

(論 文)

저레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형 개발에 관한 연구

김명호* · 최영돈** · 신종근***

(1992년 12월 15일 접수)

A Study on the Development of Low Reynolds Number Second Moment Turbulence Model

M. H. Kim, Y. D. Choi and J. K. Shin

Key Words : Second Moment Turbulence Model(2차 모멘트 난류모형), Turbulence Model Coefficients(난류모형계수), Anisotropy of Reynolds Stresses(레이놀즈응력의 비등방성), Turbulence Reynolds Number(난류레이놀즈수)

Abstract

Low Reynolds number second moment turbulence model which be applicable to the fine gird near the wall region was developed. In this model, turbulence model coefficients in the pressure strain model of the Reynolds stress equation was expressed as functions of turbulence Reynolds number ($R_t \equiv k^2/(\nu\epsilon)$). In the derivation procedure of the present low Reynolds number algebraic stress model, Laufer's near wall experimental data on Reynolds stresses were curve fitted as functions of R_t and the resulting simultaneous equations of the model coefficients were solved by using the boundary conditions at wall and high Reynolds number limiting conditions.

Predicted Reynolds stresses and dissipation rate of turbulent kinetic energy etc. in the 2 dimensional parallel plane channel flow and pipe flow were compared with the predictions obtained by employing the Launder-Shima model, standard algebraic stress model and several experimental data. Results show that all the Reynolds stresses and dissipation rate of turbulent kinetic energy predicted by the present low Reynolds number algebraic stress model agree better with the experimental data than those predicted by other algebraic stress models.

기 호 설 명

A : 레이놀즈 응력의 Invariant ($1 - \frac{9}{8}(A_2 - A_3)$)

A_2 : 레이놀즈 응력의 2차 Invariant ($A_{ij}A_{ji}$)

A_3 : 레이놀즈 응력의 3차 Invariant ($A_{ij}A_{jk}A_{ki}$)

A_{ij}, a_{ij} : 레이놀즈 응력의 비등방성

$C_1, C_2, C_1', C_2', \bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_1', \bar{C}_2', C_1^*, C_2^*$: 모형상수

E_{ij} : 비등방성 난류운동에너지 소멸율 텐서

f_s : 벽함수

g_1, g_2, g_3, g_{12} : 무차원 레이놀즈 응력

*현대자동차 마북리연구소

**정회원, 고려대학교 기계공학과

***정회원, 고려대학교 기계공학과 대학원

K, k	: 난류운동에너지
L	: 난류길이 척도
n	: 벽에 수직인 단위벡터
P	: 국소평균압력, 난류운동에너지 생성률
p	: 요동압력
P_k	: 난류운동에너지 생성률
P_{ij}	: 레이놀즈 응력 생성률 텐서
Re_c	: 중심속도로 계산한 레이놀즈수 ($= V_c D/\nu$)
Re_t	: 난류 레이놀즈수 ($= k^2/(\nu\epsilon)$)
U	: x 방향 국부평균속도
U_B	: x 방향 단면평균속도
u	: x 방향 요동속도
U_τ	: 마찰속도 ($= \sqrt{\tau_w/\rho}$)
$\overline{u_i u_j}$: 레이놀즈응력
V	: y 방향 국부평균속도
v	: y 방향 요동속도
W	: z 방향 국부평균속도
w	: z 방향 요동속도
x, X	: 측벽에 수직인 방향좌표
x_i	: 직교좌표
y^+, Y^+	: 벽면으로부터의 무차원거리 ($= yU_\tau/\nu$)
y, Y	: 내벽에 수직인 방향좌표
α	: 난류운동에너지 생성률과 소멸율의 비 ($= P/\epsilon$)
β	: 모형상수
β_∞	: 고레이놀즈수 구역에서의 β 값
δ_{ij}	: Kronecker delta
ϵ	: 난류운동에너지 소멸율
ϵ_{ij}	: 레이놀즈 응력의 소멸율 텐서
ϵ_{ijw}	: 벽면상의 레이놀즈응력의 소멸율 텐서
ϵ_w	: 벽면에서의 ϵ 값
κ	: von Karman의 상수
μ	: 점성계수
ν	: 동점성계수
ρ	: 유체의 밀도
τ_w	: 벽면의 전단응력
Φ	: 일반중속변수의 요동치
Φ_{ij}	: 압력변형률 텐서
Φ_{ij1}	: Φ_{ij} 항 중 난류상호작용 항
Φ_{ij2}	: Φ_{ij} 항 중 평균변형률 항
Φ_{ij3}	: Φ_{ij} 항 중 체적력 항
Φ_{ij1}'	: Φ_{ij1} 의 벽면수정 항
Φ_{ij2}'	: Φ_{ij2} 의 벽면수정 항
Φ_{ijw}	: Φ_{ij1}' 과 Φ_{ij2}'

1. 서 론

열유체기계내의 유동은 대부분 복잡한 3차원 난류유동이다. 전산유체역학으로 이러한 복잡한 3차원 난류유동을 해석하여 기계의 형상과 운전조건을 최적설계하기 위해서 선결되어야 할 문제점은 수치해의 정확성 증진이다. 수치해의 정확성에 영향을 주는 인자들로써는 해석알고리즘의 적합성, 대류항이산화법의 적합성과 난류모형의 적합성등을 들 수 있으나, 그중에서 가장 큰 영향을 주는 것은 난류모형의 적합성이다.

그동안 열유체기계의 전산해석 설계를 위한 난류모형으로 k, ϵ 모형이 가장 많이 사용되어 왔으나 3차원 난류유동의 해석에 k, ϵ 모형을 적용할 경우 정확한 속도분포와 난류특성 분포를 예측할 수 없어서^(1,2) 2차 모멘트 난류모형을 적용해야 보다 정확한 속도분포와 난류특성을 얻을 수 있다고 밝혀지고 있다.⁽²⁻⁵⁾

2차 모멘트 난류모형을 복잡한 난류유동 해석에 적용하는 경우에 가장 문제가 되고 있는 것은 벽면 처리 방법이다. 선회류나 2차유동이 발생하는 열유체기계 내의 유동은 많은 경우 극대속도가 벽면에 매우 인접한 부분에 일어나며 또 유동박리가 일어나기 때문에 벽함수를 적용하기 곤란한 경우가 많다. 이럴 경우 벽면 인접부의 유동특성을 정확히 해석하기 위해서는 벽면인접부를 미세격자로 나누어 해석하는 미세격자 벽면처리법을 사용해야 한다. 저레이놀즈수 k, ϵ 모형에 대한 연구는 Jones와 Launder,⁽⁶⁾ Launder와 Sharma,⁽⁷⁾ Lam과 Bremhost,⁽⁸⁾ Myong⁽⁹⁾ 등에 의해서 개발되어 비교적 단순한 2차원 유동해석에서는 그 정확성이 큰 것으로 밝혀지고 있다. 그러나 2차 모멘트 난류모형을 처음으로 제안한 것은 Hanjalic과 Launder⁽¹⁰⁾이었다. 그들은 2차 모멘트 난류모형에서 레이놀즈응력의 소멸율이 벽면에 접근함에 따라 비등방성이 되는 것에 착안하여 이에 대한 모형을 제안하여 해석에 적용하였다. 그후 저레이놀즈수 2차모멘트 난류모형에 대한 연구는 별로 진척이 없다가 1980년대 말기에 Launder와 Shima,⁽¹¹⁾ Shima⁽¹²⁾에 의하여 재개되었다. 그들 연구의 요점은 벽면인접부에서 난류모형상수들을 비등방성 Invariant의 함수로 나타낸 데 있다.

그러나 Launder-Shima의 저레이놀즈수 난류모형은 차원해석과 난류유동특성에 대한 정성적 개념에 바탕하여 유도된 모형이며 벽면인접부에서 등방성 레이놀즈응력소멸을 모형을 사용하고 있기 때문에 아직 개선의 여지가 많다. 따라서 본 연구에서는 좀더 정량적인 이론에 바탕하여 저레이놀즈수 2차모멘트 난류모형을 유도하려 한다.

2. Launder-Shima의 저레이놀즈수 2차모멘트 난류모형

2차모멘트 난류모형에서 난류모형의 정확성에 가장 큰 영향을 주는 것은 압력변형률항(Φ_{ij})과 레이놀즈응력의 소멸률항의 모형이다. Launder, Reece와 Rodi⁽¹³⁾에 의하면 압력변형률항은 난류항(등방성 회복항) Φ_{ij1} 과 평균변형률항 Φ_{ij2} 으로 나누어진다고 하였다.

Lumley⁽¹⁴⁾는 난류모형이 갖추어야 할 필요조건인 실현가능성(Realizability),⁽¹⁵⁾ 유일성(uniqueness),⁽¹⁶⁾ 급격변형 한계성(rapid distortion limit)⁽¹⁷⁾을 만족시키기 위해서는 Φ_{ij1} 은

$$\Phi_{ij1} = -C_1 \epsilon [A_{ij} + C_1^* (A_{ik} A_{kj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} A_2)] \quad (1)$$

Rotta항

의 형태로 표시되어야 한다고 하였고 C_1 은 다음과 같이 레이놀즈응력 비등방성 Invariant $A (\equiv 1 - 9/8(A_2 - A_3))$, $A_2 (\equiv A_{ij} A_{ij})$, $A_3 (\equiv A_{ij} A_{jk} A_{ki})$ 와 $R_t (\equiv k^2/\nu \epsilon)$ 의 함수로 나타내져야 한다고 하였다.

$$C_1 = A^n f(A_2, A_3, R_t) \quad (2)$$

윗 식들에서 A_{ij} 는 레이놀즈응력의 비등방성

$$A_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \quad (3)$$

로 표시된다.

그러나 과거 대부분의 연구에서는 식(1)을 그대로 사용하지 않고 Rotta항만을 사용하였다.^{(13),(2)}

한편 Shih와 Lumley⁽¹⁸⁾, Shih, Lumley와 Chen⁽¹⁹⁾은 평균변형률항 Φ_{ij2} 가 난류모형이 갖추어야 할 조건을 갖추려면

$$\Phi_{ij2} = \underbrace{-C_2 (P_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} P_{kk}) + C_3 \epsilon A_{ij} (P_{kk}/\epsilon)}_{\text{IP모형}} - C_4 \left\{ \frac{\overline{u_k u_j} \overline{u_l u_l}}{k} \left[\frac{\partial U_k}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_k} \right] - \frac{\overline{u_l u_k}}{k} \right.$$

$$\left. \left[\overline{u_l u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_l} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_l}{\partial x_l} \right] \right\} \quad (4)$$

의 형태로 나타내져야 한다고 하였다. 그러나 식(4)는 대단히 복잡하기 때문에 Launder, Reece와 Rodi,⁽¹³⁾ Gibson과 Launder,⁽²⁰⁾ Choi, Iacovides와 Launder⁽³⁾는 그들의 연구에서 식(4)의 첫번째 항만을 고려하는 IP모형을 사용함으로써 비교적 좋은 결과를 얻을 수 있었다.

한편, Gibson과 Launder⁽²⁰⁾는 2차원 성층유동의 해석에 대수응력모형(algebraic stress model)을 적용할 때 벽면이 압력변형률에 미치는 영향을 고려하기 위해서

$$\Phi_{ijw} = \left\{ C_1' \frac{\epsilon}{k} \left(\overline{u_k u_m} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_l} n_k n_j - \frac{3}{2} \overline{u_k u_j} n_k n_i \right) + C_2' (\Phi_{km2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \Phi_{ik2} n_k n_j - \frac{3}{2} \Phi_{kj2} n_k n_i) \right\} f(x_n) \quad (5)$$

항을 압력변형률항에 첨가하였다. 여기서 n 은 벽면에 수직인 단위벡터이고 x_n 은 벽면으로부터의 수직거리이며 $f(x_n)$ 은 벽의 영향을 나타내는 벽함수이다.

그러나 위에 설명한 난류모형들은 벽함수를 사용하거나 벽면인접부들의 미세격자를 1차모멘트 난류모형으로 풀고, 거친격자부만을 2차모멘트 난류모형으로 푸는 2층모형(2 layer model)을 사용할 경우에만 가능하고 미세격자부까지 2차모멘트 모형으로 풀 경우에는 수정이 요구된다. 현재 이 표준모형들의 틀을 그대로 유지하면서 벽면에 인접한 미세격자부를 정확히 예측하기 위한 난류모형의 수정으로 가장 바람직한 방법으로 생각되는 것은 C_1, C_2, C_1', C_2' 를 난류레이놀즈수(R_t)나 난류비등방성 Invariant A, A_2, A_3 의 함수로 나타내는 것이다.

그런데 이와 같은 저레이놀즈수 2차모멘트 난류모형들이 일반성을 갖기 위해서 갖추어야 할 최소한의 필요조건은

(1) R_t 가 커질 때 모형형태가 고레이놀즈수 표준모형과 같아져야 한다.

(2) 벽면상에서 경계조건을 만족시켜야 한다.

이다.

이와 같은 필요조건들을 만족시키는 저레이놀즈수 2차모멘트 난류모형을 처음으로 제안한 것은

Launder와 Shima,⁽¹¹⁾ Shima⁽¹²⁾이었다. 그들은 난류유동 특성에 대한 정성적 분석으로부터 난류모형이 갖추어야할 필요조건을 만족시키기 위해서는 C_1 , C_2 는

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 + C_1^* f(R_t) g(A, A_2) \\ C_2 &= C_2^* h(A) \end{aligned} \quad (6)$$

의 형태가 되어야 한다고 하였고, $f(R_t)$ 와 $g(A, A_2)$ 의 경계조건은

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \quad f(\infty) = 1 \\ g(0, A_2) &= g(A, 0) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

이 되어야 한다고 하였으며 식(6), (7)에 대한 구체적인 형태로 다음 식을 제안하였다.

$$C_1 = 1 + C_1^* f_{R1} (A/0.45)^{\xi_1} (A_2/0.55)^{\xi_2} \quad (8)$$

$$C_2 = C_2^* (A/0.45)^{\xi_3} \quad (9)$$

$$f_{R1} = 1 - \exp(-CR_t^{\xi_4}) \quad (10)$$

여기서 $C_1^* = 1.0$, $C_2^* = 0.5$, $C = 0.0067$, $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 1/4$, $\xi_3 = 1/2$, $\xi_4 = 2$ 이었다.

그런데 그들의 난류모형에서 가장 관심을 두어야 할 점은 C_1 은 벽면에서 1로 수렴하고, C_2 는 0으로 수렴한다는 것이다. 그런데 C_1 이 벽면에서 1로 수렴해야 한다는 주장은 Lumley⁽¹⁴⁾가 제안한 필요조건인 식(2)와 약간 상치된다. 왜냐하면 식(2)에 의하면 C_1 은 벽면에서 0으로 수렴해야 하기 때문이다.

Launder와 Shima가 C_1 이 벽면에서 1로 수렴되어야 한다고 주장한 것은 다음과 같은 이론에 근거해 있다. 그들은 벽면인접부 해석에서 레이놀즈응력소멸율에 대한 모형으로 등방성모형

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad (11)$$

을 사용할 경우 벽면인접부에서 레이놀즈응력의 비등방성이 난류구조를 변화시키는데 있어서 ε_{ij} 의 역할은 Φ_{ij1} 의 역할과 구분되지 않기 때문에 ε_{ij} 가 레이놀즈응력의 구조에 미치는 영향은 모두 Φ_{ij1} 에 흡수시켜야 한다고 하였다. 이 경우

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} + \Phi_{ij1} &= \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon + C_1 \varepsilon \left(\frac{u_i u_j}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) \\ &= \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon (1 - C_1) + C_1 \varepsilon \frac{u_i u_j}{k} \end{aligned} \quad (12)$$

가 되는데 벽면상에서 $\left(\frac{\bar{v}^2}{k} \right)_{wall} = 0$ 이고, $(\varepsilon_{22}$

+ Φ_{221})_{wall} = 0이기 때문에 식(12)에서 C_1 이 1로 수렴해야 된다는 것이다.

한편, Launder와 Shima는 C_1' , C_2' 의 모형으로

$$C_1' = -2C_1/3 + C_1^* \quad (13)$$

$$C_2' = [2(C_2 - 1)/3 + C_2^* + |2(C_2 - 1)/3 + C_2|]/2 \quad (14)$$

$$C_2' = \text{AMAX}[0., C_2']$$

$$C_1^* = 1.67, \quad C_2^* = 0.50 \quad (15)$$

를 제안하였다. 식(13), (14), (15)에 의하면 벽면상에서 $C_1' = 1.0$, $C_2' = 0$ 이 된다.

위에서 설명한 Launder-Shima의 저레이놀즈수 2차모멘트 모형은 난류모형이 갖추어야 할 3가지 필요조건과 벽면과 고레이놀즈수 영역에서의 경계조건을 모두 만족시키는 발달된 모형이라고 할 수 있다. 그러나 이 모형을 유도하기 위해 제안한 식(5), (6)은 차원해석과 난류의 정성적 특성에 근거하여 얻어진 식이며, 식(8), (9), (10), (13), (14)에서 여러개의 모형상수들을 전산최적화에 의해서 구했기 때문에 모형의 일반성이 떨어지고 있다. 뿐만 아니라 벽면인접부에서는 ε_{ij} 의 비등방성이 매우 큰데 이 항을 모두 Φ_{ij1} 에 흡수시킨다는 것은 무리가 있다고 생각되며 C_1 의 벽면수렴치가 1이 되어 Lumley의 조건 식(2)와 상치되는 것도 문제점으로 지적될 수 있다.

3. 새로운 저레이놀즈수 2차모멘트 난류 모형의 개발

본 연구에서는 Launder-Shima 모형에서 지적된 사항들을 개선하기 위해서 새로운 저레이놀즈수 2차모멘트 난류모형을 개발하는 연구를 하였다. 본 연구에서 개발하려는 새로운 2차모멘트 모형은 과거의 모형을 근본적으로 변화시킨 것은 아니고 그 모형상수들을 정량적 이론에 바탕하여 모두 난류레이놀즈수(R_t)의 함수로 나타낸 것과 레이놀즈응력의 소멸율항에 비등방성모형을 적용함으로써 모든 레이놀즈응력을 벽면인접부에서 정확히 예측할 수 있게 한 것과 그 모형의 적용 가능 범위를 일반적 인 3차원유동에까지 확장시킨데 있다.

고레이놀즈수 2차모멘트 난류모형에서는 레이놀즈응력소멸율 모형으로 식(11)의 등방성모형을 사용하지만 Hanjalic과 Launder⁽¹⁰⁾는 저레이놀즈수

구역에서 레이놀즈응력의 소멸율에 비등방성을 고려하기 위해서

$$\epsilon_{ij} = (1 - f_s) \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon + f_s \epsilon_{ijw} \quad (16)$$

$$\epsilon_{ijw} = \frac{\epsilon}{k} \overline{u_i u_j} \quad (17)$$

$$f_s = (1 + \frac{1}{10} R_t)^{-1} \quad (18)$$

을 제안하였다. 그러나 Launder와 Reynolds⁽²¹⁾는 식(17)은 벽면에서의 극한특성이 일반난류이론과 일치하지 않는다고 하였으며 Launder⁽⁴⁾는 다음과 같은 벽면 극한특성을 만족시키는 비등방성 레이놀즈 응력소멸율식을 제안하였다.

ϵ_{ijw}

$$\frac{\overline{u^2}}{k} = g_1 = \frac{C_1' f \frac{\overline{v^2}}{k} + 2(1 - C_2) \frac{P}{\epsilon} + \frac{2}{3} (C_2 + C_2' C_2 f) \frac{P}{\epsilon} + \frac{2}{3} (C_1 + f_s - 1) \frac{P}{\epsilon}}{P/\epsilon - 1 + C_1 + E_{11} f_s} \quad (22)$$

$$\frac{\overline{v^2}}{k} = g_2 = \frac{\frac{2}{3} (C_2 - 2C_2 C_2' f) \frac{P}{\epsilon} + \frac{2}{3} (C_1 + f_s - 1) \frac{P}{\epsilon}}{P/\epsilon - 1 + C_1 + 2C_1' f + E_{22} f_s} \quad (23)$$

$$\frac{\overline{w^2}}{k} = g_3 = \frac{\frac{2}{3} (C_2 + C_2 C_2' f) \frac{P}{\epsilon} + C_1' f \frac{\overline{v^2}}{k} + \frac{2}{3} (C_1 + f_s - 1) \frac{P}{\epsilon}}{P/\epsilon - 1 + C_1 + E_{33} f_s} \quad (24)$$

$$\left(-\frac{\overline{uv}}{k} \right)^2 = g_4^2 = \frac{(1 - C_2) \frac{P}{\epsilon} \frac{\overline{v^2}}{k} + \left(-\frac{3}{2} C_1' \left(\frac{\overline{uv}}{k} \right)^2 + \frac{3}{2} C_2 C_2' \frac{P}{\epsilon} \frac{\overline{v^2}}{k} \right) f}{P/\epsilon - 1 + C_1 + E_{12} f_s} \quad (25)$$

이 얻어진다.

레이놀즈응력의 비등방성에 대한 정의 식(3)과 $\frac{P}{\epsilon} = \alpha$ 의 정의를 사용하여 식(22)~식(25)를 정리하면 다음의 식들이 얻어진다.

$$A_{11} C_1 + \frac{4}{3} \alpha C_2 - g_2 f C_1' - \frac{2}{3} \alpha f C_2 C_2' = f_s \left(\frac{2}{3} - g_1 E_{11} \right) + A_{11} (1 - \alpha) + \frac{4}{3} \alpha \quad (26)$$

$$A_{22} C_1 - \frac{2}{3} \alpha C_2 - 2g_2 f C_1' + \frac{4}{3} \alpha f C_2 C_2' = \frac{2}{3} f_s (1 - g_2 E_{22}) + A_{22} (1 - \alpha) + \frac{2}{3} \alpha \quad (27)$$

$$A_{33} C_1 - \frac{2}{3} \alpha C_2 - C_1' g_2 f - \frac{2}{3} \alpha f C_2 C_2' = f_s \left(\frac{2}{3} - g_3 E_{33} \right) + A_{33} (1 - \alpha) + \frac{2}{3} \alpha \quad (28)$$

$$= \frac{\frac{\epsilon}{k} [\overline{u_i u_j} + \overline{u_i u_k n_k n_j} + \overline{u_j u_k n_k n_i} + \delta_{ij} \overline{u_k u_l n_k n_l}]}{[1 + 2.5 \frac{u_p u_q n_p n_q}{k}]} \quad (19)$$

식(19)를 식(16)에 대입하면

$$\epsilon_{ij} = \left[(1 - f_s) \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon + f_s \frac{\epsilon}{k} \overline{E_{ij} u_i u_j} \right] \quad (20)$$

이 된다. 여기서

$$E_{ij} = \frac{[1 + \frac{u_i u_k}{u_i u_j} n_k n_j + \frac{u_j u_k}{u_i u_j} n_k n_i + \delta_{ij} \frac{u_k u_l}{u_i u_j} n_k n_l]}{[1 + 2.5 \frac{u_p u_q n_p n_q}{k}]} \quad (21)$$

이다.

식(20)을 사용하여 2차원 평행평판유동에서 레이놀즈응력에 대한 대수응력식을 유도해보면

$$\begin{aligned} (A_{12})^2 C_1 + g_2 C_2 + \frac{2}{3} (A_{12})^2 f C_1' \\ - \frac{3}{2} g_2 \alpha f C_2 C_2' = (A_{12})^2 (1 - \alpha) \\ - E_{12} f_s + g_2 \alpha \end{aligned} \quad (29)$$

식(26)~식(29)는 C_1, C_2, C_1', C_2' 에 대한 연립 방정식을 이룬다. 그러나 이 식들은 선형적으로 종속되어 있기 때문에 이 식들이 해를 갖으려면 또 다른 조건들이 필요하다. 식(28)을 식(26)에서 빼고, $(A_{11} - A_{33})$ 로 나누면

$$C_1 + \frac{2\alpha}{A_{11} - A_{33}} C_2 = (1 - \alpha) + \frac{f_s (g_3 E_{33} - g_1 E_{11}) + 2\alpha}{A_{11} - A_{33}} \quad (30)$$

이 된다. 식(30)은 Fig. 1에서 나타나 있는 바와

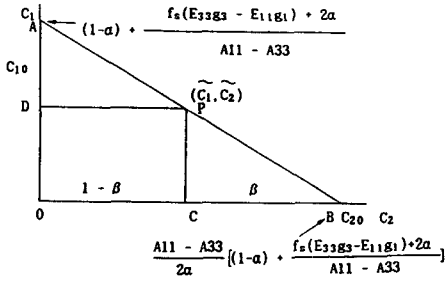


Fig. 1 C₁-C₂ map

같이 C₁, C₂좌표상에 직선으로 나타내진다.

선분 AB선상의 1점 P의 좌표를 (C₁, C₂)라 하고, 이 점이 선분 OB, OC를 다음과 같이 나눈다고 하자.

$$\beta = \frac{CB}{OB} = \frac{CP}{OA} \tag{31}$$

$$1 - \beta = \frac{OC}{OB} \tag{32}$$

직선(30)과 C₁, C₂축과의 교점을 C₁₀, C₂₀라고 하면

$$\tilde{C}_1 = C_{10}\beta = \beta \left[(1-\alpha) + \frac{f_s(E_{33}g_3 - E_{11}g_1) + 2\alpha}{A_{11} - A_{33}} \right] \tag{33}$$

$$\tilde{C}_2 = C_{20}(1-\beta) = (1-\beta) \frac{A_{11} - A_{33}}{2\alpha} \left[(1-\alpha) + \frac{f_s(E_{33}g_3 - E_{11}g_1) + 2\alpha}{A_{11} - A_{33}} \right] \tag{34}$$

이 되고, 식(3)을 이용하여 식(33), (34)를 정리하면

$$\tilde{C}_1 = \beta \left[(1-\alpha) \left(1 - \frac{f_s}{1 + \bar{v}^2/k} + \frac{2\alpha}{g_1 - g_3} \right) \right] \tag{35}$$

$$\tilde{C}_2 = \frac{1-\beta}{\beta} \left(\frac{g_1 - g_3}{2\alpha} \right) \tilde{C}_1 \tag{36}$$

이 얻어진다.

윗 식들에서 β는 임의의 인자이다. 그러나 식(35), (36)이 고레이놀즈수 구역에서의 극한조건인 C₁=1.8, C₂=0.6을 만족시키려면 β∞는 0.4가 되어야 한다.

식(8), (9)로 표시된 Launder-Shima의 저레이놀즈수 난류모형에서는 벽면에 접근할때 C₁, C₂가 각각 1과 0으로 수렴하게 되지만 식(11) 대신 식(20)을 사용했을 때는 식(2)와 식(6)에 의해서 C₁, C₂의 벽면수렴치는 각각 0이 되게 된다.

식(35), (36)에서 벽에 접근함에 따라 α는 0, f_s는 1, g₁-g₃는 2로 수렴하기 때문에 C₁, C₂가 0으로 수렴하기 위해서는 β는 1로 수렴해야 한다. 이러한 조건을 만족시키는 β의 모형으로 본 연구에서 다음의 식을 채택하여 사용하였다.

$$\beta = \beta\infty + (1 - \beta\infty) (\exp(-0.008R_t)) \tag{37}$$

$$\beta\infty = 0.4 \tag{38}$$

윗 식에서 상수 0.008은 R_t가 400일때 β가 0.99 β∞가 되도록 택한 값이다.

Fig. 2는 벽면에 접근함에 따른 C₁, C₂의 변화를 나타내는 도표이다. 벽면에 접근함에 따라 선분 AB 구배는 점점 작아지고 P점은 A점을 향해 움직이며 0점으로 접근하게 된다.

식(22)~식(29)에 나와있는 g₁, g₂, g₃, g₁₂는 Laufer⁽²⁶⁾의 실험결과를 곡선맞춤하여 다음의 관계식을 만들어 사용하였다.

$$g_1 = \frac{\bar{u}^2}{k} = 1.88 - 0.00222R_t \tag{39}$$

$$g_2 = \frac{\bar{v}^2}{k} = \begin{cases} 0.00536 \sqrt{R_t} & (R_t \leq 125) \\ 0.32 - 5.48 \times 10^{-3} R_t + 2.72 \\ \times 10^{-5} R_t & (125 < R_t \leq 150) \\ 0.0178 (R_t - 116.1)^{0.516} & (R_t > 150) \end{cases} \tag{40}$$

$$g_3 = \frac{\bar{w}^2}{k} = 0.0205R_t^{0.565} \tag{41}$$

$$g_{12} = \frac{-\bar{uv}}{k} = 0.021R_t^{0.46} \tag{42}$$

식(35), (36)에서 C₁, C₂가 계산되면 이 식들을 식(27), (29)에 대입하여 C₁', C₂'에 대한 다음 식들이 얻어진다.

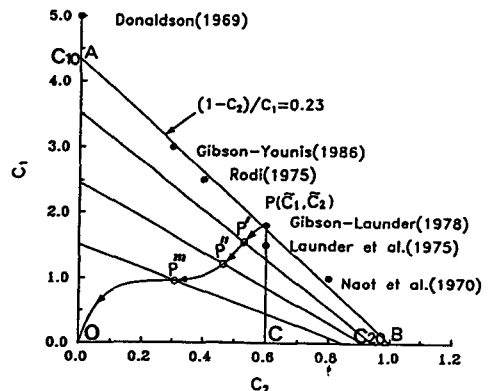


Fig. 2 Variation of C₁ and C₂ approaching wall

$$C_1' = \frac{\frac{3}{2}A_{22}g_2(1-\alpha-E_{22}f_s-C_1) - \frac{1}{3}g_2\alpha(C_2-1) + \frac{4}{3}A_{12}^2(1-\alpha-E_{12}f_s-C_1) + f_s g_2(1-E_{22})}{(3g_2^2+2A_{12}^2)f} \quad (43)$$

$$C_2' =$$

$$\frac{\frac{3}{2}A_{12}^2A_{22}(1-\alpha-E_{22}f_s-C_1) - 2g_2A_{12}^2(1-\alpha-E_{12}f_s-C_1) + \alpha(C_2-1)(A_{12}^2+2g_2^2) + f_s(1-E_{22})A_{12}^2}{(3g_2^2+2A_{12}^2)afC_2} \quad (44)$$

식(43), (44)에서 벽함수 f 는 1로 가정하였다.

식(35), (36), (43), (44)로 주어지는 C_1, C_2, C_1', C_2' 모형을 사용한 저레이놀즈수 대수응력모형을 벽근방의 유동장에 적용하기 위해서는 적절한 난류운동에너지와 난류운동에너지소멸을 방정식이 필요한 데 이를 위해서 김⁽²²⁾이 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형에서 제시한 식들을 사용하였다.

4. 결과 및 고찰

다음은 저레이놀즈수 대수응력모형을 사용하여 시험유동을 해석한 결과에 관하여 고찰하기로 한다. 비교한 대수응력모형은 본 연구에서 개발한 저레이놀즈수 대수응력모형(본 ASM)과 Launder-Shima 대수응력모형(LS ASM), 표준대수응력모형(표준 ASM)에 대해서 행하였으며 2차원 평행평판 유동과 원관유동에서 Re 수를 6,400, 27,600, 50,000, 127,000로 변화시킨 경우에 대해서 비교하였다. 레이놀즈수($Re_c = U_c H / \nu, U_c D / \nu$)는 판로 중심속도와 평판사이의 폭 혹은 원관의 직경을 기준으로 계산한 것이다.

Fig. 3~Fig. 5는 2차모멘트 난류모형계수 C_1, C_2, C_1', C_2' 의 예측결과를 비교한 것이다. 이 그림들에서 발견되는 대단히 흥미로운 점은 본 연구에서 유도한 C_1, C_2, C_1', C_2' 의 관계식과 Launder-Shima가 제안한 C_1, C_2, C_1', C_2' 의 관계식은 전혀 다른 관점에서 출발하여 유도된 것인데 그 변화 경향이 거의 일치한다는 것이다. 특히 C_2 의 변화 형상은 두 모형에서 거의 같음을 알 수 있다. 그러나 C_1 의 변화는 그 변화 경향은 서로 일치하나, 그 크기는 차이가 있다. 본 ASM에서는 C_1 이 벽에 접근함에 따라 0으로 수렴하지만 LS ASM에서는 1로 수렴하는 것이 다르고, 고레이놀즈수 영역에서 본 ASM에서는 C_1 이 약 1.8 정도의 값을 가지나, LS ASM에서는 2.2 정도의 값을 갖는 것이 서로 다르다. 벽면에서의 C_1 의 수렴치가 본 ASM과 LS ASM에서 서로 다른 이유는 앞에서 이미 설명한

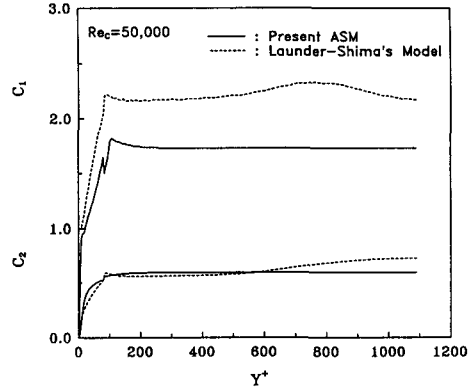


Fig. 3 Turbulent modeling constants in channel flow

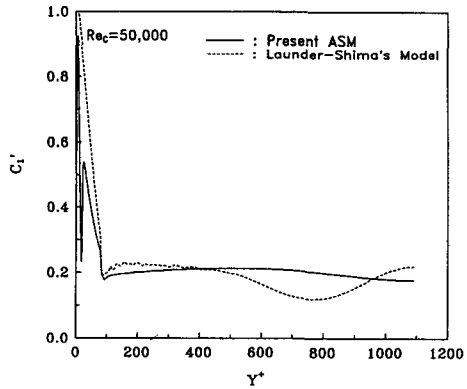


Fig. 4 Turbulent modeling constants in channel flow

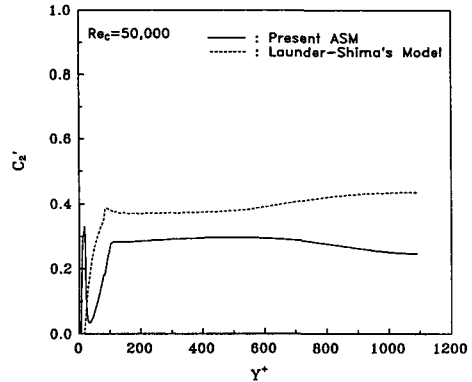


Fig. 5 Turbulent modeling constants in channel flow

바와 같다. C_1' 의 변화 경향은 두 모형에서 모두 공히 벽면에서는 매우 큰 값을 갖다가 벽에서 멀어짐에 따라 급격히 감소하다가 y^+ 가 100이상이 되면 거의 일정한 값을 갖는 것은 두 모형에서 일치한다. 그러나 LS ASM에서는 C_1' 이 y^+ 의 증가에 따라 단순감소를 하는 반면, 본 ASM에서는 한번 진동하며 감소하는 현상이 다르다. 본 ASM에서는 C_1' 의 진동현상은 물리적 현상이라기 보다는 식 (40)에서 $\frac{\bar{v}^c}{k}$ 의 관계식을 설정할 때 하나의 부드러운 곡선을 사용하지 않고 3개의 불연속적인 곡선을 복합하여 사용한다기 때문이다.

Fig. 3~Fig. 5에서 공통적으로 발견되는 점은 y^+ 가 100 (Re_c 는 약 400) 이하에서는 2차모멘트 난류모형계수들의 변화가 크지만 그 이후에서는 그 변화가 거의 없다는 점이다. 이것은 y^+ 가 100이하인 벽면인접부에 레이놀즈응력의 비등방성과 레이놀즈응력소멸율의 비등방성이 매우 크고, 레이놀즈응력의 생성률과 소멸율도 평형을 이루지 않아서 압력변형률이 복잡하게 변하여 단순한 모형으로 나타내질 수 없기 때문에 기인한 것으로 생각된다.

Fig. 6은 레이놀즈수가 50,000인 2차원 평행평판 유동에서 무차원 난류운동에너지에 대한 예측결과를 Laufer⁽²⁶⁾의 실험결과와 비교한 그림이다. 표준 ASM에 의한 결과는 전체적으로 실험치와 잘 일치하지 않으며 특히 벽면인접부에서 실험치보다 상당히 낮게 예측되었고 채널중심부에서는 실험치보다 높게 예측하고 있다. LS ASM에 의한 예측결과는 그 변화 형상이 실험치를 잘 추적하고 있으나, 전체적으로 실험치보다 낮은 무차원 난류운동에너지

분포를 보여주고 있다. 그러나 본 ASM에 의한 예측결과는 실험치에 잘 일치하는 결과를 보여주고 있어서 본 저레이놀즈수 2차모멘트 모형의 우수성을 나타내주고 있다.

Fig. 7은 무차원 난류운동에너지소멸율의 분포를 나타낸다. Laufer의 실험결과는 y^+ 가 10부근에서 $\nu\epsilon/Ut^4$ 값이 0.21정도의 극대치를 보여주는데 LS ASM이나 표준 ASM은 극대치 값이 이보다 훨씬 낮게 예측해 주고 있으나 본 ASM은 이 극대치값을 실험치에 좀더 가깝게 예측해주고 있다. 그러나 y^+ 가 20이상에서는 LS ASM은 $\nu\epsilon/Ut^4$ 을 실험치에 잘 일치하게 예측해 주지만 본 ASM은 실험치보다 낮은 값을 예측해 준다. 난류유동해석에 가장 중요한 것은 벽면인접부의 난류특성을 정확히 예측해주는 것이므로 이런 의미에서 본 ASM이 LS ASM보다 유리함을 알 수 있다.

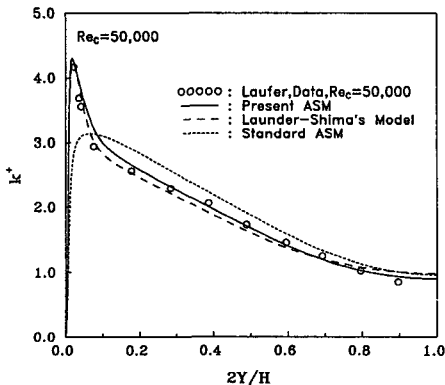


Fig. 6 Distribution of turbulent kinetic energy in channel flow at $Re_c=50,000$

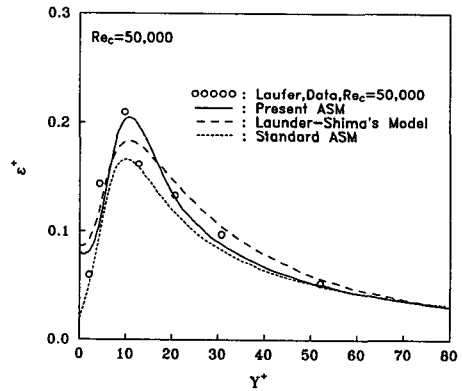


Fig. 7 Distribution of dissipation rate near the wall in channel flow at $Re_c=50,000$

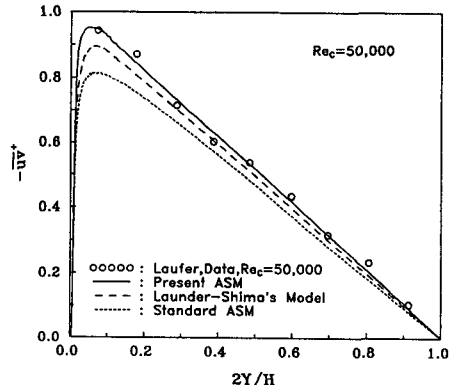


Fig. 8 Distribution of Reynolds stress in channel flow at $Re_c=50,000$

Fig. 8은 무차원화된 레이놀즈 전단인력 $-uw/U\tau^2$ 의 예측결과를 실험결과와 비교한 것이다. 이 그림에서도 역시 본 ASM에 의한 예측결과는 실험치에 잘 일치하는 반면, LS ASM이나 표준 ASM에 의한 결과는 실험치보다 전체적으로 낮은 레이놀즈 전단인력 분포를 보여준다.

Fig. 9는 레이놀즈수가 27,600인 경우에 축방향 난류강도 $u'/U\tau$ 에 대한 해석결과를 Hussain과 Reynolds,⁽²⁷⁾ Kastrinakis와 Eckelmann⁽²⁸⁾의 실험결과, 그리고 Moin과 Kim⁽²⁹⁾의 대형와류모사법 (Large Eddy Simulation)에 의한 계산결과와 비교한 그림이다. 실험결과와 대형와류모사법에 의한 해석결과는 서로 잘 일치하고 있어서 실험치들의 신뢰도를 높여주고 있다. 난류강도 $u'/U\tau$ 의 실험치들이나 계산결과들에 대한 변화 경향은 Fig. 6의 무차원 난류운동에너지의 분포와 상이하며, 본 ASM에 의한 예측결과는 실험치에 잘 일치하고 있는 것을 알 수 있다. Fig. 6과 Fig. 9의 $2Y/H$ 가 0.03부근에서 $\frac{k}{U\tau^2}$ 혹은 $\frac{v'}{U\tau}$ 가 극대값을 갖는 것은 이 부근에서 레이놀즈응력의 생성이 가장 크기 때문이다.

$2Y/H$ 가 0.03인 부근의 y^+ 로는 20에서 30부근이며, R_τ 로는 80에서 120 사이의 구역에 해당한다. 이 구역은 레이놀즈응력의 비등방성이 매우 큰 구역이며 이는 Fig. 9와 Fig. 10을 비교함으로써도 알 수 있다. Fig. 9와 Fig. 10을 비교해 보면 $2Y/H$ 가 0.03부근에서 $u'/U\tau$ 와 $v'/U\tau$ 에 큰 차이가 있음을 알 수 있는데 이것은 레이놀즈응력은 초기 생성단계에서 주로 축방향 주응력 u^2 으로 생성되었다가

압력변형률에 의해 다른 방향 응력으로 재분배됨을 나타내고 있다. 벽면인접부에서의 이와 같은 레이놀즈응력의 큰 비등방성은 레이놀즈응력소멸율의 큰 비등방성을 초래하게 되고 이러한 경향을 잘 모형화하지 않을 경우 난류유동특성 예측이 매우 부정확해질 수 있음을 시사해준다. LS ASM에서는 2차모멘트 난류계수 C_1, C_2, C_1', C_2' 를 비등방성의 Invariant의 함수로 나타낸 것은 바람직한 일이라 할 수 있으나, 그 함수들 속의 상수들을 전산최적화로 결정한 것과 레이놀즈응력소멸율 모형으로 등방성 모형을 사용한 것은 이 모형의 일반성을 떨어뜨린다 하겠다. 반면, 본 ASM에서는 C_1, C_2, C_1', C_2' 를 비등방성의 함수로 나타냈음에도 불구하고 이 계수들을 대수응력모형으로부터 유도하여 전산최적화 과정이 필요 없고, 레이놀즈응력소멸율 모형으로 비등방성 모형을 사용하였고 최종적으로 C_1, C_2, C_1', C_2' 를 모두 난류레이놀즈수 R_τ 의 함수로 나타냄으로 이 모형의 일반성을 증진시켰다.

Fig. 10은 레이놀즈수가 6,400일 때 2차원 채널 유동에 대한 벽면에 수직인 방향의 레이놀즈응력강도 $v'/U\tau$ 에 대한 해석결과를 Kreplin과 Eckelmann⁽³⁰⁾의 실험결과와 Kim등⁽³¹⁾의 대형와류모사법에 의한 해석결과와 비교한 것이다. 이 그림에서는 Kreplin과 Eckelmann의 실험결과가 Kim등의 해석결과와 큰 차이를 보여서 표준자료를 잡기가 어려운 실정이다. 본 ASM에 의한 해석결과는 Kim등의 해석결과를 잘 추종하고 있는 반면, LS ASM에 의한 해석결과는 $2Y/H$ 가 0.1보다 작은 구역에서 Kim등의 해석결과를 잘 추적하다가 그 이상의

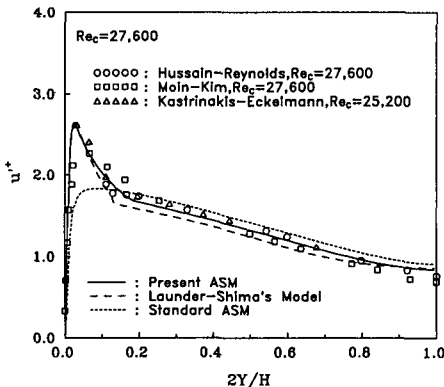


Fig. 9 Distribution of streamwise normal Reynolds stress in channel flow at $Re_\tau=27,600$

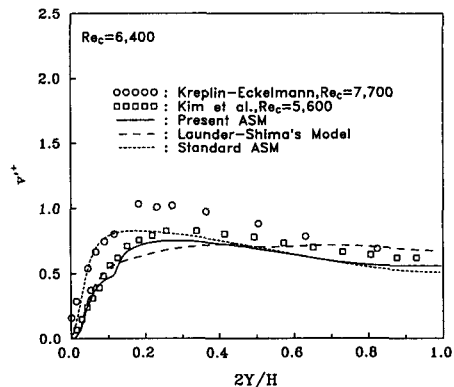


Fig. 10 Distribution of normal Reynolds stress vertical to the wall in channel flow at $Re_\tau=6,400$

$2Y/H$ 에서는 더 낮은 값을 예측해 주고 있다. 한편, 표준 ASM은 $2Y/H$ 가 0.1이하에서는 Kreplin과 Eckelmann의 실험결과를 잘 추적하다가 그 이상에서는 역시 이들 값보다 낮은 레이놀즈응력강도를 예측해 주고 있다. 따라서 이 그림만으로 난류모형의 우열을 판명하기 어려우나 대체적으로 볼 때 본 ASM이 가장 무난한 모형으로 나타나고 있다.

Fig. 11은 레이놀즈수가 6,400인 채널유동에서 무차원 레이놀즈전단응력 $-uv/Ur^2$ 이 해석결과를 Eckelmann⁽³²⁾의 실험결과와 Kim등⁽³¹⁾의 대형와류모사법에 의한 예측결과와 비교한 그림이다. LS ASM에 의한 예측결과는 실험치보다 전체적으로 낮은 레이놀즈 전단응력 분포를 보여주는 반면, 본 ASM에 의한 결과와 표준 ASM에 의한 결과는 실험치에 거의 잘 일치한다. 그러나 본 ASM에 의한

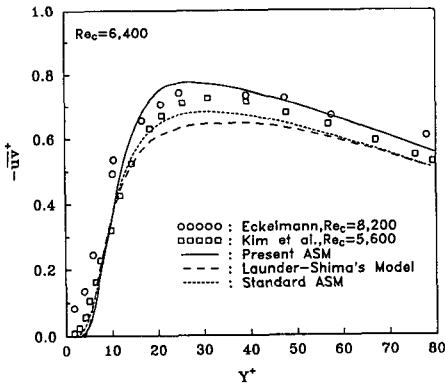


Fig. 11 Distribution of Reynolds stress in the wall region for channel flow at $Re_c=6,400$

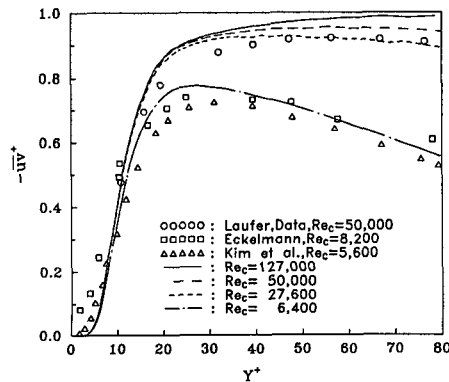


Fig. 12 Distribution of Reynolds stress in the wall region for channel flow

결과가 좀 더 실험치에 가까운 것을 알 수 있다. y^+ 가 10보다 작은 구역에서 모든 ASM모형에 의한 예측치가 Eckelmann의 실험치와 Kim등의 해석결과보다 낮은 레이놀즈 전단응력을 예측해 주는 것은 이 구역에서 난류모형의 개선에 관한 연구가 더 요구되는 것을 뜻하고 있다.

Fig. 12, Fig. 13은 무차원 레이놀즈 전단응력과 벽면에 수직인 방향의 레이놀즈 주응력강도에 대한 레이놀즈수의 변화에 따른 예측결과를 실험결과와 비교한 그림이다. 계산결과는 모두 본 ASM 난류모형을 적용한 결과이다.

Fig. 12에 의하면 레이놀즈수가 증가함에 따라 무차원 레이놀즈 전단응력 분포가 모두 Laufer,⁽²⁶⁾ Eckelmann⁽³²⁾의 실험결과와 Kim등⁽³¹⁾의 대형와류모사법에 의한 해석결과는 증가하는 경향을 나타내 주는데, 본 ASM에 의한 예측결과는 이러한 경향을 잘 추종하고 있다. Fig. 13의 실험결과들을 살펴보면 레이놀즈 주응력강도는 $2Y/H$ 가 0.5이상에서는 레이놀즈수의 변화에 큰 영향을 받지 않는 것으로 나타나고 있으나, $2Y/H$ 가 0.5이하에서 벽면에 가까워질수록 레이놀즈수의 변화에 따라 v'/Ur 분포에 차이가 크게 나타나며 레이놀즈수가 커질수록 v'/Ur 가 증가하는 경향을 보여주고 있는데 본 ASM에 의한 해석결과는 정량적으로는 완전히 일치하지 않으나 v'/Ur 의 이러한 변화 경향을 잘 추종하고 있다.

Fig. 14, Fig. 15는 레이놀즈수가 50,000인 원관유동에서 난류운동에너지 분포와 레이놀즈 전단응력 분포에 대한 각 난류모형에 따른 예측결과를 비교한 그림이다. 2차원 채널유동에서와 같이 본 ASM

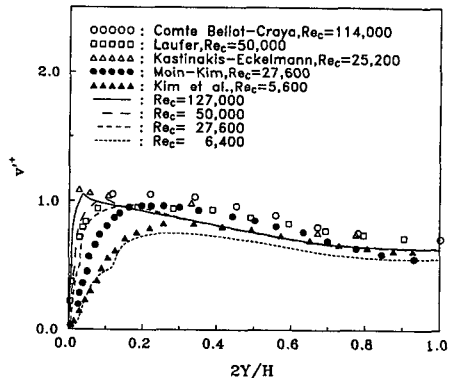


Fig. 13 Distribution of normal Reynolds stress vertical to the wall region in channel flow

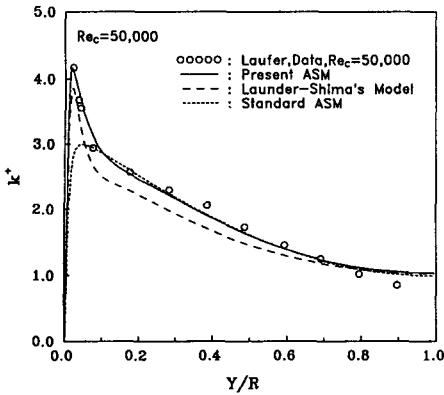


Fig. 14 Distribution of turbulent kinetic energy in pipe flow at $Re_c=50,000$

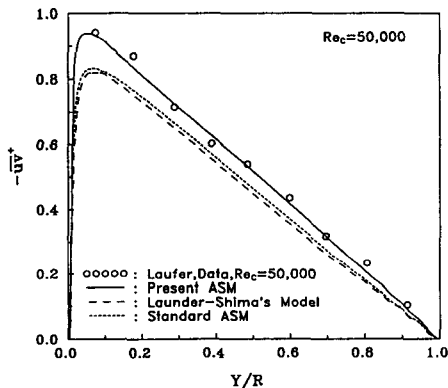


Fig. 15 Distribution of Reynolds stress in pipe flow at $Re_c=50,000$

에 의한 예측결과가 Laufer⁽²⁶⁾의 실험치에 가장 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 벽면인접부의 저레이놀즈수 구역을 정확히 해석해 줄 수 있는 2차모멘트 난류모형을 개발하기 위해서 2차모멘트 난류모형계수들을 벽면인접부에서의 Laufer의 레이놀즈응력 측정실험결과와 대수응력모형을 이용하여 난류레이놀즈수의 함수로 나타내었다. 본 연구에서 개발한 저레이놀즈수 대수응력모형의 적합성을 검증하기 위해서 본 모형을 2차원 평행판유동과 원관유동의 해석에 표준대수응력모형, Launder-Shima의 대수응력모형과 함께 적용하여 그 해석결과를 비교한 결과,

다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) y^+ 가 100(R_c 는 약 400)이하에서는 2차모멘트 난류모형계수들의 변화가 크지만 y^+ 가 100이상에서는 거의 일정하였다. 이것은 y^+ 가 100이하에서는 레이놀즈응력과 레이놀즈응력소멸율의 비등방성이 커서 압력변형률이 단순한 형태의 모형으로 나타내기 어렵기 때문으로 생각된다.

(2) 표준대수응력모형은 벽면인접부에서의 레이놀즈응력과 레이놀즈응력의 소멸율 분포를 부정확하게 예측해준다.

(3) Launder-Shima의 저레이놀즈수 대수응력모형은 레이놀즈응력 분포에서는 표준대수응력모형보다 실험치의 변화 형상은 매우 잘 추종하지만 정량적으로 차이가 큰 곳도 존재하였다. 그리고 레이놀즈응력소멸율 분포는 실험치와 차이가 커서, 표준대수응력모형보다 개선점이 나타나지 않았다.

(4) 본 연구에서 개발한 저레이놀즈수 대수응력모형은 레이놀즈응력 예측에 있어서 기존의 모형들보다 전반적으로 실험치에 잘 일치하였고 레이놀즈응력소멸율의 예측에서도 큰 개선을 보여서 실험치의 변화 경향을 상이하게 추종하였다.

(5) 본 연구를 통해서 평행판유동과 원관유동에서는 본 저레이놀즈수 대수응력모형의 우수성이 검증되었다고 할 수 있으나, 본 모형을 실제 유동 해석에 적용하기 위해서는 복잡한 3차원 난류모형 유동에서의 검증이 요구된다.

참고문헌

- (1) 최영돈, Launder, B. E., 1985, "4각 단면의 180°곡관에서의 난류유동과 열전달 해석," 대한기계학회논문집, 제 9권, 제 1호, pp. 91~108.
- (2) Johnson, R. W., 1984, "Turbulent Convecting Flow in a Square Duct with a 180° Bend: Experimental and Numerical Study," Ph. D. Thesis, UMIST.
- (3) Choi, Y. D., Iacovides, H. and Launder, B. E., 1989, "Numerical Computation of Turbulent Flow in a Square Sectioned 180 Deg. Bend," Trans. of ASME, J. of Fluids Eng., Vol. 3, March, pp. 59~68.
- (4) Launder, B. E., 김명호, 문찬, 최영돈, 1988, "180°곡관을 갖는 정사각단면덕트에서의 난류유동 해석," 대한기계학회논문집, 제 12권, 제 3호,

- pp. 607~621.
- (5) Launder, B. E., 1989, "Second-Moment Closure : Present and Future?" Int. J. Heat and Fluid Flow. Vol. 10, No. 4, December, pp. 282~300.
 - (6) Jones, W. P. and Launder, B. E., 1972, "The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence," Int. J. Heat Transfer, Vol. 15, pp. 301~314.
 - (7) Launder, B. E. and Sharma, B. I., 1974, "Application of the Energy Dissipation Model of Turbulence to the Calculation of Flow near a Spinning Disc," Lett. Heat Mass Transfer, Vol., pp. 131~138.
 - (8) Lam. C. K. G. and Bremhorst, K. A., 1981, "Modified Form of the $k-\epsilon$ Model for Predicting Wall Turbulence," Trans. ASME, J. Fluids Engng., Vol. 103, pp. 456~460.
 - (9) Myong, H. K., 1988, "Fundamental Studies on Two-Equation Turbulence Model for Numerical Predictions of Wall-Bounded Shear flow and Heat Transfer," Ph. D. Thesis, Tokyo University.
 - (10) Hanjalic, K. and Launder, B. E., 1976, "Contribution towards a Reynolds-Stress Closure for Low-Reynolds-Number Turbulence," J. Fluids Mech., Vol. 74, Part 4, pp. 593~610.
 - (11) Launder, B. E. and Shima, N., 1989, "Second Moment Closure for the Near Wall Sublayer : Development and Application," AIAA Journal, Vol. 27, No. 10, October, pp. 1319~1325.
 - (12) Shima, N., 1988, "Reynolds-Stress Model for Near-Wall and Low Reynolds Number Regions," J. Fluids Engng., Vol. 10, pp. 38~44.
 - (13) Launder, B. E., Reece, G. J. and Rodi, W., 1975, "Progress in the Development of a Reynolds Stress Turbulence Closure," J. Fluid Mechanics, Vol. 68, pp. 537~566.
 - (14) Lumley, J. L., 1978, "Computational Modeling of Turbulent Flows," Advances in Appl. Mech., Vol. 18, pp. 123~175.
 - (15) Schumann, U., 1977, Phys. Fluids, Vol. 20, pp. 721.
 - (16) Jones, W. P., 1990, "Turbulence Modeling : Current Practice and Future Trends," International Symposium on Engineering Turbulence Modeling and Measurements, Dubrovnik Yugoslavia, September.
 - (17) Batchelor, G. K. and Prodan, P., 1984, J. Mech. App Math., Vol. 7, pp. 83~103.
 - (18) Shih, T. H. and Lumley, J. L., 1985, "Modeling of Pressure Correlation Terms in Reynolds Stress and Scalar Flux Equations," Report FDA-85-3, Sibley School of Mech. Aero. Eng. Cornell University.
 - (19) Shih, T. H. and Lumely, J. L. and Chen, J. Y., 1985, "Second Order Modeling of Boundary Free Turbulent Shear Flows with a New Form of Pressure Correlation," Report FDA-85-7, Sibley School of Mech. Aero, Eng, Cornell University.
 - (20) Gibson, M. M. and Launder, B. E., 1978, "Ground Effects on Pressure Fluctuation in the Atmospheric Boundary Layer," J. Fluids Mech., Vol. 86, pp. 491.
 - (21) Launder, B. E., and Reynolds, W. E., 1983, "Asymptotic near Wall Stress Dissipation Rates in a Turbulent Flow," Phys. Fluids, Vol. 26, pp. 1157~1158.
 - (22) 김명호, 1991, "저레이놀즈수 난류모형개발에 관한 연구," 고려대학교 박사학위 논문.
 - (23) Donaldson, C., dup., 1969, AIAA, Vol. 7, p. 271.
 - (24) Gibson, M. M. and Younis, B. A., 1986, "Calculation of Swirling Jets with a Reynolds stress Closure," Phys. Fluids, Vol. 29, No. 1, pp. 38~48.
 - (25) Naot, D., Shavit, A. and Wolshtein, M., 1970, "Interaction between Components of the Turbulent Velocity Correlation Tensor," Israel J. Tech., Vol. 8, pp. 259~269.
 - (26) Laufer, J., 1954, "The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow," NACA Rept.
 - (27) Hussain, A. K. M. F. and Reynolds, W. C., 1975, "Measurements in Fully Developed Turbulent Channel Flow," Trans. ASME : J. Fluids Engng. 97, pp. 568~580.
 - (28) Kastrinakis, E. G. and Eckelmann, H., 1983, "Measurement of Streamwise Vorticity Fluctuations in a Turbulent Channel Flow," J. Fluid

- Mech. 137, pp. 165~186.
- (29) Moin, P. and Kim, J., 1982, "Numerical Investigation of Turbulent Channel Flow," J. Fluid Mech., Vol. 118, pp. 341~377.
- (30) Kreplin, H. P. and Eckelmann, H., 1979, "Behaviour of the Three Fluctating Velocity Components in the Wall Region of a Turbulent Channel Flow," Phys, Fluids, Vol. 22, pp. 1233~1239.
- (31) Kim, J., Moin, P. and Moser, R., 1987, "Turbulence Statistics in Fully Developed Channel Flow at Low Reynolds Number," J. Fluid Mech., Vol. 177, pp. 133~166.
- (32) Eckelmann, H. 1974, "The Structure of the Viscous Sublayer and the Adjacent Wall Region in a turbulent Channel Flow," J. Fluid Mech. 65, pp. 439~459.