

〈論 文〉

표면에 수직한 계면방향 표면균열의 해석

최 성 렬*

(1992년 6월 23일 접수)

Analysis of Interfacial Surface Crack Perpendicular to the Surface

Sung Ryul Choi

Key Words : Interfacial Surface Crack(계면방향 표면균열), Anti-Plane(비평면), Stress Intensity Factor(응력확대계수), Self Equilibrium(자기평형), Mellin Transform(Mellin 변환), Green's Function(그린함수), Closed Form(폐형)

Abstract

Interfacial surface crack perpendicular to the surface, which is imbedded into bonded quarter planes under single anti-plane shear load is analyzed. The problem is formulated using Mellin transform, from which single Wiener-Hopf equation is derived. By solving the equation stress intensity factor is obtained in closed form. This solution can be used as a Green's function to generate the solutions of other problems with the same geometry but of different loading conditions.

기 호 설 명

h, l : 거리
 K_{III} : 응력확대계수
 W : 변위
 x, y : 직교좌표
 ρ, θ : 극부 극좌표
 $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{rz}, \sigma_{\theta z}, \sigma_{\rho z}, \sigma_{\theta z}$: 응력
 μ : 재료상수
 Q, Λ : 하중
 P : Mellin변환 변수
 \mathcal{W} : W 의 Mellin변환
 r, θ : 극좌표

하첨자

$j(j=1,2)$: "재료1" 및 "재료2"

1. 서 론

성질이 상이한 재료 즉 이종재료들로 구성된 고체물에는 몇몇 문헌에 제시되어 있는 바와 같이 매우 다양한 기하학적 모양의 균열이 형성되고 있으며, ^(1,2) 이와 관련된 연구가 국내에서도 활발히 진행되어 왔다. ⁽³⁻⁵⁾ 이러한 다양한 모양의 균열중에서 이종재료의 접합면인 계면에 형성된 균열을 계면균열이라고 하고 고체물 표면에 형성되는 균열을 표면균열이라고 한다. 표면균열은 용접등의 제작과정에서 잔류응력이 존재할 경우나 고체물 표면에 반복하중을 포함한 임의의 하중이 작용함으로써 흔히 형성되는 바, 등방성 재료에 관한 표면균열문제는 많은 연구의 대상이 되었다. ⁽⁶⁻⁸⁾ 고체물이 이종재료로 구성되어 있다면 이때 형성되는 표면균열은 계면에 인접한 재료 내부로 형성될 수도 있지만, 대부분 고체물 표면과 계면이 만나는 정점(apex)

*정회원, 영남대학교 기계공학과

에서 시작하여 계면방향으로 형성된다.⁽¹⁾ 이와 관련한 균열문제는 주로 두가지 측면에서 연구되었다.⁽⁹⁾ 그 첫번째는 고체물 표면과 계면이 만나는 정점주변의 응력 특이성(singularity)에 관한 연구로서 Bogy 등에 의하여 수행되었으며,^(4,10~12) 두번째는 고체물 내부에 계면방향으로 유한크기의 균열이 존재하는 문제를 두고 해석한 것이다.^(9,13) 표면 균열 중에서 계면을 따라서 형성된 균열을 본 연구에서는 계면방향 표면균열이라 부르기로 한다.

계면방향 표면균열은 균열이 계면에 놓여 있다는 점으로 볼 때 계면균열의 일종이 된다. 이와 관련된 계면균열문제를 해석함에 있어 대부분 연구자들은 계면균열선단이 열려있다고 가정하고 있다.^(1,2,14) 계면균열선단이 열려 있다고 가정하고 이때 고체물에 가해진 하중이 평면하중(in-plane)일 경우에 얻은 해는 균열선단 주변의 응력과 변위가 진동하고 균열면이 충첩되는 등의 물리적으로 적합하지 못한 특성을 보이고 있지만,⁽¹⁴⁾ 물리적으로 적합하지 못한 특성을 보이는 영역이 미소한 크기의 영역이라는 사실을 감안하여 대부분 연구자들은 이러한 진동특성을 보이는 해를 계면균열에 관한 해로 간주하고 있다.^(2,15) 한편 비평면(anti-plane) 하중이 작용하는 균열문제는 평면하중이 작용하는 문제와는 달리 그 해석 결과를 두고 볼 때 물리적으로 적합하지 못한 특성을 전혀 보이지 않는다.^(16,17)

본 연구에서는 고체물표면과 계면이 수직으로 만나는 정점을 중심으로 유한크기의 계면방향 표면균열이 존재하고 이때 고체물에 비평면 전단하중이 작용하는 문제를 해석하고자 한다. 고체물에 가해진 하중이 비평면 하중이라면 고체물표면 및 균열면에 작용하는 임의의 분포하중에 대해서도 그 해석이 가능한 그린함수(Green's function)를 구하기 위하여 표면 및 균열면의 임의의 점에 각각 한개의 비평면 집중전단하중이 작용하는 문제를 해석의 대상으로 택하였다. 고체물에 작용하는 하중이 평면하중인 문제가 보다 일반적이라고 하겠지만, 비평면 하중문제는 지배방정식이 조화방정식으로 기술된다는 점에서 비교적 해석이 용이하고 또한 그 해는 평면하중문제에 관한 정성적인 정보를 제공할 뿐 아니라 비틀림이나 모드 III 형태의 하중문제에 실제로 적용이 된다는 점에서 해석의 의의가 있다.⁽¹⁸⁾ 본 문제의 경우는 계면에 인접한 재료가 상이함으로 재료의 불연속을 보이는 바, 일반적으로 균열문제를 해석하는 방법으로서 등각사상(confor-

mal mappig)을 사용하여 주어진 문제를 보다 해석하기에 용이한 문제로 변환하고 복소함수를 사용한 해법⁽¹⁹⁾은 용이하지가 않다.

이와같은 맥락에서 본연구에서는 적분변환에 의한 해법을 사용하여 폐형으로 주어지는 엄밀해를 얻었다. 먼저 평면에 수직인 방향의 변위를 도입하여 주어진 문제를 Mellin 변환하고 수식화 하면 Wiener-Hopf 방정식이 주어진다. 이 방정식을 풀 다음 변위에 관한 적분 표현식을 점근(asymptotic) 전개하여 평가하면 균열선단 부근의 변위가 결정된다. 이로부터 폐형(closed form)으로 구성되는 균열선단부근의 응력확대계수(stress intensity factor)를 얻었다. 이 결과를 가지고 특정한 경우에 해당되는 기존의 연구결과와 비교하였다. 특별히 가해진 하중이 자기평형(self equilibrium)을 이루는 경우에 한정하여 계면에 인접한 재료의 성질에 무관하게 응력확대계수는 균질한 재료의 결과와 동일함을 무한고체물에 대한 해석에서 보인 바 있는데, 이와같은 정성적인 결과가 본문제와 같이 계면방향 표면균열을 지니는 반무한 크기의 고체물에서도 유지되는가를 검토하였다. 아울러 본 연구와 동일한 모양의 균열이라면 고체물표면 혹은 균열면에 임의로 분포하는 비평면하중문제에 대한 응력확대계수는 본 연구의 결과를 가지고 간단한 적분을 수행함으로써 용이하게 계산됨을 보였다.

2. 수학적 전개

Fig. 1에서 보는 바와 같이, 성질이 상이한 등방성 재료의 접합면인 계면이 고체물표면과 수직으로 놓인 반무한 크기의 평면에서 계면을 x 축의 양의 방향으로 고정하면 표면은 y 축에 해당한다. 표면과 계면이 만나는 모서리점 0를 시작점으로 크기 b 인 계면방향 표면균열이 형성되고 있고, 점 0에서 거리 l 인 고체물표면과 h 인 균열면상의 한점에 각각 크기 Q 및 Λ 인 비평면 집중전단 하중이 작용하는 문제를 생각하자. 이와 같은 문제는 고체물 표면 및 균열면에 임의로 분포하는 비평면 하중문제에 대해서도 적용이 되는 그린함수를 구하는 문제가 된다. 해석의 편의를 위하여 $y > 0$ 인 "영역1"과 $y < 0$ 인 "영역2"에 해당하는 재료의 전단계수를 각각 μ_1, μ_2 으로 두고, x 축과 모서리점 0를 중심으로 극좌표계 (r, θ) 를 도입하자.

그러면 평면에 수직인 z 축방향의 변위 $W(r, \theta)$

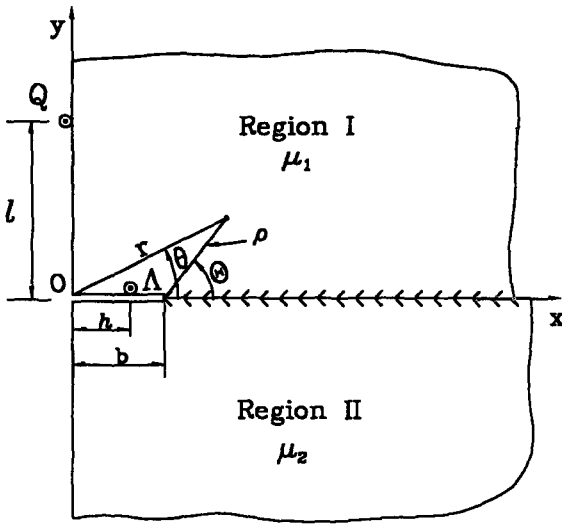


Fig. 1 Interfacial crack imbedded into bonded quarter planes under anti-plane shear loads of magnitude Q and A

는 다음과 같은 Laplace식으로 기술된다. ^(18,21,22)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) W(r, \theta) = 0 \quad (1)$$

또한 z 축 방향의 전단응력은

$$\sigma_{\theta z}(r, \theta) = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} W(r, \theta) \quad (2)$$

$$\sigma_{rz}(r, \theta) = \mu \frac{\partial}{\partial r} W(r, \theta) \quad (3)$$

이 되고, 여기서 μ 는 전단계수로서 “영역1” 및 “영역2”에서 각각 μ_1 및 μ_2 에 대응된다. 경계조건을 극좌표계로 나타내면

$$\sigma_{\theta z}(r, \pi/2) = Q \delta(r-l) \quad (4a)$$

$$\sigma_{\theta z}(r, -\pi/2) = 0 \quad (4b)$$

$$\sigma_{\theta z}(r, 0^+) = -A \delta(r-h), 0 \leq r < b \quad (4c)$$

$$\sigma_{\theta z}(r, 0^-) = 0, 0 \leq r < b \quad (4d)$$

이 되고, 여기서 $\delta(\cdot)$ 은 Dirac 델타함수를 말한다. 또한 트래クション(traction)과 변위의 연속조건은 다음으로 표현된다.

$$\sigma_{\theta z}(r, 0^+) = \sigma_{\theta z}(r, 0^-), b \leq r \quad (4e)$$

$$W(r, 0^+) = W(r, 0^-), b \leq r \quad (4f)$$

이때 응력의 점근거동은 다음과 같다. ⁽²²⁾

$$\sigma_{\theta z}, \sigma_{rz} =$$

$$\begin{cases} 0[r^{-\lambda}] \text{ as } r \rightarrow 0, 0 < \lambda < 1/2 & (5a) \\ 0[r^{-1}] \text{ as } r \rightarrow \infty & (5b) \\ 0[(r-b)^{-1/2}] \text{ as } r \rightarrow b^+ \text{ and } \theta \rightarrow 0 & (5c) \end{cases}$$

변위 $W(r, \theta)$ 의 r 에 관한 Mellin변환인 $M\{W(r, \theta); p\}$ 을 $\mathbb{W}(p, \theta)$ 라고 하면, $\mathbb{W}(p, \theta)$ 는

$$\mathbb{W}(p, \theta) = \int_0^\infty W(r, \theta) r^{p-1} dr \quad (\lambda - 1 < \text{Re } p < 0) \quad (6)$$

이 되고, $\mathbb{W}(p, \theta)$ 의 적분이 존재하는 $\text{Re } p$ 의 범위는 식(5a), (5b)로부터 결정된다. 그러면 식(1)로부터 $\mathbb{W}(p, \theta)$ 는

$$\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + p^2\right) \mathbb{W}(p, \theta) = 0 \quad (7)$$

을 만족시킨다. 식(7)의 해를 영역별로 나누어 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbb{W}(p, \theta) = \begin{cases} A_1(p) \cos(\theta p) + B_1(p) \sin(\theta p), & 0 \leq \theta \leq \pi/2 [\text{영역 I}] \\ A_2(p) \cos(\theta p) + B_2(p) \sin(\theta p), & -\pi/2 \leq \theta < 0 [\text{영역 II}] \end{cases} \quad (8a, 8b)$$

여기서 $A_i(p), B_i(p) (i=1, 2)$ 는 경계조건으로부터 결정되어야 할 p 의 함수들이다.

일단 $A_i(p), B_i(p) (i=1, 2)$ 가 결정된다면 Mellin 역변환에 의하여 다음과 같은 변위 $W(r, \theta)$ 의 형식적인 표현식이 얻어진다.

$$W(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathbb{W}(p, \theta) r^{-p} dp \quad (\lambda - 1 < c < 0, 0 < \lambda < 1/2) \quad (9)$$

식(8a), (8b)의 미지함수 $A_i(p), B_i(p) (i=1, 2)$ 를 결정하기 위하여 경계조건 식(4a)~(4f)를 Mellin 변환하여 정리하면 다음과 같은 풀어야 할 Wiener-Hopf 방정식을 얻는다.

$$T_+(p) = K(p) \cdot G_-(p) - L(p) - J(p) \quad (10a)$$

여기서 커널함수 $K(p), L(p)$ 및 $J(p)$ 는 각각

$$K(p) = \frac{2 \cos(\pi p/2)}{(1+\gamma) \mu_1 p \sin(\pi p/2)} \quad (10b)$$

$$L(p) = \frac{Q(l/b)^p}{\mu_1 p \sin(\pi p/2)} \quad (10c)$$

$$J(p) = \frac{\Lambda(h/b)^p \cos(\pi p/2)}{\mu_1 p \sin(\pi p/2)} \quad (10d)$$

$$\gamma = (\mu_2 - \mu_1) / (\mu_2 + \mu_1) \quad (10e)$$

이고, $T_+(p)$ 및 $G_-(p)$ 는 각각

$$T_+(p) = \int_0^1 [W(b\xi, 0^+) - W(b\xi, 0^-)] \xi^{p-1} d\xi \quad (10f)$$

$$G_-(p) = b \int_1^\infty \sigma_{0z}(b\xi, 0) \xi^p d\xi \quad (10g)$$

로 정의된 새로운 미지함수로서 식(5a) 및 (5b)로부터 $T_+(p)$ 는 $Re\ p > \lambda - 1$ ($0 < \lambda < 1/2$)에서 해석적이고 $G_-(p)$ 는 $Re\ p < 0$ 에서 각각 해석적임을 안다. 또한 미지함수 $A_i(p)$, $B_i(p)$ ($i=1, 2$)를 $G_-(p)$ 로 나타내면 다음과 같다.

$$A_1(p) = \frac{b^p G_-(p) \cos(\pi p/2) - Ql^p - \Lambda h^p \cos(\pi p/2)}{\mu_1 p \sin(\pi p/2)} \quad (11a)$$

$$B_1(p) = \frac{b^p G_-(p) - \Lambda h^p}{\mu_1 p} \quad (11b)$$

$$A_2(p) = -\frac{b^p G_-(p) \cos(\pi p/2)}{\mu_2 p \sin(\pi p/2)} \quad (11c)$$

$$B_2(p) = \frac{b^p G_-(p)}{\mu_2 p} \quad (11d)$$

Wiener-Hopf 방정식(10a)의 해가 주어지면 식(11a)~(11d)의 관계로부터 식(8a), (8b)내의 미지함수들이 모두 결정된다.

3. Wiener-Hopf 방정식의 풀이

Noble⁽²⁰⁾의 저서에 서술된 방법을 사용하면 식(10a)로 주어진 Wiener-Hopf 방정식의 해가 구성될 수 있고, 그 구성과정은 이전의 연구와 유사하다.^(21,22) 먼저 식(10b)의 $K(p)$ 를 p 의 좌우반 평면에서 각각 해석적인 함수로 분해하면 다음과 같다.

$$K(p) = K_-(p)/K_+(p) \quad (12a)$$

여기서

$$K_+(p) = \frac{2p}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{1+p}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2})} = \frac{4}{(1+\gamma)\mu_1\pi} \frac{p^2}{K_-(-p)} \quad (12b)$$

이다. 이때 $\Gamma(\cdot)$ 는 Gamma 함수를 말하고, $K_+(p)$ 는 $Re\ p > -1/2$ 에서 한편 $K_-(p)$ 는 $Re\ p < 1/2$ 에서 각각 해석적이다.

식(10a)의 양변에 $K_+(p)$ 를 곱하여 정리하면

$$K_+(p) T_+(p) = K_-(p) \cdot G_-(p) - K_+(p) L(p) - K_+(p) J(p) \quad (13)$$

이 된다.

식(13)의 우변 둘째항 $K_+(p)L(p)$ 를 p 의 좌우반 평면에서 해석적인 함수의 합으로 분해하면

$$K_+(p)L(p) = L_-(p) + L_+(p); \quad (14a)$$

$$L_+(p) = \frac{2Q}{\mu_1 \pi^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta_n (b/l)^{\zeta_n}}{(p + \zeta_n) \sin(\frac{\pi \zeta_n}{2})} \frac{\Gamma(\zeta_n/2)}{\Gamma(\frac{1+\zeta_n}{2})}, \text{ for } b/l \leq 1 \quad (14b)$$

$$L_-(p) = \frac{4Q}{\mu_1 \pi^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(l/b)^{P_n}}{(P - P_n) \cos(\frac{\pi P_n}{2})} \frac{\Gamma(\frac{1+P_n}{2})}{\Gamma(P_n/2)}, \text{ for } b/l \geq 1 \quad (14c)$$

$$\text{and } \zeta_n = 2n - 1, P_n = 2n \quad (14d)$$

이 되고, 여기서 $L_-(P)$ 는 $Re\ p < 1/2$ 에서 한편 $L_+(p)$ 는 $Re\ p \geq 1/2$ 에서 각각 해석적이다.

또한 식(13)의 우변 셋째항 $K_+(p)J(p)$ 를 p 의 좌우반 평면에서 해석적인 함수의 합으로 분해하면

$$K_+(p) J(p) = J_-(p) + J_+(p); \quad (15a)$$

$$J_-(p) = \frac{4\Lambda}{\mu_1 \pi^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(h/b)^{P_n} \Gamma(\frac{1+P_n}{2})}{(P - P_n) \Gamma(P_n/2)}, \text{ for } h/b \leq 1 \quad (15b)$$

이 되고, 여기서 $J_-(p)$ 는 $Re\ p < 1/2$ 에서 한편 $J_+(p)$ 는 $Re\ p > -1/2$ 에서 각각 해석적이다.

식(14a) 및 (15a)를 사용하여 식(13)을 최종적으로 정리하면 다음과 같다.

$$K_+(p) T_+(p) + L_+(p) + J_+(p) = K_-(p) G_-(p) - L_-(p) - J_-(p) \quad (16)$$

이 식의 좌변은 $Re\ p > -1/2$ 에서 해석적이고 우변은 $Re\ p < 0$ 에서 해석적이므로, 해석적점속⁽²³⁾에 의하여 식(16)의 양변은 p 의 전평면에서 해석적인 전함수(entire function)로서 상수가 된다. 이 상수를 Ω 라고 하면 식(16)은 다음으로 둘 수 있다.

$$K_+(p) T_+(p) + L_+(p) + J_+(p) = K_-(p) G_-(p) - L_-(p) - J_-(p) = \Omega \quad (17)$$

식(17)에 힘의 평형을 고려하여 계산하면 상수 Ω 는 다음과 같이 용이하게 결정된다.

$$\Omega = L_+(0) + J + (0) \quad (18)$$

식(14a) - (14c) 및 식(15a), (15b)로부터 식(18)내의 $L_+(0)$ 와 $J+(0)$ 를 계산하면 다음으로 계산된다.

$$L_+(0) = \frac{2Q}{\mu_1 \pi} \frac{b}{\sqrt{l^2 + b^2}}, \text{ for any value of } b/l \quad (19)$$

$$J_+(0) = \frac{2\Lambda}{\mu_1 \pi} \frac{b}{\sqrt{b^2 - h^2}} \quad (20)$$

따라서 식(17), (18)로부터 미지함수 $T_+(p)$ 와 $G_-(p)$ 는 다음과 같이 얻어진다.

$$T_+(p) = \frac{1}{K_+(p)} [\Omega - L_+(p) - J_+(p)] \quad (21)$$

$$G_-(p) = \frac{1}{K_-(p)} [\Omega + L_-(p) + J_-(p)] \quad (22)$$

식(21) 및 (22)와 같이 $T_+(p)$ 및 $G_-(p)$ 가 결정됨에 따라 식(11a) - (11d)로 표현되는 $A_i(p)$, $B_i(p)$ ($i=1, 2$)가 모두 결정된다.

4. 결과 및 논의

식(11a) - (11d)를 식(8a) 및 (8b)에 대입하고 식(9)와 같이 Mellin 역변환하면 각 영역에 따른 변위 $W(r, \theta)$ 가 다음과 같이 적분형태로 주어진다.

$$W(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{(1+\gamma)\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)p}{2\cos(\pi p/2)} b^p \right. \\ \left. T_+(p) - \frac{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)p - \gamma\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)p}{\mu_1 p \sin \pi p} Q l^p \right. \\ \left. - \frac{(1-\gamma)\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)p}{2\mu_1 p \sin(\pi p/2)} \Lambda h^p \right) r^{-p} dp, \\ (\lambda-1 < c < 0, 0 < \lambda < 1/2), 0 \leq \theta \leq \pi/2 [\text{영역 I}] \quad (23a)$$

$$W(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{(1+\gamma)\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)p}{2\cos(\pi p/2)} b^p \right. \\ \left. T_+(p) - \frac{(1-\gamma)\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)p}{\mu_1 p \sin \pi p} Q l^p \right. \\ \left. - \frac{(1-\gamma)\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)p}{2\mu_1 p \sin(\pi p/2)} \Lambda h^p \right) r^{-p} dp, \\ (\lambda-1 < c < 0, 0 < \lambda < 1/2), -\pi/2 \leq \theta \leq 0 [\text{영역 II}]. \quad (23b)$$

해석의 주된 관심이 응력확대계수를 구하는 것이므로 균열선단 부근의 해석이 요구된다. Fig. 1에

서 보는 바와 같이 균열선단이란 극좌표로 $r \approx b$, $\theta \approx 0$ 에 해당하고 국부극좌표계 (ρ, Θ) 로는 $\rho \rightarrow 0$, $-\pi \leq \Theta \leq \pi$ 에 해당한다. 이때 이들의 점근 관계는

$$r = b(1 + \frac{\rho}{b} \cos \Theta) + 0[(\rho/b)^2] \quad (24a)$$

$$\theta = \frac{\rho}{b} \sin \Theta + 0[(\rho/b)^2] \quad (24b)$$

가 된다.⁽²¹⁾

식(24a), (24b)의 관계를 이용하여 식(23a) 및 (23b)와 같이 적분형태로 주어진 변위 $W(r, \theta)$ 의 식을 $r \approx b$, $\theta \approx 0$ 에서 점근 전개함으로써 국부 극좌표계 (ρ, Θ) 로 표현하고, 이를 평가하면 국부극좌표계로 표현되는 균열선단부근의 변위 $W(\rho, \Theta)$ 는 다음과 같이 얻어진다.

$$W(\rho, \Theta) = C_o + (1+\gamma)\Omega \sqrt{\frac{\rho}{2b}} \sin(\Theta/2) + 0(\rho), \\ 0 \leq \Theta \leq \pi \quad (25a)$$

$$= C_o + (1-\gamma)\Omega \sqrt{\frac{\rho}{2b}} \sin(\Theta/2) + 0(\rho), \\ -\pi \leq \Theta \leq 0 \quad (25b)$$

여기서 C_o 는 강체운동(rigid body motion)에 관련된 상수로서 응력에는 기여하는 바가 없다.

식(25a), (25b)로부터 국부극좌표계로 표현되는 균열선단 부근의 응력 $\sigma_{\theta z}(\rho, \Theta)$ 및 $\sigma_{rz}(\rho, \Theta)$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\sigma_{\theta z}(\rho, \Theta) = \mu \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \Theta} W(\rho, \Theta) \\ = \frac{K_{III}(b, Q, \Lambda; \gamma)}{\sqrt{2\pi\rho}} \cos(\Theta/2) \\ + 0(1), -\pi \leq \Theta \leq \pi \quad (26a)$$

$$\sigma_{rz}(\rho, \Theta) = \mu \frac{\partial}{\partial \rho} W(\rho, \Theta) \\ = \frac{K_{III}(b, Q, \Lambda; \gamma)}{\sqrt{2\pi\rho}} \sin(\Theta/2) \\ + 0(1), -\pi \leq \Theta \leq \pi \quad (26b)$$

여기서 $K_{III}(b, Q, \Lambda; \gamma)$ 는 균열길이 b 이고 고체물 표면과 균열면상의 한점에 각각 Q 및 Λ 인 집중 전단하중이 작용할 때의 응력확대계수로서

$$K_{III}(b, Q, \Lambda; \gamma) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{2\pi\rho} \sigma_{\theta z}(\rho, 0) \\ = \frac{(1+\gamma)\mu_1 \Omega}{2} \sqrt{\frac{\pi}{b}} \quad (27)$$

이다. 식(18) - (20)의 관계를 식(27)에 적용하면 응

력확대계수 $K_{III}(b, Q, \Lambda; \gamma)$ 는 다음과 같이 폐형으로 주어진다.

$$K_{III}(b, Q, \Lambda; \gamma) = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{1}{\sqrt{\pi b}} \left(\frac{Qb}{\sqrt{l^2 + b^2}} + \frac{\Lambda b}{\sqrt{b^2 - h^2}} \right) \quad (28)$$

표면과 계면이 수직으로 만나는 정점을 중심으로 유한크기 b 인 계면방향 표면균열이 형성된 문제에 대하여 그린함수의 의미를 지니는 응력확대계수가 식(28)과 같이 폐형대로 주어졌다. 식(28)을 보면 응력확대계수 K_{III} 는 계면에 인접한 두 재료의 전단계수 μ_1, μ_2 에 의존하고 있는 바, 식(28)을 검토하고자 한다.

본 연구에서 얻은 식(28)의 특정한 경우로서 $\mu_1 = \mu_2$ 인 균질한 재료의 경우를 보면 이때의 응력확대계수 K_{III} 는 기존의 연구결과에 의하여 다음과 같이 주어져 있다⁽²⁴⁾

$$K_{III} = \frac{1}{\sqrt{\pi b}} \left(\frac{Qb}{\sqrt{l^2 + b^2}} + \frac{\Lambda b}{\sqrt{b^2 - h^2}} \right) \quad (29)$$

실제로 $\mu_1 = \mu_2$ 를 식(28)에 대입하면 그 결과는 식(29)와 잘 일치할 보인다. 다음은 $\mu_1 \neq \mu_2$ 인 경우로서 자기평형을 이루고 있는 문제를 생각하자. 즉 Fig. 1과 같은 좌표계에서 방향이 반대이고 크기가 동일한 집중전단하중 Q 및 Λ 가 각각 $x=0, y=\pm l$ 인 표면과 $x=h$ 인 균열상하면에 작용하는 경우를 보자. 이와같은 문제는 Fig. 1과 같은 좌표계에서 $x=0, y=l$ 인 표면과 $x=h$ 인 균열상면에 각각 집중전단하중이 작용하는 문제와 $x=0, y=-l$ 인 표면과 $x=h$ 인 균열하면에 각각 집중하중이 작용하는 문제를 중첩한 바와 같으므로 식(28)을 사용하여 중첩하면 다음의 결과를 얻는다.

$$K_{III} = \frac{2}{\sqrt{\pi b}} \left(\frac{Qb}{\sqrt{l^2 + b^2}} + \frac{\Lambda b}{\sqrt{b^2 - h^2}} \right) \quad (30)$$

식(30)의 결과는 $\mu_1 = \mu_2$ 인 균질한 재료에 자기평형을 이루는 하중이 작용할 때 응력확대계수와 동일함을 보인다.⁽²⁴⁾ Sih⁽¹⁷⁾는 비평면 전단하중이 작용하는 계면균열문제에 대하여 응력확대계수는 균질한 재료에 대한 결과와 동일함을 제시한 바 있다. 무한 고체물에 내재된 계면균열 문제에 대해서는 이미 해석된 바 있으며, 이때 얻은 응력확대계수의 결과를 보면 가해진 하중이 자기평형이 유지되는 경우에 한하여 Sih의 결과가 유지됨을 보인 바 있다.⁽²⁵⁾ 실제로 Sih⁽¹⁷⁾가 해석한 문제를 보면 자기평

형이 유지되고 있는 문제임을 언급해 둔다. 본 문제는 계면방향 표면균열문제로서 균열의 기하학적 형태로 볼 때 무한 고체물과는 다른 문제라고 하겠으나, 응력확대계수에 관한 정성적인 결과는 무한 고체물에서 얻은 결과와 잘 일치할 보인다. 다시말하여 고체물에 가해진 비평면 하중이 자기평형을 이루고 있다면 응력확대계수는 균질재료에 대한 결과와 일치할 보이고, 한편 자기평형이 유지되지 않는 비평면 하중이라면 이 때의 응력확대계수는 계면에 인접한 두재료의 성질에 의존하고 있다.

식(28)은 균열의 기하학적 모양이 Fig. 1과 같은 계면방향 표면균열문제에 대한 그린함수가 되는 바, Fig. 1과 같은 고체물의 표면 및 균열면에 비평면 하중이 임의로 작용하고 있다면 이 때 응력확대계수는 식(28)을 가지고 간단한 적분을 수행함으로써 그 해석이 용이할 것이다. 그러면 식(28)로부터 고체물의 표면 및 균열면에 임의로 분포하는 하중 문제에 대한 응력확대계수가 결정될 수 있음을 보이고자 한다. 균열의 모양과 재료의 성질은 Fig. 1과 동일하고, 다만 비평면 집중하중 Q 대신에 고체물 표면인 $x=0$ 인 면에는 $\sigma_{xz}(x=0, y)$ 인 임의의 분포응력이 작용하고 또한 비평면 집중하중 Λ 대신에 $0 < x < b$ 인 균열상하면에는 $\sigma_{yz}(x, y=0^+)$ 및 $\sigma_{yz}(x, y=0^-)$ 인 임의의 분포응력이 작용한다고 하자. 이러한 문제는 고체물표면과 균열면을 따라 연속적으로 중첩한 문제와 같으므로, 이때의 응력확대계수 K_{III} 는 식(28)에 보인 결과식을 가지고 중첩함으로써 다음과 같은 적분꼴로 구성된다.

$$K_{III} = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{1}{\sqrt{\pi b}} \left[\int_0^\infty \frac{-\sigma_{xz}(x=0, y)}{\sqrt{y^2 + b^2}} bdy + \int_0^b \frac{-\sigma_{yz}(x, y=0^+)}{\sqrt{b^2 - x^2}} bdx \right] + \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \frac{1}{\sqrt{\pi b}} \left[\int_{-\infty}^0 \frac{\sigma_{xz}(x=0, y)}{\sqrt{y^2 + b^2}} bdy + \int_0^b \frac{-\sigma_{yz}(x, y=0^-)}{\sqrt{b^2 - x^2}} bdx \right] \quad (31)$$

임의의 분포하중 $\sigma_{xz}(x=0, y)$ 및 $\sigma_{yz}(x, y=0^+)$, $\sigma_{yz}(x, y=0^-)$ 이 주어진다면 식(31) 우변의 적분을 수행함으로써 응력확대계수는 용이하게 얻어진다. 그 실례로서 기존 연구자는 다음과 같은 분포하중에 대한 문제를 해석하고 있다.⁽²⁴⁾ 즉 분포하중을 보면 고체물표면에는 하중이 작용하지 않고 다만 $0 < x < b$ 인 균열상 하면에 자기평형을 이루는 분포하중이 작용하는 문제이다.

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}(x=0, y) &= 0, \\ \sigma_{yz}(x, y=0^+) &= \sigma_{yz}(x, y=0^-) = \\ & -A\left(\frac{x}{b}\right)^\beta, \quad (\beta > -1, 0 < x < b) \end{aligned} \quad (32)$$

이와같은 문제의 응력확대계수는 식(32)를 식(31)우변에 대입하여 적분식을 평가함으로써 다음과 같이 용이하게 계산된다.

$$K_{III} = A\sqrt{b} \frac{\Gamma(\frac{\beta+1}{2})}{\Gamma(\frac{\beta}{2}+1)} \quad (33)$$

식(32)와 같은 분포하중은 자기평형을 이루는 하중인 바 식(30)의 설명에서 보인바와 같이 계면에 인접한 재료에 무관하게 균질한 재료와 동일한 결과가 됨을 예측할 수 있고, 실제로 결과식(33)을 보면 재료의 성질에 무관함을 보인다. 분포하중이 식(32)와 같고 $\mu_1 = \mu_2$ 인 균질재료에 대한 응력확대계수는 기존연구자에 의하여 계산되었는 바 그 결과는 식(33)과 잘 일치하고 있다.⁽²⁴⁾

5. 결 론

고체물의 표면과 계면이 수직으로 만나는 정점에서 계면방향으로 유한크기의 표면균열이 형성된 문제를 해석하였다. 이 때 가해진 하중은 비평면 전단하중으로 하였고, 고체물 표면 및 균열면에 임의로 분포하는 비평면 하중문제에 대해서도 적용이 되는 그린함수를 구하고자 표면 및 균열면의 임의의 한점에 각각 집중전단하중이 작용하는 문제를 택하였다. 해석방법은 적분변환 방법인 Mellin 변환을 사용하였는 바, Mellin 변환 방법은 본 연구와 관련된 기하학적 모양의 균열문제를 해석함에 있어서 유용한 기법임을 알 수 있었다. 이로부터 폐형으로 구성되는 응력확대계수를 얻었다. 이때 균열 선단주위의 응력은 기존 연구자의 결과와 같이 $r^{-1/2}$ 인 특이성이 유지되었다.

특히 응력확대계수는 하중의 분포모양에 따라 다른 특성을 보였다. 다시말하여 고체물표면이나 균열면에 가해진 비평면 하중이 자기평형을 유지하고 있다면 계면에 인접한 두 재료의 성질에 무관함을 알 수 있었고, 한편 자기평형이 유지되지 않는다면 이 때의 응력확대계수는 계면에 인접한 두 재료의 성질에 의존함을 보였다. 이와 같은 특성은 기존의 무한 고체물에 내재된 계면균열문제의 해석결과와

동일한 바, 이로부터 무한고체물 및 본 연구에서 해석의 대상으로 삼은 균열문제에 대해서는 적어도 이와같은 특성이 유지됨을 알 수 있었다.

후 기

본 연구는 1992년도 영남대학교 교비 학술연구조성비 지원에 의해 이루어졌으며 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Lu, M.C. and Erdogan, F., 1983, "Stress Intensity Factors in Two Bonded Elastic Layers Containing Cracks Perpendicular to and on the Interface I. Analysis," Engng Fracture Mech., Vol. 18, pp. 491~506.
- (2) He, M.Y. and Hutchinson, J.W., 1989, "Crack Deflection at an Interface Between Dissimilar Elastic Materials," Int. J. Solids Structures, Vol. 25, pp. 1053~1067.
- (3) 이강용, 설창원, 1991, "수직 균일 열유동하에 있는 접합 계면 균열의 열응력세기계수 결정", 대한기계학회논문집, 제15권, 제1호, pp. 201~208.
- (4) 이갑래, 조상봉, 최용식, 1991, "이방성 이중재료의 접합계면 균열에 대한 응력확대계수 결정에 관한 연구", 대한기계학회논문집, 제15권 제3호, pp. 887~897.
- (5) 박재학, 1991, "접합된 탄성층 내에 존재하는 균열의 응력강도계수", 대한기계학회논문집, 제15권 제5호, pp. 1538~1550.
- (6) 서창민, 김영호, 1990, "고온하 304스테인리스강의 작은 표면균열의 성장거동에 관한 연구", 대한기계학회논문집, 제14권 제1호, pp. 87~95.
- (7) 이강용, 심관보, 1990, "열충격 응력세기계수와 파괴실험", 대한기계학회논문집, 제14권 제1호, pp. 130~137.
- (8) 김재호, 김석삼, 박중환, 1990, "반무한 탄성체의 헤르츠 접촉하의 경사진 표면균열의 전파거동", 대한기계학회논문집, 제14권 제3호, pp. 624~635.
- (9) Erdogan, F. and Gupta, G.D., 1975, "Bonded Wedges With an Interface Crack under Anti-

- Plane Shear," *Int. Journ. of Fracture*, Vol. 11, pp. 583~593.
- (10) Bogy, D.B., 1968, "Edge-Bonded Dissimilar Orthogonal Elastic Wedges under Normal and Shear Loading," *J. Appl. Mech.*, Vol. 35, pp. 460~466.
- (11) Hein, V.L. and Erdogan, F., 1971, "Stress Singularities in a Two-Material Wedge," *Int. Journ. of Fracture*, Vol. 7, pp. 317~330.
- (12) Bogy, D.B., 1971, "Two Edge-Bonded Elastic Wedges of Different Materials and Wedge Angles under Surface Traction," *J. Appl. Mech.*, Vol. 38, pp. 377~386.
- (13) Gupta, G.D. and Erdogan, F., 1974, "The Problem of Edge Cracks in an Infinite Strip," *J. Appl. Mech.*, Vol. 41, pp. 1001~1006.
- (14) England, A.H., 1965, "A Crack Between Dissimilar Media," *J. Appl. Mech.*, Vol. 32, pp. 400~402.
- (15) Rice, J.R., 1988, "Elastic Fracture Mechanics Concepts for Interfacial Cracks," *J. Appl. Mech.* Vol. 55, pp. 98~103.
- (16) Erdogan, F., 1966, "Elastic-Plastic Anti-Plane Problems for Bonded Dissimilar Media Containing Cracks and Cavities," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 2, pp. 477~465.
- (17) Sih, G.C. and Chen, E.P., 1981, "Interface Cracks in Bimaterial Systems," *Mechanics of Fracture*, G.C. Sih, ed., Vol. 6, Martinus Nijhoff, Hauge, pp. 117~177.
- (18) Bassani, J.L. and Erdogan, F., 1979, "Stress Intensity Factors in Bonded Half Planes Containing Inclined Cracks and Subjected to Antiplane Shear Loading," *Int. Journ. of Fracture*, Vol. 15, pp. 145~158.
- (19) Muskhelishvili, N.I., 1963, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff, Groningen.
- (20) Noble, B., 1958, *Methods Based on the Wiener-Hopf Technique*, Pergamon Press, London.
- (21) Choi, S.R. and Earmme, Y.Y., 1990, "Analysis of a Kinked Crack in Anti-Plane Shear," *Mech. Materials*, Vol. 9, pp. 195~204.
- (22) Choi, S.R. and Earmme, Y.Y., 1991, "Green's Function of Semi-Infinite Kinked Crack under Anti-Plane Shear," *Int. Journ. of Fracture*, Vol. 51, RCR3-11.
- (23) Carrier, G.F., Krook, M. and Pearson, C.E., 1966, *Functions of a Complex Variable*, McGraw-Hill, New York.
- (24) Tada, H., Paris, P. and Irwin, G., 1973, *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Del Research Corp., Hellertown.
- (25) 최성렬, 강기주, 1991, "반무한 직선 계면균열문제에 관한 그린함수," *대한기계학회논문집*, 제15권, 제5호, pp. 1530~1537.