

〈論 文〉

질량변경에 따른 연속계의 동특성변화 예측

이정윤* · 최상렬* · 박천권** · 오재응*** · 정석주****

(1992년 5월 16일 접수)

Prediction of Dynamic Characteristics of Continuous Systems due to the Mass Modification

Jung Yoon Lee, Sang Ryul Choe, Chun Kwon Park, Jae Eung Oh and Suk Choo Chung

Key Words : Natural Frequency(고유진동수), Vibrational Mode(진동모드), Transfer Function(전달함수), Generalized Mass(일반질량), Sensitivity Analysis(감도해석)

Abstract

This paper derives the generalized mass to find dynamic characteristics and its derivatives of a continuous system. And a new sensitivity analysis method is presented by using the amount of change of generalized mass and vibrational mode caused by the variation of lumped and distributed mass. In this paper, to get or detect appropriate results, cantilever beam and stepped beam are used. Deviations of sensitivity coefficient, natural frequency, vibrational mode and transfer function are calculated as result, and compared with the theoretical exact values.

기 호 설 명

E : 종탄성계수 (N/cm²)
 I : 관성모멘트 (cm⁴)
 Y_i : i 번째 점의 횡방향 변위
 ϕ_i : i 번째 점의 기울기
 M_i : i 번째 점의 모멘트
 V_i : i 번째 점의 전단력
 $\{Z\}_i$: i 번째 요소의 상태벡터
 A : 단면적 (cm²)
 L : 요소의 길이 (cm)
 ω : 고유 진동수 (Hz)
 m_{ij} : i, j 모드의 일반질량
 k_{ij} : i, j 모드의 일반강성

a_{ij} : 감도계수
 H_{ij} : 전달함수

1. 서 론

구조물의 설계나 해석에 있어 구조물의 동특성을 정확히 파악하는 것은 대단히 중요하다. 그러나 종래의 구조해석은 주어진 동특성을 얻기 위해서는 설계자의 경험에 의존하였으며 시행착오에 의한 많은 시간과 노력이 필요하였다.

감도해석은 이 문제점을 개선하기 위한 수단으로 치수나 재료의 변경 등에 대한 동특성의 변화율을 구하는 것이다. 감도해석을 행하면 어느 부분을 수정하는 것이 동특성개선에 가장 효과적인지를 알 수 있다.

이에 대한 연구로 Fox의 모드법,⁽¹⁾ Nelson의 방

*정회원, 한양대학교 정밀기계공학과

**정회원, 삼성전자(주)

***정회원, 한양대학교 자동차공학과

****정회원, 서울산업대학 기계설계학과

법,⁽²⁾ Wang의 개선된 방법^(3,4) 등 많은 연구자들이 유한요소법을 사용하여 활발히 진행되고 있으나 연속체의 경우는 연구가 미미한 실정으로 주로 부가 질량을 부착한 후 동특성을 재해석하여 감도를 구하는 방법^(5,6)이 사용되고 있다.

본 연구에서는 이러한 점을 개선하기 위해 연속체의 진동모드를 구하여 일반질량(generalize mass)을 유도하였으며 집중, 분포질량 변경에 따른 일반질량 변화량을 산출하여 감도계수를 구하는 새로운 연속체 감도해석 방법을 제안하였고, 타당성을 검증하기 위해 외팔보, 계단보에 적용하여 감도계수, 고유진동수, 진동모드, 전달함수의 변화량을 예측하고 이론치와 비교하였다. Fig. 1은 본 연구의 흐름도를 나타낸다.

2. 이 론

2.1 경계조건을 이용한 진동모드 계산

보는 Euler보로 가정하였으며 Fig. 2에 나타낸 요소 양단의 처짐과 기울기를 이용하여 진동모드를 구하였다.

미분방정식은

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = -\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1)$$

이며 EI는 굽힘강성, ρ는 밀도, A는 단면적이다.

(1)식의 i번째 진동모드를 y_i라 하면

$$y_i(z) = C_1 \cos(\lambda_i z) + C_2 \sin(\lambda_i z) + C_3 \cosh(\lambda_i z) + C_4 \sinh(\lambda_i z) \quad (2)$$

여기서 Fig. 2에 나타낸 경계조건

$$\begin{aligned} y_i(0) &= y_n, & y_i(\ell_n) &= y_{n+1}, \\ y_i'(0) &= \phi_n, & y_i'(\ell_n) &= \phi_{n+1} \end{aligned} \quad (3)$$

을 (2)식에 대입하면

$$\begin{aligned} C_1 &= (b_1 a_4 - b_2 a_2) / (a_1 a_4 - a_2 a_3) \\ C_2 &= (a_1 b_2 - a_3 b_1) / (a_1 a_4 - a_2 a_3) \\ C_3 &= y_n - C_1 \\ C_4 &= (\phi_n - \lambda_i C_2) / \lambda_i \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos(\lambda_i \ell_n) - \cosh(\lambda_i \ell_n), \\ a_2 &= -\lambda_i (\sin(\lambda_i \ell_n) - \sinh(\lambda_i \ell_n)) \\ a_3 &= -\lambda_i (\sin(\lambda_i \ell_n) + \sinh(\lambda_i \ell_n)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= \lambda_i (\cos(\lambda_i \ell_n) - \cosh(\lambda_i \ell_n)) \\ b_1 &= y_{n+1} - y_n \cosh(\lambda_i \ell_n) - \phi_n / \lambda_i \sinh(\lambda_i \ell_n) \\ b_2 &= \phi_{n+1} - \lambda_i y_n \sinh(\lambda_i \ell_n) - \phi_n \cosh(\lambda_i \ell_n) \end{aligned}$$

이다.

2.2 진동모드를 이용한 일반질량계산

Fig. 2의 n번째 요소에 대한 i차 모드의 일반질량을 m_{ii,n}이라고 하고 전체요소 개수를 q, 전체요소에 대한 i차 모드의 일반질량을 m_{ii}라 하면

$$m_{ii,n} = \int_0^{\ell_n} m(z) y_i(n)^2 dz \quad (4)$$

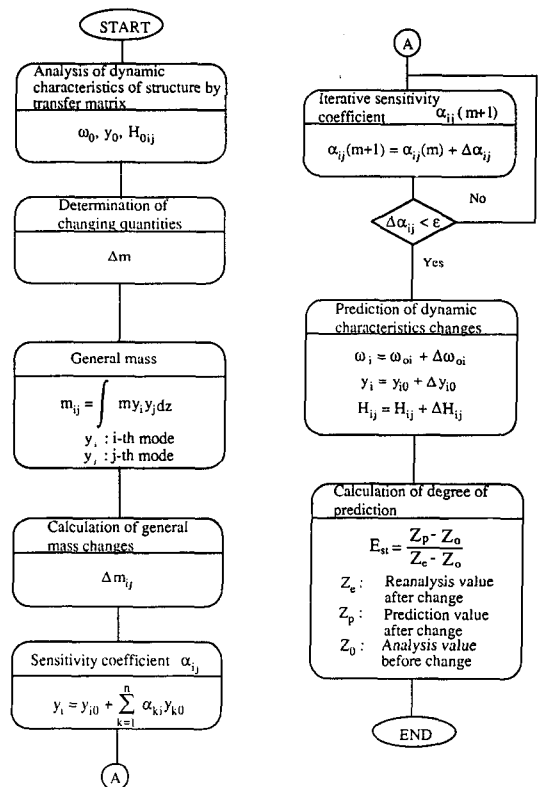


Fig. 1 Flow chart of sensitivity analysis of continuous structure due to mass change

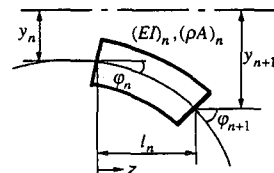


Fig. 2 Definition of coordinate and variables for a beam

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\text{in}} m(z) (C_1 \cos \lambda_i z \\
 &+ C_2 \sin \lambda_i z + C_3 \cosh \lambda_i z + C_4 \sinh \lambda_i z)^2 dz \\
 &= \int_0^{\text{in}} m(z) (C_1^2 \cos^2 \lambda_i z + C_2^2 \sin^2 \lambda_i z \\
 &+ C_3^2 \cosh^2 \lambda_i z + C_4^2 \sinh^2 \lambda_i z \\
 &+ 2C_1 C_2 \cos \lambda_i z \sin \lambda_i z \\
 &+ 2C_1 C_3 \cos \lambda_i z \cosh \lambda_i z \\
 &+ 2C_1 C_4 \cos \lambda_i z \sinh \lambda_i z \\
 &+ 2C_2 C_3 \sin \lambda_i z \cosh \lambda_i z \\
 &+ 2C_2 C_4 \sin \lambda_i z \sinh \lambda_i z \\
 &+ 2C_3 C_4 \cosh \lambda_i z \sinh \lambda_i z) dz
 \end{aligned}$$

(5)

여기서 $m(z) = \rho_n A_n$

$$\begin{aligned}
 m_{ii,n} = & \rho_n A_n [C_1^2 / 2 \{ N + \sin(\lambda_i N) \cos(\lambda_i N) / \lambda_i \} \\
 & + C_2^2 / 2 \{ \ell_n - \sin(\lambda_i \ell_n) \cos(\lambda_i \ell_n) / \lambda_i \} \\
 & + C_3^2 / 2 \{ \ell_n + \sinh(\lambda_i \ell_n) \cosh(\lambda_i \ell_n) / \lambda_i \} \\
 & + C_4^2 / 2 \{ -\ell_n + \sinh(\lambda_i \ell_n) \cosh(\lambda_i \ell_n) / \lambda_i \} \\
 & - C_1 C_2 \{ \cos(\lambda_i \ell_n)^2 - \sin(\lambda_i \ell_n)^2 - 1 \} / (2\lambda_i) \\
 & + C_1 C_3 \{ \sinh(\lambda_i \ell_n) \cos(\lambda_i \ell_n) \\
 & + \cosh(\lambda_i \ell_n) \sin(\lambda_i \ell_n) \} / \lambda_i \\
 & + C_1 C_4 \{ \cosh(\lambda_i \ell_n) \cos(\lambda_i \ell_n) \\
 & + \sinh(\lambda_i \ell_n) \sin(\lambda_i \ell_n) - 1 \} / \lambda_i \\
 & + C_2 C_3 \{ \sinh(\lambda_i \ell_n) \sin(\lambda_i \ell_n) \\
 & - \cosh(\lambda_i \ell_n) \cos(\lambda_i \ell_n) + 1 \} / \lambda_i \\
 & + C_2 C_4 \{ \cosh(\lambda_i \ell_n) \sin(\lambda_i \ell_n) \\
 & + \sinh(\lambda_i \ell_n) \cos(\lambda_i \ell_n) \} / \lambda_i \\
 & + C_3 C_4 \{ \cosh(\lambda_i \ell_n)^2 + \sinh(\lambda_i \ell_n)^2 - 1 \} / (2\lambda_i)]
 \end{aligned}$$

$$m_{ii} = m_{ii,1} + m_{ii,2} + \dots + m_{ii,q-1} + m_{ii,q} \quad (7a)$$

$$m_{ii} = \sum_{n=1}^q m_{ii,n} \quad (7b)$$

2.3 질량변경에 따른 연속계의 감도해석

(1) 집중질량 부가에 의한 일반질량 변화

부가질량이 없을때 일반질량, 고유진동수, 고유모드를 m_{oi} , ω_{oi} , y_{oi} 라 하고 부가 질량 Δm 이 있을때 일반질량, 고유진동수, 고유모드를 m_{ii} , ω_i , y_i 라 하자. Fig. 3과 같이 임의의 d 점에 집중질량 Δm 이 부가되었을 때 질량과 모드변화를 동시에

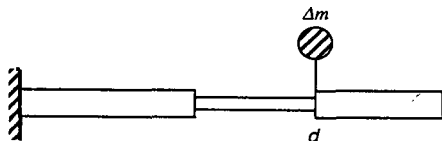


Fig. 3 Model of beam attaching concentrated mass

고려하면 일반질량

$$\begin{aligned}
 m_{ii} &= \int_0^1 m(z) y_i^2 dz \quad (8) \\
 &= \int_0^1 m_o(z) (y_{oi} + \Delta y_{oi})^2 dz + \Delta m \{ y_{oi}(d) \\
 &+ \Delta y_{oi}(d) \}^2 \\
 &= \int_0^1 m_o(z) y_{oi}^2 dz + 2 \int_0^1 m_o(z) y_{oi} \Delta y_{oi} dz \\
 &+ \int_0^1 m_o(z) \Delta y_{oi}^2 dz + \Delta m \{ y_{oi}(d) + \Delta y_{oi}(d) \}^2 \quad (9)
 \end{aligned}$$

여기서 일반질량을 1로 정규화하고 진동모드변화를 진동모드의 선형결합으로 표시될 수 있다고 가정⁽¹⁾하면 $m_{ii} = m_{oii} = 1$, $m_{ij} = 0$ 이고

$$\Delta y_i = \sum_{k=1}^n a_{ki} y_{ok} \quad (10a)$$

식(10)을 식(9)에 대입하면

$$\begin{aligned}
 1 &= 1 + 2a_{ii} + \sum_{k=1}^n a_{ki}^2 + \Delta m \{ y_{oi}(d) \\
 &+ \sum_{k=1}^n a_{ki} y_{ok}(d) \}^2
 \end{aligned} \quad (10b)$$

그러므로

$$\begin{aligned}
 a_{ii} &= - \left[\frac{\Delta m}{2} \{ y_{oi}(d) + \sum_{k=1}^n a_{ki} y_{ok}(d) \}^2 \right. \\
 &+ \left. \sum_{k=1}^n a_{ki}^2 / 2 \right]
 \end{aligned} \quad (11)$$

질량과 모드변화에 의한 일반질량 행렬 행렬요소의 변화

$$\begin{aligned}
 m_{ij} &= \int_0^1 m(z) y_i y_j dz \quad (12) \\
 &= \int_0^1 m_o(z) (y_{oi} + \Delta y_{oi})(y_{oj} + \Delta y_{oj}) dz \\
 &+ \Delta m \{ y_{oi}(d) + \Delta y_{oi}(d) \} \{ y_{oj}(d) + \Delta y_{oj}(d) \} \\
 &= m_{oij} + a_{ij} m_{oii} + a_{ji} m_{ojj} + \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} m_{okk} \\
 &+ \Delta m \{ y_{oi}(d) + \sum_{k=1}^n a_{ki} y_{ok}(d) \} \\
 &\{ y_{oj}(d) + \sum_{k=1}^n a_{kj} y_{ok}(d) \}
 \end{aligned}$$

여기서 $m_{ij} = m_{oij} = 0$, $m_{oii} = m_{ojj} = 1$ 이므로

$$\begin{aligned}
 a_{ij} + a_{ji} &= - \Delta m \{ y_{oi}(d) + \sum_{k=1}^n a_{ki} y_{ok}(d) \} \\
 &\{ y_{oj}(d) + \sum_{k=1}^n a_{kj} y_{ok}(d) \} - \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj}
 \end{aligned} \quad (13)$$

모드변화에 의한 일반강성은 변화가 없으므로

$$k_{ii} = \int_0^1 EI(z) y_i''^2 dz$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 EI_0(z) (y_{oi}'' + \Delta y_{oi}'')^2 dz \\
 &= k_{oi} + 2\alpha_{ii}k_{oi} + \sum_{k=1}^n k_{okk}\alpha_{ki}^2 \quad (14)
 \end{aligned}$$

여기서 $k_{ii} = \omega_i^2$, $k_{oi} = \omega_{oi}^2$ 이므로

$$\omega_i^2 = \omega_{oi}^2(1 + 2\alpha_{ii}) + \sum_{k=1}^n \omega_{ok}^2 \alpha_{ki}^2 \quad (15)$$

모드변화에 의한 일반 강성 행렬 요소의 변화

$$\begin{aligned}
 k_{ij} &= \int_0^1 EI(z) y_i'' y_j'' dz \quad (16) \\
 &= \int_0^1 EI_0(z) (y_{oi}'' + \Delta y_{oi}'') (y_{oj}'' + \Delta y_{oj}'') dz \\
 &= k_{oj} + \alpha_{ij}k_{oi} + \alpha_{ji}k_{oj} + \sum_{k=1}^n k_{okk}\alpha_{ki}\alpha_{kj}
 \end{aligned}$$

여기서 $k_{ij} = k_{oj} = 0$ 이므로

$$\omega_{oi}^2 \alpha_{ij} + \omega_{oj}^2 \alpha_{ji} = - \sum_{k=1}^n \omega_{ok}^2 \alpha_{ki} \alpha_{kj} \quad (17)$$

(2) 분포질량 부가에 의한 일반질량의 변화

Fig. 4와 같이 분포질량 Δm 이 a, b 점 사이에 분포되어 있다고 하고 질량과 모드변화를 동시에 고려하면 일반질량 m_{ii}

$$\begin{aligned}
 m_{ii} &= \int_0^1 m(z) y_i^2 dz \quad (18) \\
 &= \int_0^1 m_0(z) (y_{oi} + \Delta y_{oi})^2 dz + \int_a^b \Delta m (y_{oi} + \Delta y_{oi})^2 dz
 \end{aligned}$$

여기서 $\int_a^b \Delta m y_{oi} y_{oj} dz = \Delta m_{ij}$, $\Delta y_{oi} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} y_{ok}$ 로 나타내면

$$\begin{aligned}
 m_{ii} &= m_{oi} + 2\alpha_{ii}m_{oi} + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}^2 m_{oi} + \Delta m_{ii} \\
 &\quad + 2 \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta m_{ik} + \sum_{p=1}^n \alpha_{pi} \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta m_{pk} \\
 \alpha_{ii} &= \frac{-1}{2} \left[\sum_{k=1}^n \alpha_{ki}^2 + \Delta m_{ii} + 2 \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta m_{ik} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{p=1}^n \alpha_{pi} \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta m_{pk} \right] \quad (19)
 \end{aligned}$$

질량과 모드변화에 의한 일반질량 행렬요소의 변화

$$m_{ij} = \int_0^1 m(z) y_i y_j dz \quad (20)$$

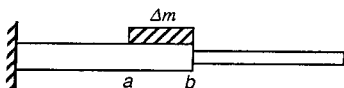


Fig. 4 Model of beam attaching distributed mass

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 m_0(z) (y_i + \Delta y_{oi}) (y_{oj} + \Delta y_{oj}) dz \\
 &\quad + \int_a^b \Delta m (y_{oi} + \Delta y_{oi}) (y_{oj} + \Delta y_{oj}) dz \\
 &= m_{oj} + \alpha_{ij}m_{oi} + \alpha_{ji}m_{oj} + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \alpha_{kj} m_{okk} \\
 &\quad + \Delta m_{ij} + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta m_{ik} \\
 &\quad + \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} \Delta m_{jk} + \sum_{k=1}^n \alpha_{pi} \sum_{p=1}^n \alpha_{kj} \Delta m_{pk}
 \end{aligned}$$

여기서 $m_{ij} = m_{oj} = 0$, $m_{oi} = m_{oj} = 1$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \alpha_{ij} + \alpha_{ji} &= - \left\{ \Delta m_{ij} + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta m_{ik} + \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} \Delta m_{jk} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{p=1}^n \alpha_{pi} \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} \Delta m_{pk} \right\} - \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \alpha_{kj} \quad (21)
 \end{aligned}$$

모드변화에 의한 일반강성의 변화

$$k_{ii} = \int_0^1 EI(z) y_i''^2 dz \quad (22)$$

강성은 변화가 없으므로 과정이 집중질량 경우와 동일하다.

$$\omega_i^2 = \omega_{oi}^2(1 + 2\alpha_{ii}) + \sum_{k=1}^n \omega_{ok}^2 \alpha_{ki}^2 \quad (23)$$

$$k_{ij} = \int_0^1 EI(z) y_i'' y_j'' dz \quad (24)$$

$$\omega_{oi}^2 \alpha_{ij} + \omega_{oj}^2 \alpha_{ji} = - \sum_{k=1}^n \omega_{ok}^2 \alpha_{ki} \alpha_{kj} \quad (25)$$

(3) 감도계수 해석

부가질량에 의한 진동모드변화가 없다고 가정하여 1차 감도계수 α_{ij} 를 구하고 이것을 이용하여 집중질량의 경우 (11), (13), (17)식에, 분포질량의 경우 (19), (21), (25)식에 의해 2차 α_{ij} 를 구하였고 이 작업을 반복하였다.

(a) 집중질량의 경우

(11)식으로부터

$$\alpha_{ii}(1) = - \frac{\Delta m y_{oi}^2(d)}{2} \quad (26)$$

(13)식과 (17)식으로부터

$$\alpha_{ij}(1) = \frac{\Delta m y_{oi}(d) y_{oj}(d)}{\{1 - (\omega_{oi}^2 / \omega_{oj}^2)\}} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{ii}(m+1) &= - \left[\frac{\Delta m}{2} \left\{ y_{oi}(d) + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}(m) y_{ok}(d) \right\}^2 \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}^2(m) / 2 \right] \quad (28)
 \end{aligned}$$

$$\alpha_{ij}(m+1) = \frac{\omega_{oj}^2}{\omega_{oi}^2 - \omega_{oj}^2} \left[\Delta m \left\{ y_{oi} \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=1}^n a_{ki}(m) \\
 y_{ok} & \left\{ y_{oj} + \sum_{k=1}^n a_{kj}(m) y_{ok} \right\} \\
 & + \sum_{k=1}^n a_{ki}(m) a_{ki}(m) \Big\} \\
 & + \frac{1}{\omega_{oi}^2 - \omega_{oj}^2} \sum_{k=1}^n \omega_{ok}^2 a_{ki}(m) a_{kj}(m) \quad (29)
 \end{aligned}$$

여기서 $\alpha_{ij}(m)$ 은 m 번 반복했을 때 감도 계수이다.

(b) 분포질량의 경우

(19)식으로부터

$$\alpha_{ii}(1) = -\frac{\Delta m_{ii}}{2} \quad (30)$$

(21)식과 (25)식으로부터

$$\alpha_{ij}(1) = \frac{\Delta m_{ij}}{1 - \left\{ \frac{\omega_{oi}^2}{\omega_{oj}^2} \right\}} \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{ii}(m+1) & = -\frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}^2(m) + \Delta m_{ii} + 2 \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \right. \\
 & \quad \left. (m) \Delta m_{ik} + \sum_{p=1}^n \alpha_{pi}(m) \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}(m) \Delta m_{pk} \right\} \\
 \alpha_{ij}(m+1) & = \frac{\omega_{oj}^2}{\omega_{oi}^2 - \omega_{oj}^2} \left\{ \Delta m_{ij} + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}(m) \Delta m_{ik} \right. \\
 & \quad + \sum_{k=1}^n \alpha_{kj}(m) \Delta m_{jk} \\
 & \quad + \sum_{p=1}^n \alpha_{pi}(m) \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}(m) \Delta m_{pk} \\
 & \quad \left. + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}(m) a_{kj}(m) \right\} \\
 & + \frac{1}{\omega_{oi}^2 - \omega_{oj}^2} \sum_{k=1}^n \omega_{ok}^2 a_{ki}(m) a_{kj}(m) \quad (33)
 \end{aligned}$$

여기서 $\alpha_{ii}(1)$, $\alpha_{ij}(1)$ 의 결과는 유한요소법의 Fox 이론⁽¹⁾과 유사함을 알 수 있다.

(4) 고유진동수 변화

(15)식과 (23)식으로부터

$$\omega_i^2 = \omega_{oi}^2 (1 + 2\alpha_{ii}) + \sum_{k=1}^n \omega_{ok}^2 \alpha_{ki}^2 \quad (34)$$

(5) 진동모드 변화

(10)식으로부터

$$y_i = y_{oi} + \sum_{k=1}^n a_{ki} y_{ok} \quad (35)$$

여기서 y_i 은 m 번 반복했을 때의 진동 모드이다.

(6) 전달함수(accelerance)의 변화예측

$$H_{ij}(\omega) = \frac{y_j}{F} = \sum_{k=1}^n \frac{\omega^2 y_i y_j}{-\omega^2 + \omega_k^2} \quad (36)$$

여기서 $H_{ij}(\omega)$ 은 i 점을 가진하고 j 점을 측정했을 때의 전달함수이다.

3. 적용예

위에서 해석한 이론을 이용하여 외팔보 및 계단보에 집중질량과 분포질량이 변경될 때 동특성변화를 구하였으며 그 타당성을 검증하기 위해 재해석치와 비교하였다.

3.1 외팔보

Fig. 5는 외팔보는 모델을 나타낸다. 등간격으로 분할한 11점, 10개 요소로 좌측(절점1)을 완전히 고정했다. 길이 $l=1$, 단면적 $A=1$, 굽힘강성 $EI=1$, 질량 $m=1$ 로 무차원화 하였다. 집중질량은 9점에, 분포질량은 10요소에 전체질량의 10%를 각각 증가했을 때 감도계수, 고유진동수 진동모드, 전달함수의 변화를 검토하였으며 변화량에 대한 예측 정도 E_{st} 는 다음식으로 나타내었다.

$$E_{st} = \frac{(z_p - z_o)}{(z_e - z_o)} \quad (37)$$

여기서, z_p 는 구조변경후 예측치, z_e 는 구조변경후 이론치, z_o 는 구조변경전 이론치이며, E_{st} 가 1에 가까울수록 정도가 좋다.

3.2 계단보

Fig. 6은 계단보의 모델을 나타낸다. 2개의 단면성질이 다른 요소를 결합하여 감도해석을 하였으며, 집중질량은 2점에 분포질량은 2요소에 전체 질량의 약 15%인 8g을 부가하였을때 감도계수, 고유진동수, 진동모드, 전달함수의 변화를 검토하였다.

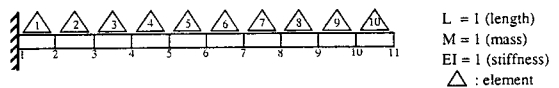


Fig. 5 Model of cantilever beam

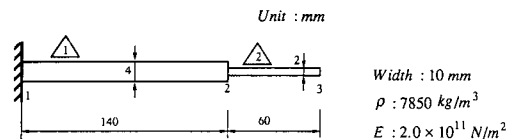


Fig. 6 Model of stepped beam

4. 결과 및 고찰

4.1 진동모드 검토

Fig. 7은 Fig. 5의 외팔보를 10개의 요소로 등분한 경우와 1개의 요소로 한 경우 일반 질량을 1로 하였을 때 식(2)를 이용하여 1차에서 4차까지의 진동모드를 나타낸 그림으로 두 경우 모두 요소분할에 관계없이 잘 일치하므로 식(2)가 타당성이 있음을 검증하였다.

4.2 질량변경에 따른 감도계수의 변화검토

Fig. 8은 외팔보에 분포질량을 부가하고 10개의 모드를 택할 때 식(10)의 감도계수 중에서 α_{12} 의 변화를 나타낸 것으로 4번 반복한 결과 일정한 값에 수렴하므로 여기서 제안한 방법이 타당함을 알 수 있다.

4.3 고유진동수 변화검토

Fig. 9은 외팔보 9점에 집중질량을 부가시 부가 질량 크기와 1차 및 4차 고유진동수 예측정도를 나타낸 그림으로 새로 제안한 고유치 예측정도가 좋

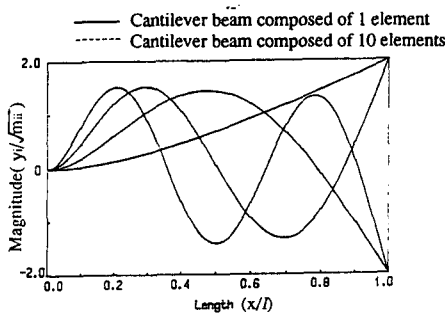


Fig. 7 Comparison of mode shape

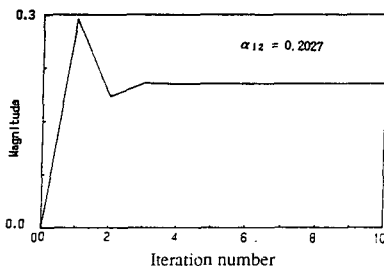


Fig. 8 Variation of sensitivity coefficient in cantilever beam

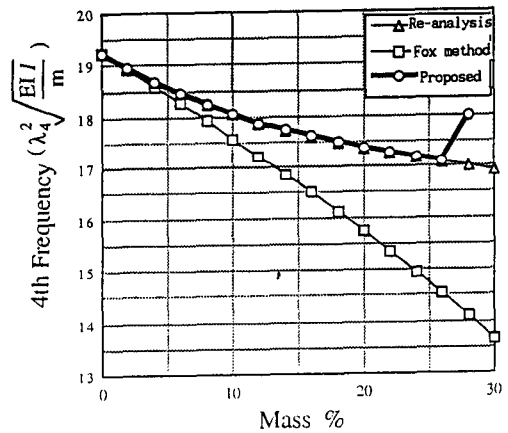
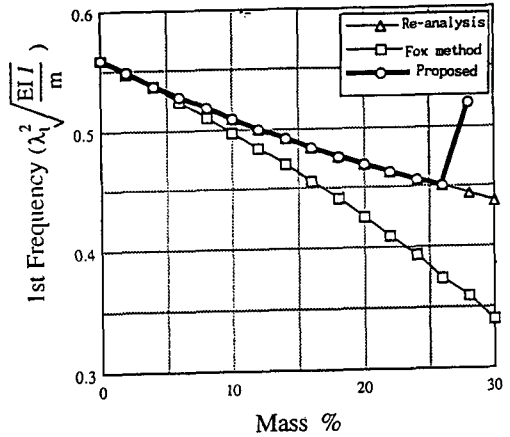


Fig. 9 Prediction of natural frequency due to added mass

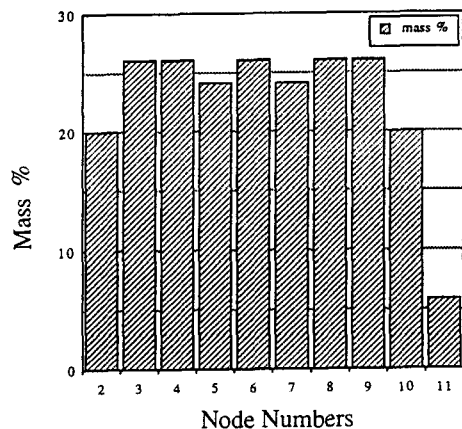


Fig. 10 An available prediction limit for adding mass in accordance with node point.

음을 알 수 있다.

부가질량이 전체질량의 26%까지는 고유치를 잘 예측하나 28%에서는 발산하며 30%에서는 값을 못 찾음을 알 수 있다. 이는 식 (28), (29)에서 α_{ij} 가 1보다 커 수렴하지 않고 발산하기 때문이다. Fox 이론의 경우 30%에서도 예측한 것은 부가질량에 의한 진동모드변화가 없다고 가정했기 때문이다. Fig. 10은 외팔보 고유진동수 예측 가능한 집중 질량부가 크기를 위치에 따라 나타낸 그림으로 2점부터 9점까지 약 24%이며 끝점일 갈수록 크기가 떨어짐을 알 수 있다. 이는 끝점이 부가질량에 따라 진동모드가 영향을 많이 받고 있기 때문이다.

Table 1은 모드수를 10개로 하였을 때 외팔보 및 계단보의 고유진동수 예측을 나타낸 것으로 4차 고유진동수까지 외팔보는 최대 0.25%, 계단보는 0.98% 오차 이내에 잘 일치함을 알 수 있다. 고차로 갈수록 오차가 조금씩 증가한 이유는 연속계의 고유진동수는 무한개이나 여기서는 퍼스날컴퓨터 용양때문에 10차 모드까지 사용하였기 때문이다.

4.4 진동모드의 변화 검토

Fig. 11은 모드수를 10개로 하였을 때 외팔보에 분포질량을 부가시 1차-4차까지 진동모드를 식 (35)를 이용하여 나타낸 그림이며 Fig. 12는 계단보에 분포질량을 부가할 때 진동모드를 나타낸 그림으로 두 경우 모두 재해석한 진동모드와 잘 일치함을 알

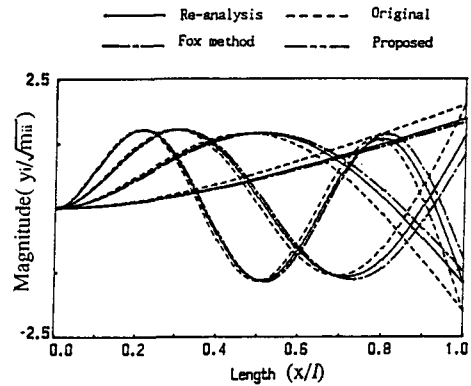


Fig. 11 Variation of mode shape due to added mass in cantilever beam

Table 1 Prediction of natural frequency due to added mass

(a) Cantilever beam (10% change)

(Hz)

mode	Concentrated mass				distributed mass			
	original	modify			original	modify		
		exact	predict	Est.		exact	predict	Est.
1st	0.55959	0.50859	0.50859	1.0000	0.55959	0.48176	0.48176	1.0000
2nd	3.50690	3.50403	3.50403	1.0000	3.50690	3.22744	3.22744	1.0000
3rd	9.81942	9.56113	9.56133	1.0008	9.81942	9.31434	9.31435	1.0000
4th	19.24142	18.04866	18.05163	1.0025	19.24142	18.51551	18.51571	1.0003

(b) Stepped beam (8g change)

(Hz)

mode	Concentrated mass				Distributed mass			
	original	modify			original	modify		
		exact	predict	Est.		exact	predict	Est.
1st	102.896	90.933	90.933	1.0000	102.896	82.691	82.691	1.0000
2nd	455.926	439.654	439.654	1.0004	455.926	394.887	394.887	1.0000
3rd	1074.782	965.305	965.478	1.0015	1074.782	953.126	953.136	1.0001
4th	2314.732	2311.130	2311.165	1.0098	2314.731	2050.170	2050.137	0.9999

수 있다.

4.5 전달함수의 변화 검토

Fig. 13(a), (b)은 외팔보에 집중질량 및 분포질량을 부착시, Fig. 14(a), (b)는 계단보에 집중질량 및 분포질량을 부착시 모드수를 10개로 하였을 때 전달함수를 재해석치와 비교한 값으로 외팔보에서는 5점 가진, 11점 측정, 계단보에서는 2점 가진, 3점 측정하였다.

Fox이론의 경우 고유진동수 오차 및 위상오차도 바뀌는 부분이 많음을 알 수 있으나 여기서 제한한 방법은 재해석치와 잘 일치함으로 타당성이 있음을 검증하였다.

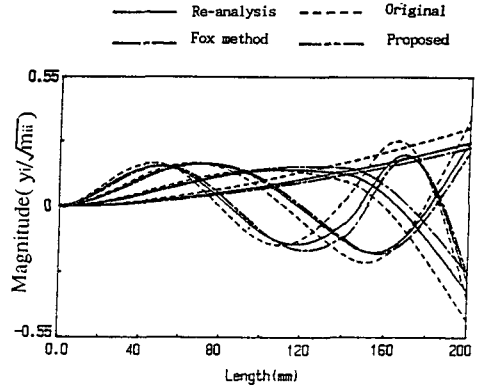


Fig. 12 Variation of mode shape due to added mass in stepped beam

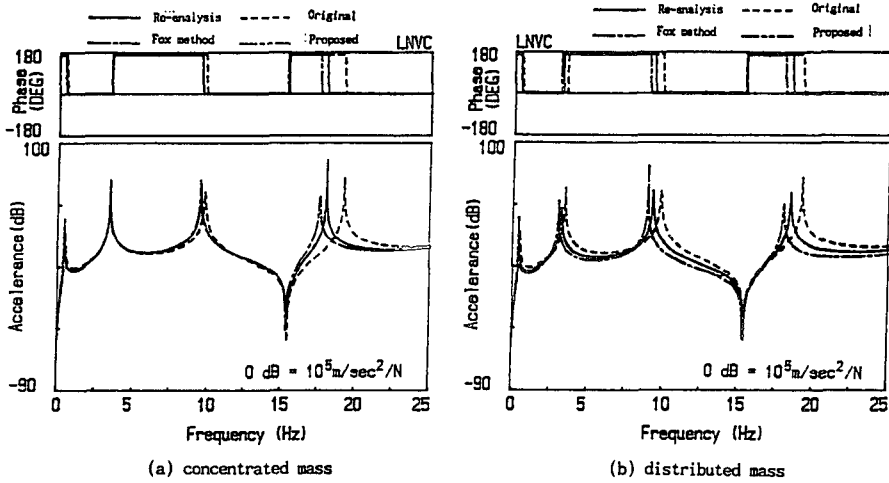


Fig. 13 Variation of transfer function due to added mass in cantilever beam

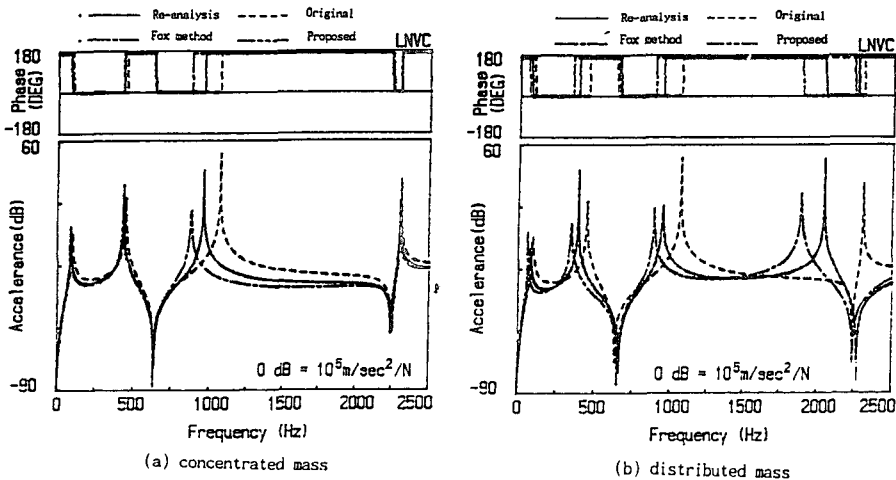


Fig. 14 Variation of transfer function due to added mass in stepped beam

5. 결 론

질량변경에 따른 연속계의 감도해석을 새로 제안한 방법을 사용하였으며 외팔보 및 계단보에 사용한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 경계조건을 이용하여 진동모드를 구한 결과 요소분할에 관계없이 진도모드가 일치함을 알 수 있었다.

(2) 감도계수는 반복할수록 일정한 값에 수렴함을 알았다.

(3) 외팔보와 계단보의 경우 10개 모드를 사용할 때 4차 고유진동수까지는 최대 0.98% 오차 이내에 잘 일치함을 알 수 있었다.

(4) 고유모드의 변화 및 전달함수도 재해석치와 잘 일치함을 알 수 있었다.

(5) 새로 제안한 질량변경에 따른 연속계 감도해석이 타당성이 있음을 알 수 있었다.

참고문헌

(1) Fox R.S. and Kapoor, M.P. 1968, "Rates of

change of Eigenvalues and eigenvectors," AIAA, Vol. 6, No. 12 pp. 2426~2429.

(2) Nelson R.B., 1976, "Simplified Calculation of Eigenvector Derivatives," AIAA, Vol. 14, No. 9, pp. 1201~1205.

(3) Wang B.P., 1985, "An Improved Approximate Method for Computing Eigenvector Derivatives," AIAA/ASME/ASCS/AHS 26th Structure, Structural Dynamics and Materials Conf.

(4) Wang, B.P. Walter, D. Pilkey, 1986, "Eigenvalue Reanalysis of Locally Modified Structures Using a Generalized Rayleigh's Method," AIAA, Vol. 24, No. 6, pp. 983~990.

(5) Kazuto Seto, Kouichi Iwanami and Yoshihiro Takita, 1985, "Vibration Control of Multi-Degree of Freedom Systems by Dynamic Absorbers," JSME, Vol. 50, No. 458 pp. 1962~1969.

(6) 이정운, 박 호, 오재응, 1990, "질량감도 해석에 의한 2차원 연속계의 진동특성에 관한 연구," 대한기계학회논문집 제14권 제2호 pp. 339~348.