

〈論 文〉

두께가 변화하는 부재 내의 혼합모드(모드 I / II) 균열의 응력확대계수

조명래* · 양원호** · 최용식***

(1992년 8월 10일 접수)

Stress Intensity Factors of Combined Mode(Mode I/II) Crack in a Variable Thickness Plate

Myoung-Rae Cho, Won-Ho Yang and Yong-Shick Choy

Key Words: Variable Thickness Plate(변후부재), Combined Mode(혼합모드), Crack Slant Angle(균열경사각), Thickness Ratio(두께비), Width Ratio(판폭비)

Abstract

Variable thickness plates are commonly used as structural members in the majority of industrial sectors. Previous fracture mechanics researches on variable thickness plates were limited to mode I loading cases. In practice, however, cracks are usually located inclined to the loading direction. In this respect, combined mode(mode I / II) stress intensity factors K_I and K_{II} at the crack tip for a variable thickness plate were obtained by 3-dimensional finite element analysis. Variable thickness plates containing a slant edge crack were chosen. The parameters used in this study were dimensionless crack length λ , slant angle α , thickness ratio β and width ratio ω . Stress intensity factors were calculated by crack opening displacement(COD) and crack sliding displacement(CSD) method proposed by Ingraffea and Manu.

기 호 설 명

<p>a : 균열길이 (mm)</p> <p>E : 재료의 종탄성계수 (Kg_f/mm^2)</p> <p>F_I, F_{II} : 응력확대계수의 수정계수</p> <p>K_I, K_{II} : 응력확대계수 (stress intensity factor)</p> <p>L_1 : 균열선단 요소(element)의 균열면 상의 길이</p> <p>t, t_1, t_2 : 모델 두께 (mm)</p> <p>W, W_1, W_2 : 모델 폭 (mm)</p> <p>α : 균열경사각 (deg.)</p> <p>β : 두께비 (t_2/t_1)</p>	<p>λ : 무차원 균열길이 (a/W_1)</p> <p>ω : 판폭비 (W_2/W_1)</p> <p>ν : 재료의 푸아송비 (Poisson's ratio)</p> <p>η : 균열선단 상에서 응력확대계수값을 얻고 싶은 위치의 국소좌표</p>
--	--

1. 서 론

실제 기계 및 구조물에는 두께가 일정하지 않고 변화하는 부재(이하 변후부재라 한다)가 현실적으로 폭넓게 사용되고 있다. 또한, 파괴역학에 대한 연구가 활발해지면서 파괴가 발생한 현상에 대한 분석뿐만 아니라, 파괴를 근원적으로 방지하기 위

*정회원, 인덕전문대학 기계설계과

**정회원, 성균관대학교 기계설계학과

***정회원, 성균관대학교 기계공학과

한 대책에 대한 관심이 증대되면서 변후부재에 대한 관심도 증대되고 있다.⁽¹⁻⁶⁾ 특히, 두께가 얇은 부재 내에 존재하는 균열이 두께가 두꺼운 부재 방향으로 성장해 가는 thin-to-thick형(S-L형)의 경우는 균열성장을 지연 또는 저지시킬 수 있는 보강재의 설계측면에서, 그리고, 두께가 두꺼운 부재 내에 존재하는 균열이 두께가 얇은 부재 방향으로 성장해가는 thick-to-thin형(L-S형)의 경우는 급속한 균열성장으로 인하여 불안정파괴가 예상되어, 이를 방지하기 위한 안전설계지침의 수립이 요구된다는 측면에서 주목의 대상이 되어 왔다. 그러나 파괴역학적 해석의 대부분은 균열이 존재하는 부재의 주 모델을 해석의 편의상 두께가 균일한 부재(이하 균일재라 한다.)라 보고 주로 2차원적으로 해석을 해왔다. 따라서, 변후부재 및 이와 관련된 분야에 대한 연구는 아직 초보적인 단계라 할 수 있다.

변후부재와 관련한 파괴역학적 연구중 먼저 응력확대계수를 해석한 연구로는 다음을 들 수 있다. (1) Isida⁽¹⁾는 두께와 탄성계수가 서로 다른 동일 폭 이재결합 판재가 연속적으로 무한히 결합되고, 그 한쪽 판재에 규칙적인 관통균열이 존재하는 모델에 대하여 Laurent 급수형의 응력함수를 써서 수학적인 2차원 이론해석을 수행하였다. (2) Ratwani⁽²⁾ 등은 랜드부를 갖는 표면에 균열이 존재하는 경우에 대하여 적분방정식을 써서 응력확대계수를 해석하였으며, (3) Tokuda⁽³⁾ 등은 모서리 균열을 갖는 변후부재에 대하여 2차원 유한요소법으로 응력확대계수를 해석하였다.

그리고 설정된 모델에 대하여 응력확대계수의 수정계수(S. I. F. correction factor)를 해석하고 이를 이용하여 실제 시험편에 적용한 연구는 다음을 들 수 있다. (1) Yang^(4,5)이 유한폭 변후판재 내에 존재하는 모두 I 균열을 갖는 CCT형 모델에 대하여 2차원 이론해석 및 유한요소법으로 응력확대계수를 구하고, 이 해석 결과를 실제의 변후 시험편에 대한 피로시험결과에 적용하여 피로균열 성장거동을 해석하였다. (2) 조명래⁽⁶⁾는 필렛을 갖는 변후부재 내에 존재하는 모드 I 균열에 대하여 3차원 유한요소법으로 응력확대계수를 수치해석하고 그 결과를 실제 필렛을 갖는 변후시험편에 대한 피로 시험결과에 적용하여 피로균열 성장거동을 해석하였다. 이와 같은 위의 모든 연구의 정성적인 결과들(일례로서 참고문헌,⁽⁶⁾ Fig. 1)은 다음과 같이 요약할 수 있다. (1) 변후부재 내의 응력확대계수는

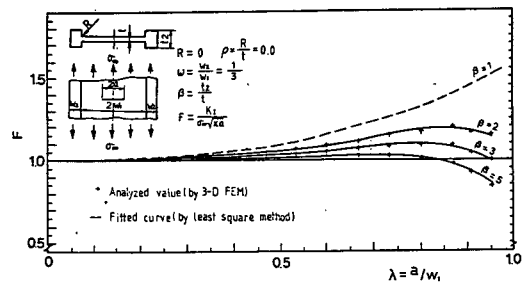


Fig. 1 S. I. F. correction factor values analyzed by 3-D F.E.M. and fitted curve

무차원 균열길이, 두께비 그리고 판폭비의 함수이다. (2) 두께가 얇은 부재 내에 존재하는 균열이 두께가 두꺼운 부재쪽으로 진행해가는 S-L형의 경우, 균열이 변후경계로 접근해감에 따라 응력확대계수는 감소하며 이에 따라 균열성장속도도 함께 감소한다. (3) 두께가 두꺼운 부재 내에 존재하는 균열이 두께가 얇은 부재쪽을 향하여 진행해 가는 L-S형의 경우, 균열이 변후경계로 접근해감에 따라 응력확대계수는 급격히 증가하며 이에 따라 균열성장속도도 함께 급증한다.

또한, 실제 기계·구조물에 존재하는 균열은 존재형태의 다양함, 작용하중의 비대칭 또는 재료의 이방성등으로 인해, 엄밀한 의미에서 순수한 모두 I (mode I) 균열의 상태로 존재하는 경우는 극히 드물고, 오히려 어느정도라도 하중방향과 균열면이 경사되게 위치한 혼합모드(combined mode) 균열의 상태로 존재하는 것이 보다 일반적이다. 그리고, 단일 모드 성분으로 시작된 균열이 진행과정에서 혼합모드 균열로 변화하는 사례도 흔히 발견되고 있어,⁽⁷⁾ 이에 대한 체계적인 연구가 현실적인 공학문제로서 지니는 의미도 간과할 수 없다. 그러나, 지금까지 보고된 연구 결과들은 정작 좀 더 실제문제에 근접한 모델인 변후부재 내에 존재하는 혼합모드 균열에 대한 고찰이 없어 앞서의 연구결과들을 현실적인 문제로 일반화시키기에는 적지 않은 문제점이 남아 있다. 따라서 본 연구에서는 혼합모드 I/II 균열을 갖는 모서리 균열(edge crack)형 변후모델을 해석대상으로 선정하고, 3차원 유한요소법으로 무차원 균열길이 $\lambda(a \cdot \sin \alpha / W_1)$, 균열경사각 α , 두께비 β , 판폭비 $\omega(W_2/W_1)$ 를 변화시켜가면서 이에 따른 기하학적 형상변화에 의한 응력확대계수의 거동을 해석하였다.

2. 유한요소해석

2.2 해석 모델

유한요소해석 모델로는 Fig. 2과 같이 한쪽에 경사진 균열(slant edge crack)을 갖는 변후판재(S-L형)에 무한판 균일인장응력 $\sigma_\infty=100$ Mpa이 작용하는 것으로 선정하였다. 요소망(mesh)구성시에 균열선단 부근에서는 균열선단의 특이성을 만족시킬 수 있도록 15-node quarter point singular element⁽⁸⁾를 배치하고 나머지 부분은 20-node quadratic isoparametric element를 사용하였으며, 이때 사용된 요소수는 150개, 절점수는 999개이다. 이 모델에 대하여 균열경사각 α 를 45°, 60°, 75°로, 두께비 $\beta(t_2/t)$ 는 1.0, 2.0, 3.0, 5.0으로, 판폭비 $\omega(W_1/W_2)$ 는 1/3, 1.0, 2.0으로 설정하고 무차원 균열길이 λ 를 변화시켜가면서 응력확대계수를 해석하였다.

2.2 응력확대계수계산

유한요소해석 프로그램은 본 연구자들이 퍼스널

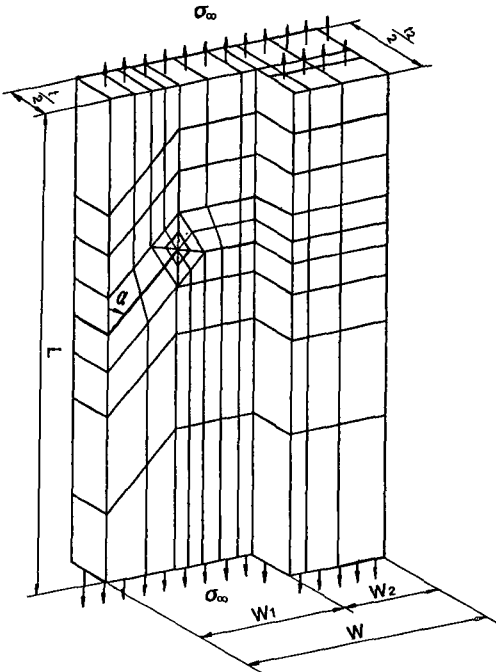


Fig. 2 Three dimensional mesh design for FEM (slant edge crack)

컴퓨터와 엔지니어링 워크스테이션등에서 수행이 가능하도록 개발한 3차원 유한요소해석프로그램을 사용하였다. 응력확대계수 K_I, K_{II} 는 Ingraftea와 Manu에 의해 제안된 균열개구변위 (crack opening displacement; COD) 및 균열미끄럼변위 (crack sliding displacement; CSD) 방법⁽¹⁰⁾을 이용하여 계산하였다. 여타의 K계산방법들은 혼합모드 균열의 응력확대계수를 각 모드별로 분리시켜 계산하기가 어려운 문제점을 가지고 있는 반면, 이 방법은 비교적 간편하면서도 정확하게 응력확대계수들을 각 모드별로 분리 계산할 수 있는 장점을 지니고 있다.

Fig. 3은 균열면을 이루는 15-node quarter point singular element를 나타낸 것으로, 균열면 상에 있는 각 절점(A~F, A'~F')의 x방향 변위(CSD)와 y방향 변위(COD)를 각각 $u_A \sim u_F, u_{A'} \sim u_{F'}$ 및 $V_A \sim V_F, V_{A'} \sim V_{F'}$ 로 표시할 때 응력확대계수 K_I 및 K_{II} 는 식(1)로 표시된다.

$$K_I = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{\pi}{2L_1}} \{ 2v_B - v_C + 2v_E - v_F + v_D - 2v_B + v_C - 2v_E' + v_{F'} - v_{D'} \} + \frac{1}{2} \eta \{ -4v_B + v_C + 4v_E - v_F + 4v_B' - v_C' - 4v_E' + v_{F'} \} + \frac{1}{2} \eta^2 (v_F + v_C - 2v_D - v_{F'} - v_{C'} + 2v_{D'}) \}$$

$$K_{II} = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{\pi}{2L_1}} \{ 2u_B - u_C + 2u_E - u_F + u_D - 2u_B + u_C - 2u_E' \}$$

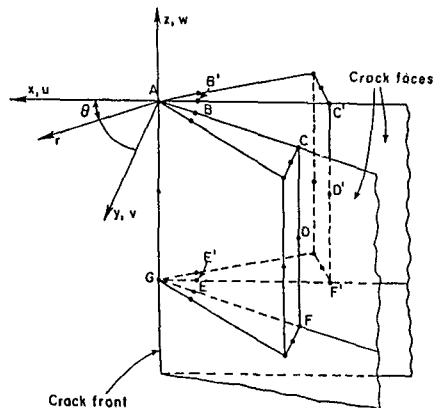


Fig. 3 Arrangement of quarter-point wedge elements along segment of crack front

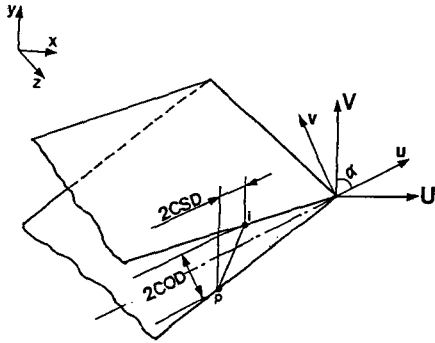


Fig. 4 Separation of mode I and mode II displacements

$$\begin{aligned}
 &+ u_{F'} - u_{D'} \} + \frac{1}{2} \eta \{ -4u_B + u_C + 4u_E \\
 &- u_F + 4u_B' - u_C' - 4u_E' + u_{F'} \} \\
 &+ \frac{1}{2} \eta^2 \{ u_F + u_C - 2u_D - u_{F'} - u_C' + 2u_{D'} \}
 \end{aligned} \tag{1}$$

여기서, E 는 재료의 종탄성계수, ν 는 재료의 푸아송비(Poisson's ratio), L_1 은 균열선단 요소(element)의 균열면 상의 길이, η 는 균열선단 상에서 응력확대계수값을 얻고 싶은 위치의 국소좌표이다.

Fig. 4에서 보는 바와 같이 균열 상하면의 동일 위치에 있던 절점(node) i 와 p 의 x, y 방향 변위 성분 U 와 V 를 먼저 균열방향(crack line)과 평행인 성분 u 와 수직인 성분 v 로 변환하면 u, v 는

$$\begin{aligned}
 u &= U \sin \alpha + V \cos \alpha \\
 v &= -U \cos \alpha + V \sin \alpha
 \end{aligned} \tag{2}$$

로 되며, COD와 CSD는 각각 $(v_i - v_p)/2$ 와 $(u_i - u_p)/2$ 가 된다.⁽¹¹⁾

또한, 응력확대계수 K_I, K_{II} 의 수정계수 F_I, F_{II} 는 무차원균열길이 λ , 균열경사각 α , 두께비 β 및 판폭비 ω 의 함수로서 식(3)과 같이 표현하였다.

$$\begin{aligned}
 K_{II} &= \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \cdot F_{II}(\alpha, \beta, \lambda, \omega) \\
 K_I &= \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \cdot F_I(\alpha, \beta, \lambda, \omega)
 \end{aligned} \tag{3}$$

3. 해석결과 및 고찰

지금까지의 변후부재와 관련한 연구(주로 모드 I 균열)결과들(일례로서 Fig. 4)에 의하면, 균열선단이 두께가 변화하는 경계(이하 변후경계라 한다)에

서 비교적 먼 위치에 존재할 때의 응력확대계수거동은 두께 변화가 없는 균일재에서의 거동과 거의 유사하며, 두께비 $\beta > 1$ 인 thin-to-thick형에서는 균열선단이 변후경계에 접근함에 따라 응력확대계수값은 감소하는 것으로 알려져 있다.

마찬가지로, 본 연구의 결과(Figs. 5~13)에서도 혼합모드 균열을 갖는 변후부재에서의 F_I, F_{II} 는 균열선단이 변후경계에서 상당히 멀리 떨어져 있는 경우에는 두께변화부분의 영향을 거의 받지 않아 균일재에서의 경우와 별다른 차이를 나타내지 않고 있다. 그러나, 균열선단이 변후경계에 접근해감에 따라 균열선단의 응력장은 두께가 두꺼운 부분의 영향으로 인해 변화하게 되며, 이에 따라 응력확대계수의 수정계수도 전반적으로 감소하는 것으로 나타난다. 또한 이러한 감소경향은 두께비 β 가 클수록 현저한데 이러한 현상은 일종의 균열성장저지현상이라 볼 수 있겠다.

Fig. 5는 균열경사각 $\alpha = 45^\circ$, 판폭비 $\omega = 1/3$ 으로 두꺼운 부분의 폭이 비교적 좁은 경우의 F 값의 변화를 표시한 것으로서, F_I 과 F_{II} 모두 균열선단이 변후경계에서 멀리 떨어진 곳에 위치한 경우(λ 값이 작은 범위)에는 두께비 β 의 영향을 별로 받지 않는 것으로 나타난다. 그러나, F_{II} 는 균열선단이

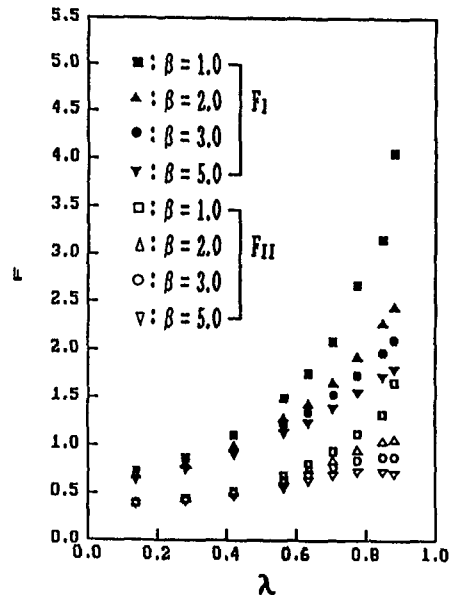


Fig. 5 F value analysed by 3-D FEM($\alpha = 45^\circ$; $\omega = 1/3$)

변후경계에 가까워짐에 따라 증가추세에서 감소추세로 바뀌어 응력확대계수의 감소현상이 비교적 뚜렷이 나타난다. 한편, F_I 은 변후경계근방에도 증가추세를 그대로 지속하는 현상을 보이고 있어, ($\lambda < 0.95$) 혼합모드 균열이 존재하는 판재에 균열진전방향으로 두께가 변화하는 판재가 연결되어 있는 경우, 변후부분이 응력확대계수에 미치는 영향은 모드 I에서 보다 모드 II에서 더 크게 나타남을 의미한다.

Fig. 6 및 Fig. 7은 균열경사각 $\alpha=45^\circ$ 로 Fig. 4와 동일하나 판폭비가 $\omega=1.0$ 및 2.0 으로 두꺼운 부분의 폭이 비교적 넓은 경우이다. 대체적인 경향은 Fig. 5와 유사하나 두꺼운 부분의 영향이 증대되어 F_I , F_{II} 는 Fig. 5에서 보다 전반적으로 작게 나타나며, 두께비 β 의 영향은 상대적으로 줄어들어 두께비 β 의 변화에 따른 응력확대계수의 변화폭이 감소한다.

Figs. 8~10은 균열경사각 $\alpha=60^\circ$ 로 판폭비가 $1/3$, 1.0 및 2.0 인 경우이며 Figs. 5~7에 비해 균열면과 하중작용방향이 이루는 각도가 더 커져 균열형상은 모두 I 균열에 좀 더 가까워진다. 이에 따라, F_I 값은 더 크게 나타나고 F_{II} 값은 더 작게 나타나서 균열성장은 모두 I에 의해 더 많은 지배를 받고 있음을 알 수 있다.

이러한 경우들에서도 균열선단이 변후경계와 많이 떨어진 부분에 위치할 때에는 균일재와 변후부재의 응력확대계수의 차이는 거의 없는 것으로 나타난다. 그런데 균열경사각 $\alpha=45^\circ$, 판폭비 $\omega=$

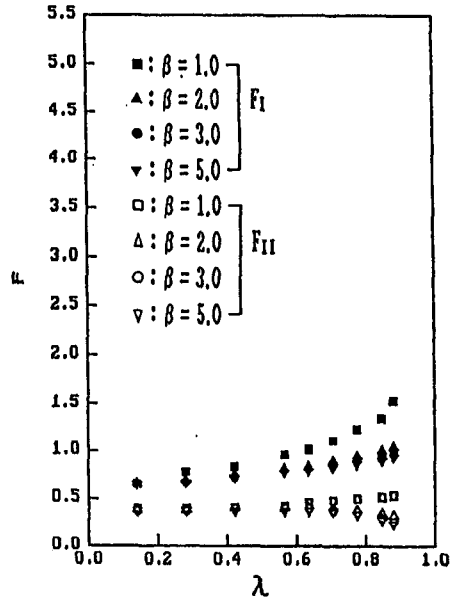


Fig. 7 F value analyzed by 3-D FEM ($\alpha=45^\circ$; $\omega=2.0$)

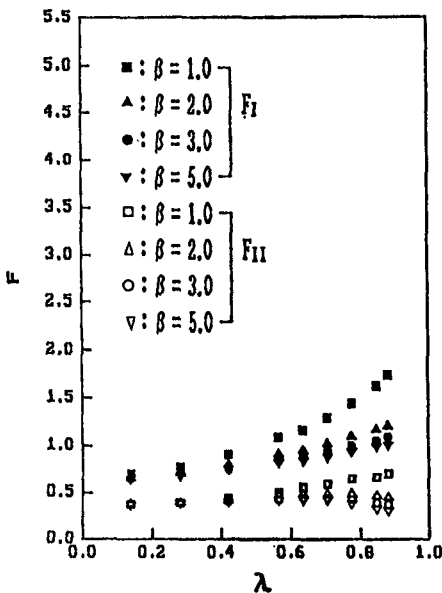


Fig. 6 F values analyzed by 3-D FEM ($\alpha=45^\circ$; $\omega=1.0$)

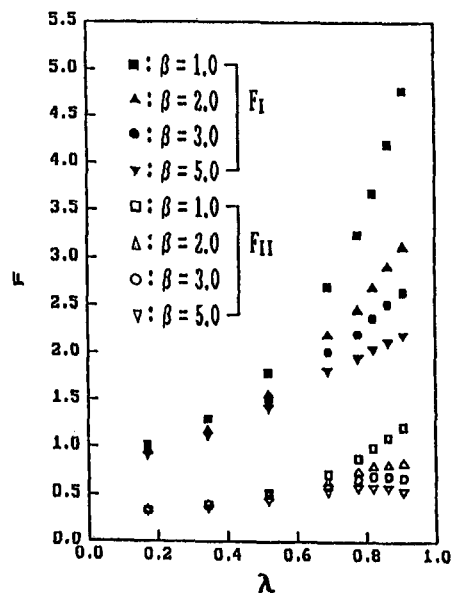


Fig. 8 F values analyzed by 3-D FEM ($\alpha=60^\circ$; $\omega=1/3$)

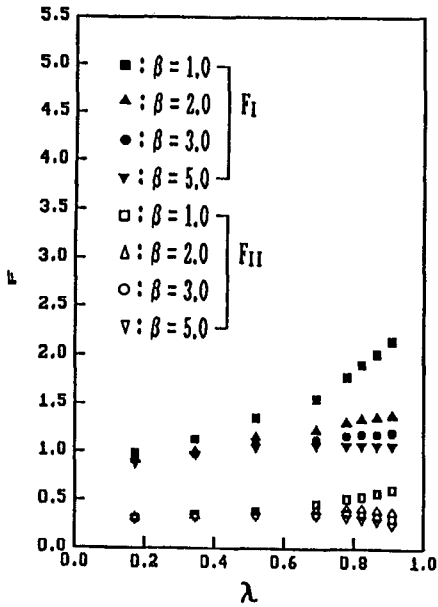


Fig. 9 F values analyzed by 3-D FEM ($\alpha=60^\circ$; $\omega=1.0$)

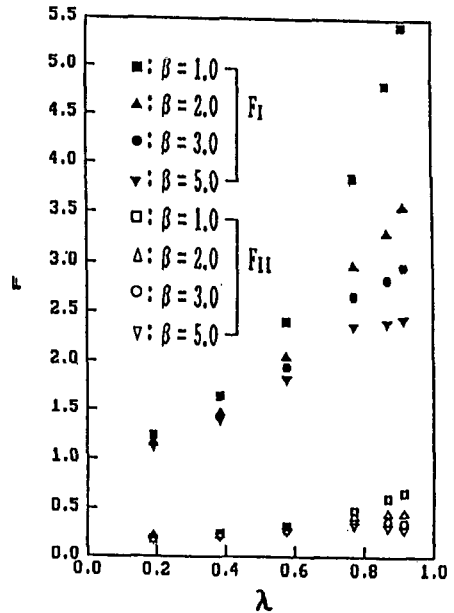


Fig. 11 F values analyzed by 3-D FEM ($\alpha=75^\circ$; $\omega=1/3$)

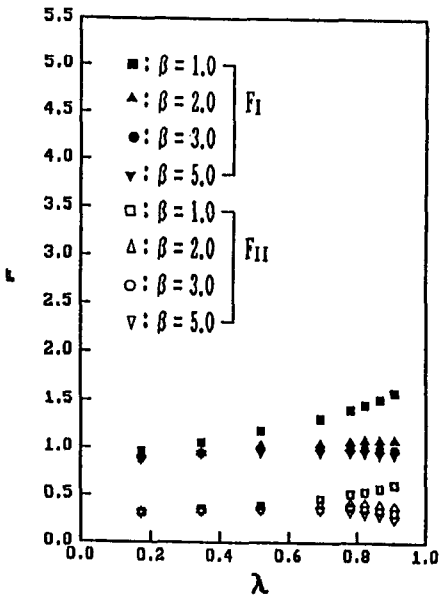


Fig. 10 F values analyzed by 3-D FEM ($\alpha=60^\circ$; $\omega=2.0$)

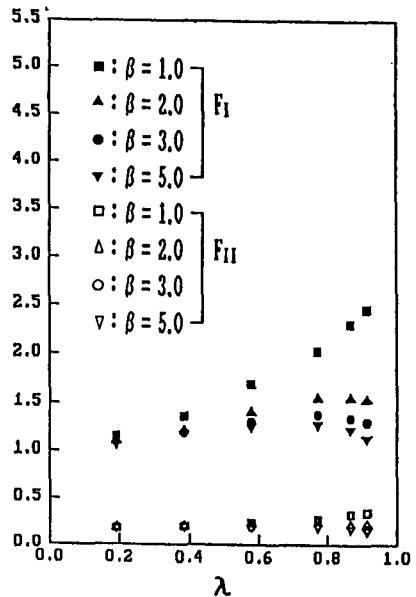


Fig. 12 F values analyzed by 3-D FEM ($\alpha=75^\circ$; $\omega=1.0$)

1.0, 2.0인 경우는 변후경계 가까이에서도 F_I 값이 계속해서 증가하는 경향이 뚜렷했으나, 균열경사각 $\alpha=60^\circ$ 에서는 판폭비 ω 가 1.0, 2.0으로 되면 변후경계근방에서의 F_I 의 증가세가 상당폭 둔화 내지는 감소세로 돌아서고 있다. 또한 F_{II} 는 $\alpha=45^\circ$ 일

때와 비교해서 전반적으로 값의 크기는 감소(즉, 모드 II의 성분이 감소)하고 있으나 변후경계근처에서의 전체적인 응력확대계수 경향은 별다른 차이를 보이지 않고 있다. 즉, 모드 II의 경우는 변후부분이 응력확대계수에 미치는 효과는 균열경사각

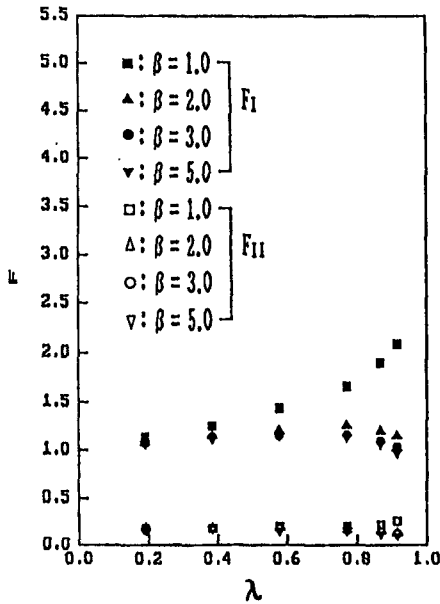


Fig. 13 F values analyzed by 3-D FEM ($\alpha=75^\circ$; $\omega=2.0$)

α 의 변화와는 큰 연관성이 없는 것으로 생각된다. Fig. 9와 Fig. 10 은 Fig. 8에 비해 두꺼운 부분의 폭이 더 넓은 경우인데, 앞의 연구 결과(Fig. 1)와 마찬가지로 두꺼운 부분의 두께가 두꺼울수록, 그리고 두꺼운 부분의 폭이 넓을수록 응력확대계수는 작은 값을 나타낸다.

Figs. 11~13은 균열경사각 $\alpha=75^\circ$ 로 균열경사각과 하중작용방향이 이루는 각도를 더 크게한 경우로 Figs. 5~10에 비해 균열 형상은 모드 I 균열에 더욱 가까워진 경우의 해석 결과들이다. 그 외 모든 조건은 동일하고 다만 균열경사각이 다른 경우(Figs. 5~10, $\alpha=45^\circ$ 및 $\alpha=60^\circ$)와 비교해 볼 때, 전체적으로 F_I 값은 커지고 F_{II} 값은 감소하여 모드 I의 영향이 커지고 모드 II의 영향은 감소하고 있음을 알 수 있다. 이때는 모드 I의 영향이 지배적이어서 앞선 연구자들의 모드 I 균열을 가지는 변후부재에서의 해석결과와 거의 유사한 결과를 보이고 있다. 즉, F_I 은 변후경계로 접근함에 따라 감소하며, 두께비 β 가 클수록, 또한 판폭비 ω 가 클수록 그 감소경향이 훨씬 뚜렷하다. 그러나 F_{II} 는 모드 I에 비하여 차지하는 비중이 경미할 뿐 아니라 균열경사각 α 의 변화에 따른 그 특성의 변화도 그리 크지 않다.

4. 결 론

변후판재(thin-to-thick 형) 내의 경사균열(slant edge crack)에 대하여 3차원 유한요소법으로 응력확대계수를 해석하고 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 혼합모드 I/II 균열에서 응력확대계수의 수정계수 F_I, F_{II} 는 무차원 균열길이 λ , 균열경사각 α , 두께비 β 및 판폭비 ω 의 함수이다.

(2) 혼합모드 I/II 균열에서 균열경사각 α 가 커질수록 (단, $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$) K_I 은 증가하고 K_{II} 는 감소한다.

(3) 변후부재에서의 응력확대계수 K_I, K_{II} 는 같은 균열길이에서 균일재의 경우보다 작아지며, 두께비 β 와 판폭비 ω 가 클수록 그 감소폭이 크게 나타난다. 그리고 이러한 결과는 앞선 연구자들의 변후부재내의 모드 I 균열에 대한 해석결과와 정성적으로 일치한다.

(4) 판폭비 ω 가 비교적 작은 경우, 두께비 β 가 증가함에 따라 F_{II} 는 변후경계 가까이에서 감소하나 F 은 $\lambda < 0.95$ 에서 계속해서 증가추세를 유지한다.

(5) 판폭비 ω 가 비교적 큰 경우, 두께비 β 가 증가함에 따라 변후경계 가까이에서 F_I, F_{II} 가 다같이 감소한다. 그러나 두께비 β 변화가 응력확대계수에 미치는 영향은 판폭비 ω 가 비교적 작은 변위의 경우와 비교하면 미미하다.

(6) 변후부재 내에 존재하는 혼합모드 I/II의 균열의 경우 두께비 β 에는 F_{II} 가 더 민감하고 균열경사각 α 에는 F_I 이 더 민감하다.

참고문헌

- (1) Isida, M., 1970, "On the Determination of Stress Intensity Factors for Some Common Structural Problems," Engng Fracture Mech., Vol. 2, pp. 61~79.
- (2) Ratwani, M. M. and Kan, H. P., 1984, "Analysis and Growth of Cracks in Skins with Variable Thickness," F. M. Fifteenth Sympo., ASTM STP 833, pp. 44~56.
- (3) 徳田直明 外, 1971, "板構造物中のクラック應力擴大係數の有限要素法による解法," 日本造船學會 論文集, Vol. 130, pp. 221~235.

- (4) Yang, W. H., Houssny, H. E. and Bassim, M. N., 1984, "An Experimental K-Analysis on the Fatigue Crack Near the Interface where Plate Thickness Varies Discontinuously," *Engng Fracture Mech.*, Vol. 19, No. 2, pp. 295~503.
- (5) 양원호, 1987, "두께가 불연속적으로 변화하는 유한폭 판재 내의 균열에 대한 파괴역학적 연구," 숭실대학교 박사학위논문
- (6) 조명래, 1990, "Fillet을 갖는 변후부재 내의 Mode I 균열에 대한 피로균열성장특성 연구," 성균관대학교 석사학위논문
- (7) Parker, A. P., 1981, "The Mechanics of Fracture and Fatigue," E. & F. N. Spon Ltd., New York, pp. 49~100.
- (8) Henshell, R. D. and Shaw, K. G., 1975, "Crack Tip Finite Elements are Unnecessary," *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, pp. 495~507.
- (9) Fawkes, A. J., Owen, D. R. J. and Luxmoore, A. R., 1979, "An Assessment of Crack Tip Singularity Models for Use with Isoparametric Elements," *Engng Fracture Mech.*, Vol. 11, pp. 143~159.
- (10) Ingraffea, A. R. and Manu, C., 1980, "Stress Intensity Factor Computation in Three Dimensions with Quarter-Point Elements," *Int. J. for Numerical Methods in Engng*, Vol. 15, pp. 1427~1445.
- (11) Mazumdar, D. P. and Murthy, P. N., 1984, "Determination of Combined Mode Stress Intensity Factors Using Mixed Elements," *Trans. Advances in Fracture Research*, Vol. 2, pp. 905~912.