frac{(\text{수치해}) - (\text{이론해})}{(\text{이론해})} \times 100$$

(36)

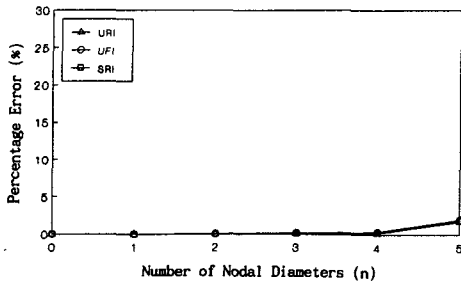
링의 단면의 두께 대 반지름의 비( $d/R$ )에 관계



(a)  $d/R=0.01$

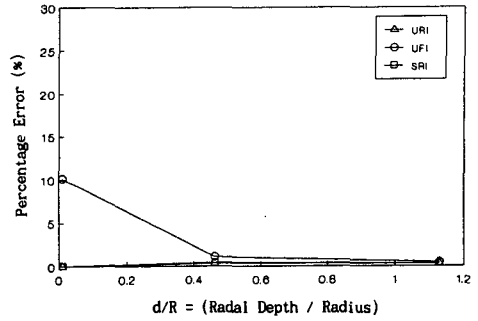


(b)  $d/R=0.4618$

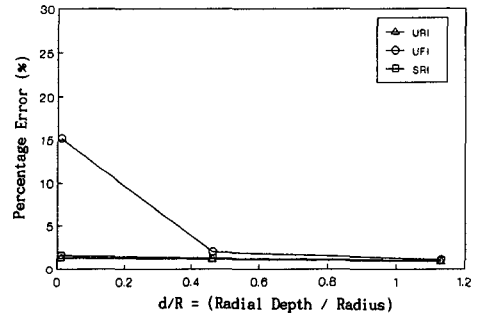


(c)  $d/R=1.1298$

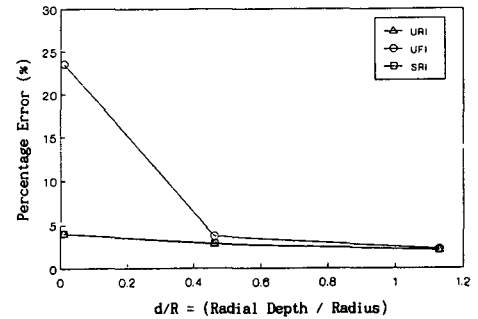
Fig. 6 Percentage error of transverse thickness-shear frequencies of unconstrained out-of-plane deformable ring



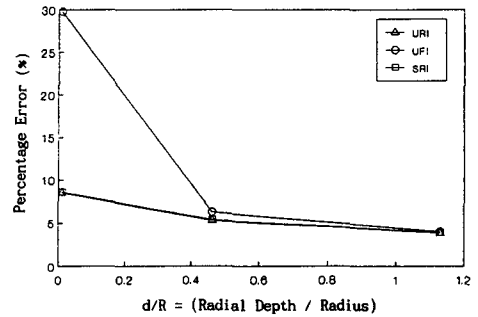
(a)  $n=2$



(b)  $n=3$



(c)  $n=4$



(d)  $n=5$

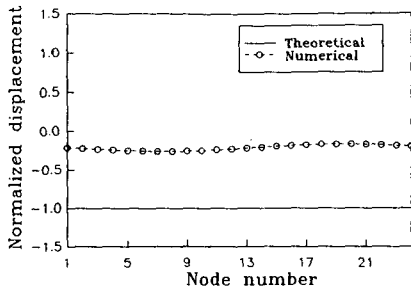
Fig. 7 Percentage error of bending frequencies of unconstrained out-of-plane deformable ring with respect to  $d/R$

없이 일괄적 감차적분법(URI)에 의한 수치해와 선별적 감차적분법(SRI)에 의한 수치해가 일괄적 완전적분법(UFI)에 의한 것보다 더 정확하다는 사실을 Fig. 4~Fig. 6으로부터 확인할 수 있다. 이는 일괄적 감차적분법 또는 선별적 감차적분법의 경우에는 전단변형에너지에 대해서 감차적분을 적용함으로써 전단가성구속을 완화시켜 강성과잉현상이 유발되지 않도록 하였기 때문이다.<sup>(11)</sup> 특히 비틀림진동수( $\omega_{n2}$ )와 전단진동수( $\omega_{n3}$ )는 적분방법에 관계없이 오차가 작은 반면에 굽힘진동수( $\omega_{n1}$ )는 전단변형에너지에 감차적분을 사용함으로써 전단가성구

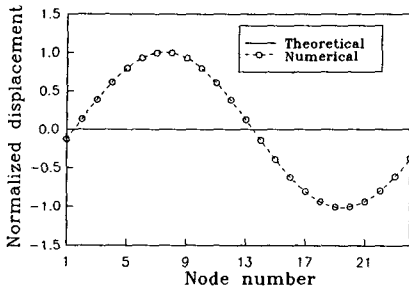
속에 의한 오차를 완화시킬 수 있음을 알 수 있다. 위의 사실을 확인하기 위해서 굽힘진동수( $\omega_{n1}$ )의 이론해에 대한 백분율 오차를  $d/R$ 에 대해서 Fig. 7에 다시 도시한다.

(2) 적분법에 따른 강체운동형의 정확도

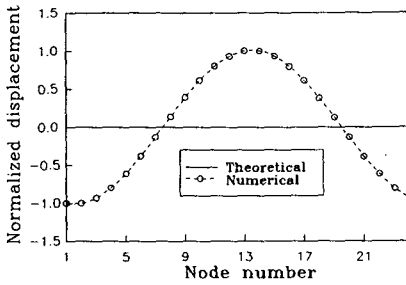
일괄적 감차적분법과 선별적 감차적분법 모두 가성구속에 의한 오차를 완화시킴으로써 고유진동수가 이론해에 근접하였다. 또한 고유진동형도 잘 일치하였다. 그러나 강체운동형을 살펴보면 세 모델 중 강성이 가장 약한 경우( $d/R=0.01$ )에 일괄적 감차적분법을 적용할 경우 Fig. 8에 도시한 바와



(a) Deflection

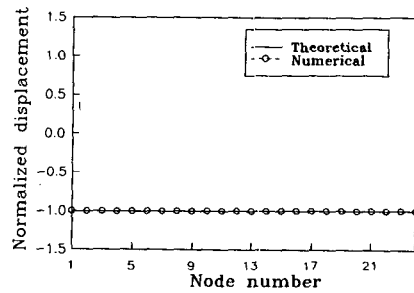


(b) Torsional rotation

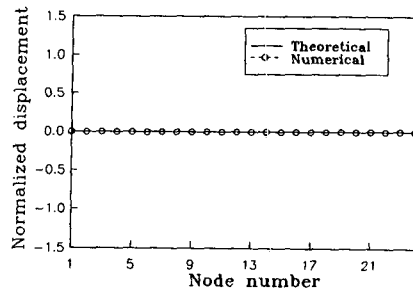


(c) Bending rotation

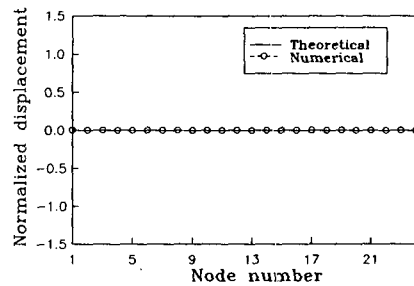
Fig. 8 Natural mode shapes of rigid body motion using uniformly reduced integration( $d/R=0.01, \omega_{i1}=0$ )



(a) Deflection



(b) Torsional rotation



(c) Bending rotation

Fig. 9 Natural mode shapes of rigid body motion using selective reduced integration( $d/R=0.01, \omega_{i1}=0$ )

같이 강체운동형(rigid body motion)이 실제와는 다른 이상강체운동형(異常剛體運動形: incorrect rigid body motion)이 발생한 반면 나머지 두 모델에는 강체운동형이 실제와 일치하였다. 이는 일괄적 감차적분법의 구속조건의 수가 강성이 약한 경우에는 강체운동형을 정확히 묘사하기에는 충분하지 않기 때문이다. 따라서 가성구속에 의한 오차가 상대적으로 가장 큰 전단변형 에너지에만 감차적분을 적용하는 선별적 감차적분법을 사용함으로써 구속조건의 수를 증가시키면 Fig. 9에 도시한 바와 같이 좀더 정확한 강체운동형을 얻을 수 있다.

위에서 살펴본 바와 같이 면외변형 링의 유한요소 해석시 가성구속에 의한 오차를 완화시키기 위해서는 일괄적 감차적분법 또는 선별적 감차적분법을 적용해야 하나 일괄적 감차적분법을 적용한 경우는 이상강체운동형(異常剛體運動形)이 발생할 수 있으므로 선별적 감차적분법을 적용해야 함을 알 수 있다.

#### 4. 결 론

본 논문에서는 구속이 없는 면외변형 링을  $C^0$ -연속 아이소파라메트릭 요소를 적용하여 유한요소 해석을 할 경우에 발생할 수 있는 가성구속 및 가성모드에 의한 오차를 완화 또는 배제시킨 요소를 제시하였다. 가성구속에 의한 오차를 완화시키려면 일괄적 감차적분법이 적용되어야 하므로 일괄적 감차적분법을 적용하여도 가성모드가 도입되지 않도록 하기 위하여, Kirkhope가 사용한 변수(수직방향의 변위:  $V$ , 비틀림회전:  $\Phi$ , 전단회전  $\Psi_s$ )보다는 수직방향의 변위( $V$ ), 비틀림회전( $\Phi$ ), 굽힘회전( $\Psi_s$ )을 기본변수로 택하였다. 이 새로운 기본변수를 사용하여 이론해(고유진동수 및 고유진동형)를 구하였으며 또한 유한요소 수식화를 전개하여 일괄적 감차적분법을 적용하여도 가성모드가 발생하지 않도록 하였다.

가성구속에 의한 오차를 완화시키면서 고유진동수, 고유진동형 및 강체운동형을 좀더 정확히 묘사할 수 있는 적분방법을 찾기 위하여 링의 두께 대 반지름의 비가 서로 다른 세가지 모델에 대해서 일괄적 완전적분법, 일괄적 감차적분법 및 선별적 감차적분법을 적용하였다. 이러한 수치실험의 결과를 이론해와 비교 검토하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 면외변형 링의 거동을 묘사하는 기본변수로 수직방향의 변위( $V$ ), 비틀림회전( $\Phi$ ), 굽힘회전( $\Psi_s$ )을 택함으로써 일괄적 감차적분법을 적용하여도 가성모드는 발생하지 않는다.

(2) 일괄적 감차적분법 또는 선별적 감차적분법을 사용하면 전단 가성구속의 영향이 현저히 완화되므로 일괄적 완전적분법에 의한 수치해보다 더욱 정확한 수치해를 얻을 수 있다.

(3) 가성구속에 의한 고유진동수의 오차는 비틀림진동수나 전단진동수보다 굽힘진동수에서 링 단면의 두께 대 반지름의 비( $d/R$ )가 감소할 수록 심각하게 증가한다.

(4) 일괄적 감차적분법 및 선별적 감차적분법을 적용하면 가성구속에 의한 오차를 완화시킬 수 있다. 그러나 일괄적 감차적분법을 적용한 경우에는 강체운동형이 실제의 것과는 다른 이상강체운동(異常剛體運動)이 발생한 반면, 선별적 감차적분법의 경우에는 실제의 강체운동형과 잘 일치하였다.

따라서 본 논문에서 제안하는 변수를 기본변수로 하는 범함수를 채용하여 선별적 감차적분법을 적용하면 면외변형 링의 유한요소해석에서 가성모드의 도입을 배제시키고 가성구속에 의한 오차를 완화시키면서 동시에 정확한 강체운동형을 얻을 수 있다.

#### 참고문헌

- (1) Bushnell, D., 1970, "Analysis of Buckling and Vibration of Ring-Stiffened Segmented Shells of Revolution," International Journal of Solids Structures, Vol. 6, No. 2, pp. 157~181
- (2) Peterson, R. E., 1930, "An Experimental Investigation of Ring Vibration in Connection with the Study of Gear Noise," Trans. A.S.M.E., Journal of Applied Mechanics, Transactions, American Society of Mechanical Engineering, Vol. 52, No. 1
- (3) Al-Najafi, A.M. and Warburton, G.B., 1970, "Free Vibration of Ring-Stiffened Cylindrical Shells," Journal of Sound and Vibration, Vol. 13, No. 1, pp. 9~23
- (4) Love, A.E.H., 1943, Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Cambridge University Press
- (5) Rao, S.S., 1971, "Effects of Transverse Shear

- and Rotatory Inertia on the Coupled Twist-Bending Vibration of Circular Rings," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 16, No. 4, pp. 551~566
- (6) Volterra, E., 1967, "Vibration of Circular Elastic Rings," *Israel Journal of Technology*, Vol. 5, No. 4, pp. 225~233
- (7) Lincoln, J.W. and Volterra, E., 1967, "Experimental and Theoretical Determination of Frequencies of Elastic Toroids," *Experimental Mechanics*, Vol. 24, No. 5, pp. 211~217
- (8) James Kirkhope, 1984, "Out-of-Plane Vibration of Thick Circular Ring," *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 102, pp. 239~247
- (9) Kuhl, W., 1942, "Messungen zu den Theorien der Eigenschwingungen von Kreisringen Velliebiger Wandstake," *Akusite Zeitschrift*, Vol. 7, No. 7, pp. 125~152
- (10) 김용우, 1991, "유한요소의 가성구속과 가성 모드에 의한 오차유발에 관한 통합이론," 연세대학교대학원, 박사학위논문
- (11) 김용우, 문원주, 권해성, 민옥기, 1992, "면의 변형이 가능한 평면 곡선보의 선형 유한요소," 대한기계학회논문집, 제16권, 제3호, pp. 419~429
- (12) Prathap, G. and Bhashyam, G.R., 1982, "Reduced Integration and Shear Flexible Beam Element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, pp. 195~210
- (13) Stolarski, H. and Belytschko, T., 1982, "Membrane Locking and Reduced Integration for Curved Elements," *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 49, pp. 172~176
- (14) 민옥기, 김용우, 유동규, 1990, "곡선보의 강성 과잉 현상과 고유치에 관한 연구," 대한기계학회 논문집, 제14권, 제2호, pp. 310~323
- (15) 김용우, 박춘수, 민옥기, 1991, "Mindlin 판의 강성과잉현상과 고유치에 관한 연구," 대한기계학회논문집, 제15권, 제2호, pp. 445~454
- (16) Min Oak-key and Kim Yong-Woo, 1991, "The Error Due to Spurious Coefficients in Isoparametric Quadratic Finite Element Analysis of Curved Beam Subjected to Out-of-Plane Loads," *Yonsei Nonchong, Yonsei University*, Vol. 17, pp. 231~253
- (17) Min Oak-key and Kim Yong-woo, 1990, "A Consideration of Energy Modes in Isoparametric Beam Elements," *Yonsei Nonchong*, Vol. 26, July, pp. 315~331
- (18) Bathe, K.J., 1982, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey
- (19) Garbow, B.S., et al., 1977, *Matrix Eigensystem Routines-EISPACK Guide Extension*, Springer-Verlag, New York
- (20) Timoshenko, S., Young D.H. and Weaver, W. Jr., 1974, *Vibration Problems in Engineering*, John Wiley & Sons, Fourth Edition