

〈論 文〉

수직평판 주위를 흐르는 느린 점성류의 수치해석

인기문* · 최도형** · 김문언**

(1993년 2월 10일 접수)

Computation of the Slow Viscous Flow about a Normal Plate

Ki-Moon In, Do Hyung Choi and Moon-Uhn Kim

Key Words : Finite Flat Plate (유한 평판), Navier-Stokes Equations (Navier-Stokes 방정식), Finite Difference Method (유한 차분법), Modified Vorticity (수정 와도), Matched Analytic-Numerical Solution (해석-수치 접합해), Pressure Drag Coefficient (압력 저항계수)

Abstract

An accurate analysis procedure to solve the flow about a flat plate at various incidences has been developed. The Navier-Stokes equations of stream function and vorticity form are solved in a sufficiently large computational domain, in which the grid lines are mutually orthogonal. The details of the flow near the singularity at the tip of the plate is well captured by the analytic solution which is asymptotically matched to the numerically generated outer solution. The solution for each region is obtained iteratively : the solution of one (inner or outer) region uses that of the other as the boundary condition after each cycle. The resulting procedure is accurate everywhere and also computationally efficient as the singularity has been removed. It is applied to the flat plate for a wide range of Re ; the results agree very well with the existing computation and experiment.

1. 서 론

물체 주위를 흐르는 저 레이놀즈수 유동에서 물체 근처에서는 점성력이 관성력보다 훨씬 크지만 아무리 낮은 레이놀즈수라도 물체로부터 먼 곳(적어도 Re^{-1} 정도 이상의 거리)에서는 관성력이 점성력과 비등하므로, 관성력을 전 유동장에서 무시할 수는 없다. 그러므로 낮은 레이놀즈수의 유동을 해석할 때 물체 근처에서의 대류항을 무시한 Stokes 근사에 의한 해와 먼 곳에서의 대류항을 포함하는 Oseen 근사에 의한 해를 접합하여 전 유

동장을 풀어야 한다.

이와 같은 접합 점근 전개 방식으로 물체 주위의 유동장에 대해 해석적 연구들이 많이 이루어져 있다. 그중에서 Miyagi⁽¹⁾는 유량함수와 와도로 표시된 Stokes 근사식과 Oseen 근사식을 접합하여 유동방향에 수직으로 놓여진 평판 주위의 유동장에 대한 해석해를 구하였다. Tamada 등⁽²⁾은 앞의 Oseen 근사식 대신에 완전한 Navier-Stokes 방정식의 해를 접합하여 더 정확한 해를 구하였다.

한편 이러한 해석해를 이용하여 더 큰 레이놀즈수에 대한 수치적 연구도 되어져왔다. 평판과 같이 첨점을 포함하는 물체 주위의 유동을 수치해석하는 경우, 첨점에서 압력과 와도가 발산하여 유한차분의 오차가 커지므로 유의하여야 한다. Hudson &

*한국과학기술원 기계공학과

**정회원, 한국과학기술원 기계공학과

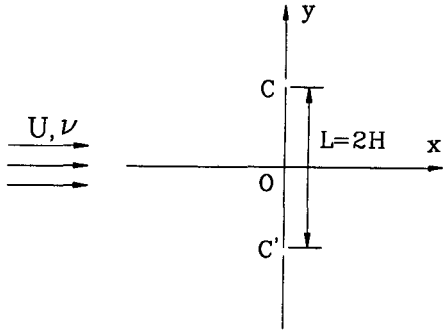


Fig. 1 Flow configuration

Dennis⁽³⁾는 원시변수 (u, v, p)로 표시된 Navier-Stokes 방정식을 수치계산하였는데, 그들은 평판의 끝점 근처에서 변형된 시간(distorted time)을 사용했다. Ingham 등⁽⁴⁾은 무한개의 수직 평판 주위의 유동에 관한 수치해를 구하는데 끝점 근처의 해석해를 이용하였다.

본 연구에서는 끝점 근처의 점근해와 그 밖의 곳에서의 Navier-Stokes 방정식의 수치해를 접합시켜 Fig. 1과 같은 수직 평판 주위를 흐르는 층류 유동장을 풀고, 압력에 대한 점근해를 이용하여 표면 압력분포와 저항계수 등을 구하였다. 이와 같은 접합해로써 이전의 실험 및 해석해, 수치해들의 결과와 비교하여 매우 만족할 만한 결과를 얻었다.

2. 수치계산 방법

평판 주위의 유동장을 계산하기 위하여, 와도-유량함수(vorticity-stream function)형으로 표시된 Navier-Stokes 방정식을 풀기로 한다. 이 경우에 와도와 유량함수는 다음의 정의를 따른다.

$$\omega = (\nabla \times \vec{V}) \cdot \vec{e}_z, \nabla \times (\psi \vec{e}_z) = \vec{V} \quad (1)$$

여기에서 ω 는 와도, ψ 는 유량함수, \vec{V} 는 속도 벡터, \vec{e}_z 는 z방향의 단위 벡터를 각각 나타낸다. 이러한 와도-유량함수로 표시된 방정식은 연속방정식을 만족시키며 압력을 같이 풀지 않아도 되므로 본문제에서와 같은 이차원 낮은 레이놀즈수 유동에 적합한 방법이라 생각된다. 수치계산을 위해 물체 주위의 영역을 직교좌표계로 분할하는 등각사상법으로 격자계를 형성하는데 우선 $z(=x+iy)$ 평면상의 평판주위의 영역을 식(2)의 Joukowsky 변환을 통하여 $\zeta(=\xi+i\eta=R\exp(i\theta))$ 평판상의 원통

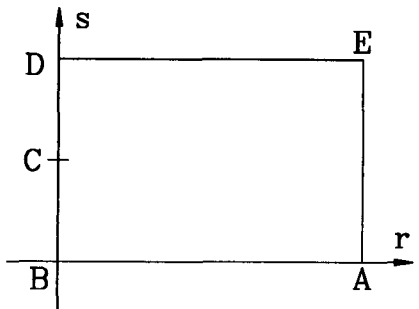
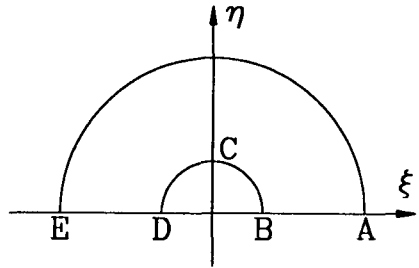
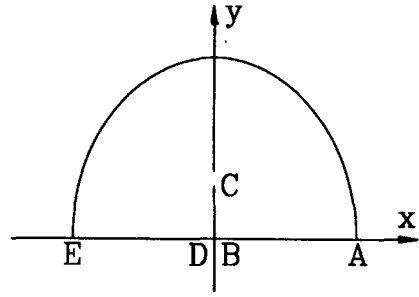


Fig. 2 Coordinates transformations

주위의 영역으로 변환한다. ($c=0.5$)

$$z = \zeta - \frac{c^2}{\zeta} \quad (2)$$

적절한 격자 분포를 위해 R방향은 지수함수적으로 밀집(exponentially stretching)시키고 θ 방향으로는 등분하여 최종 격자계 (r, s)를 식(3)과 같이 만든다(Fig. 2).

$$\zeta = R_1 \exp[a(r + is)] \quad (3)$$

여기에서, ζ 평면상의 원통 반경 $R_1=c$ 이며, $a = \frac{\pi}{s_{max}}$ 이다.

길이를 $H=L/2$ 로, 속도를 U 로 무차원화하고 (L : 평판의 길이, U : 자유 유동속도) 레이놀즈수를 $Re=UL/\nu$ 로 정의하면, 이 좌표계에서 와도와

유량함수식은 다음과 같이 표시된다.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial s} \right) = \frac{2}{Re} \frac{1}{h^2} \nabla^2 \omega \quad (4)$$

$$\nabla^2 \psi = -h^2 \omega \quad (5)$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}$$

여기서 Metric coefficients는 $h=h_1=h_2=aR\sqrt{J}$ ($J=x_\xi^2+y_\xi^2$: Joukowski 변환의 Jacobian)이 된다. 유동이 상하 대칭인 경우만 고려해 계산에서는 윗 면만을 풀도록 한다. 이에 따라 경계조건으로서 물체표면에서는 no-slip 조건, 물체로부터 멀리 떨어진 곳에서는 포텐셜(potential)유동과 관련된 Neumann 조건, 또 대칭선상에서는 대칭조건을 사용하였다.

$$\psi=0, \quad \omega = -\frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right]_{r=0} \quad \text{at } r=0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi_{pot.}}{\partial r}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0 \quad \text{at } r=r_{max} \quad (7)$$

$$\psi=0, \quad \omega=0 \quad \text{at } s=0, s_{max} \quad (8)$$

초기값으로 유량함수와 와도 모두 포텐셜 유동값을 주었으며, 시간방향으로 진행해 가는 방식으로 풀었다. 와도값[식(4)]은 ADI방법으로, 유량함수값[식(5)]은 SOR 방법을 사용해 구하였다. 두 방정식과 경계조건이 서로 결합(couple)되어 있으므로 반복 계산을 하였고, 시간에 따른 변화량의 모든 점에서의 절대값 합이 주어진 한계(10^{-3}) 이하가 될 때를 수렴한 것으로 보았다.

3. 끝점 근처의 계산

3.1 수정와도함수의 도입

전술한 바와 같이 본 문제에서 평판의 끝점은 와도가 무한대로 발산하는 특이점(singular point)이므로 수치계산에 많은 어려움이 따른다. 전지수 등⁽⁶⁾은 이 끝점을 격자점에서 제외하고 계산을 수행하였으나 본 계산에서는 끝점의 와도 발산 형태를 고려하여 적극적으로 발산을 억제하는 방법을 사용하고자 한다.

평판 끝점 근처의 와도 발산에 대하여는 많은 연구가 되어 해석해가 잘 알려져 있는데,^(1,6-9) 이에 따르면 이 근처에서 와도는 끝점으로부터의 거리 r_t 의 제곱근에 반비례하게 된다는 것이다. 그러므로 와도에 거리의 제곱근에 비례하는 함수를 곱하여 새로운 수정와도를 정의하면 이 수정와도는

끝점 근처에서 발산하지 않을 것이다. 그러나 r_t 의 제곱근 자체를 와도에 곱하여 수정와도를 정의할 경우, 물체로부터 멀리 떨어진 곳에서 r_t 가 무한대가 되기 때문에 이 양은 잘 정의가 되었다고 볼 수 없다. 이러한 점과 식(5)를 고려하여, 본 연구에서는 Joukowski 변환의 Jacobian 값 J 의 제곱근을 곱하는 함수로 사용하고자 한다. 이 J 는 끝점 근처에서는 r_t 에 비례하고 물체로부터 멀리 떨어진 곳에서는 1에 가까운 값을 갖는 관계로 본 목적에 꼭 부합된다 할 것이다. 이 방식에 따라 수정와도 Ω 를 식(9)와 같이 정의하면,

$$\Omega = \omega \sqrt{J} \quad (9)$$

다음과 같은 성질을 갖게 되어 끝점 근처에서는 발산하지 않고 먼 곳에서는 와도 자체의 값을 갖게 되어 계산 상에 문제가 없어진다.

$$\Omega \approx \omega \sqrt{r_t} \quad r_t \rightarrow 0$$

$$\Omega \approx \omega \quad r_t \rightarrow \infty \quad (10)$$

새로운 수정와도 Ω 에 대한 지배방정식은 식(9)의 정의를 식(4, 5)에 대입하여 구할 수 있고, 경계조건은 이전의 조건[식(6~8)]을 변형하여 얻을 수 있다(자세한 식은 In 등⁽¹⁰⁾ 참조).

이러한 수정와도를 도입하여 풀 경우 끝점 근처의 와도 값이 커지지 않으므로 수치계산에 도움을 준다. 그러나, 이 방법에도 다음의 두가지 문제점이 있는데, 첫째 끝점에서는 r 방향이 정확히 정의될 수 없기 때문에 식(7)의 와도 경계조건을 줄 수 없으며, 둘째 전술된 수정와도는 끝점으로부터의 거리에 대한 발산항을 고려하였지만 끝점을 중심으로 하는 원주 방향에 따른 변화는 고려되지 않아 계산이 개선된다 하더라도 제한적일 수밖에 없다고 생각된다. 그리하여 이러한 문제를 완전히 없애고 정확한 해를 구하기 위해서 본 논문에서는 다음에 소개된 방법과 같이 끝점 근처의 해석해를 수치계산에 직접 이용하기로 한다.

3.2 해석해의 사용

레이놀즈수가 작은 유동에서는 Stokes근사가 적용될 수 있으며 이 Stokes해와 물체에서 멀리 떨어진 영역에서 맞는 Oseen해 또는 Navier-Stokes 방정식의 수치해 등과 접합시키면 전체 유동장의 해가 얻어진다. 이 때 Stokes 근사는 물체 크기에 따른 레이놀즈수가 작을 때뿐 아니라 국부적으로

레이놀즈수가 매우 작아지는 곳, 이를테면 물체에 아주 인접한 곳에서 물체 레이놀즈수의 크기에 관계없이 맞게 된다. 다시 말해 물체 레이놀즈수가 커질수록 이 근사가 맞는 영역은 점차 작아질 뿐이지 없어지는 것이 아니므로 끝점 가까운 곳에서는 이 Stokes 가정이 맞는 영역이 항상 존재하는 것이다. 이 끝점 근처에서의 Stokes해를 부록 A.1에서와 같이 구하면 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$\omega = \frac{1}{\rho}(A_0 \cos \phi + B_0 \sin \phi) + A_1 + \rho(A_2 \cos \phi + B_2 \sin \phi) \quad (A9a)$$

이 와도에 대한 해석해는 위 식과 같이 미지계수 A_i, B_i 들이 나타나는데, 그 이유는 이 해에는 물체로부터 먼 곳의 경계조건이 들어가지 않았기 때문이며 이 미지계수들은 바깥쪽 경계조건을 반영하는 수치해로부터 다음과 같이 결정할 수 있다. Fig. 3과 같이 끝점 근처를 S_1, S_2, S_3 의 세영역으로 나누어 S_1, S_2 에서는 해석해가 S_2, S_3 에서는 수치해가 잘 맞는 부분이라 하면, S_2 는 해석해와 수치해가 다 맞는 영역이 된다. 앞에서 설명된 수정와도에 의한 수치 계산결과를 이용해 S_2 에 포함되는 미리 정해진 점들에서 수치해와 해석해 차이의 제곱의 합이 최소가 되도록 미지계수의 값을 결정한다. 다만 해석해를 점근적(asymptotic)으로 구했다는 특성을 고려하여 점합도 다음에 설명된 것처럼 점근적으로 실시한다. 즉, 수치해를 ω_0 에 먼저 맞추

고, 다음 수치해에서 ω_0 를 뺀 나머지 부분을 ω_1 에 맞추고, 그 다음항들은 항의 크기에 따라 차례로 맞추는 방법을 쓴다. 이렇게 해석해가 결정되면 이 결과는 다시 수치해 계산의 경계조건(S_1 과 S_2 의 경계)으로 새로운 수치해를 얻는데 사용되며 이 과정은 해가 수렴될 때까지 반복된다.

4. 압력의 계산

본 논문과 같이 유량함수와 와도방정식을 이용한 계산에서는 압력장이 분리되어 압력분포가 필요한 경우 이에 관한 별도의 방정식을 풀어 줘야 한다. 대개 압력분포는 저항을 구하는 데 필요하고 이 경우 물체 표면의 압력만이 필요하게 되는데 보통 다음 식(11)의 와도와 압력 관계식을 면을 따라 적분하면 표면 압력이 구해진다. 여기에서 압력은 전압(total pressure)을 ρU^2 로 무차원화한 값이다.

$$\frac{\partial P}{\partial s} = \frac{2}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial r} \quad \text{at } r=0 \quad (11)$$

그러나 평판의 경우 표면을 따라 계속 적분하기 곤란한 첨점(cusp)이 있으므로 앞의 방법으로 표면 압력을 구하는데 문제가 있다. 그래서 이 경우는 다음의 일반적인 압력식[식(12)]을 이용하여 적분해야 하지만, 이 식은 경계가 아닌 유동장 내를 통한 선적분을 해야 하고, 매우 크게 발산하는 끝점 근처의 와도값의 미분치가 사용된다는 점에서 그 오차가 크게 될 것이다.

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \omega - \frac{2}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial s} \quad (12a)$$

$$\frac{\partial P}{\partial s} = -\frac{\partial \psi}{\partial s} \omega + \frac{2}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial r} \quad (12b)$$

그러므로, 압력계산에서도 앞의 절에서 와도를 구한 방법과 같이 끝점 근처의 압력에 대한 해석해를 구하여 사용한다. 부록 A.2에 설명된 과정을 따르면 압력에 관한 해석해는 다음과 같이 주어진다.

$$P = \frac{2}{Re} \left[\frac{1}{\rho} (-A_0 \sin \phi + B_0 \cos \phi) + \text{Const.} + \rho (A_2 \sin \phi - B_2 \cos \phi) \right] \quad (B5)$$

이 압력에 대한 식(B5)에는 와도 해석해에 나오는 미지계수가 그대로 사용되어 앞서 구한 계수값을 그대로 사용할 수 있으나, 하나의 미지계수는 새로

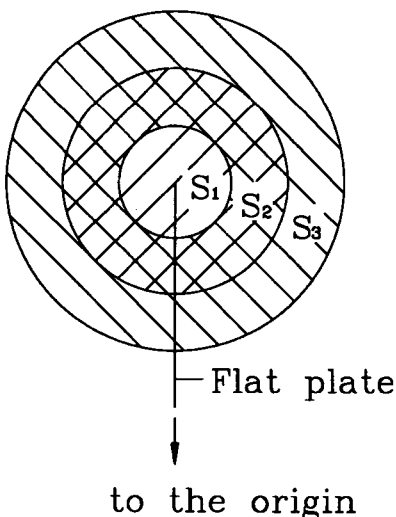


Fig. 3 Three regions near the tip

이 정해 주어야 한다. 이 미지계수는 상대 압력의 기준치(reference pressure)가 되는 값인데 먼저 수치해를 사용해 식(12)를 선적분하여 끝점 근처 S_2 영역의 압력을 구한 후 그 값과 해석해의 차이의 제곱의 합을 최소가 되게 정하였다.

5. 결과의 고찰

앞 절에서 설명한 방법을 사용해 레이놀즈수를 1 부터 10까지 변화시켜 가며 해를 얻었다. 격자 분포와 계산영역은 수치실험 결과 평판의 반길이(H)의 83배 되는 반경을 갖는 영역에 격자분포 70×43 이 적합한 것으로 나타나 모든 계산을 이 조건에서 수행하였다.

본 방법이 타 방법에 비해 효율적이라는 것은 계산시 취할 수 있는 최대 시간증분으로부터도 알 수 있는데, $Re=5$ 인 경우 최대 시간증분은 와도 ω 를 그대로 사용하면 10^{-5} , 수정와도 Ω 의 경우 5×10^{-5} 임에 비해 본 방법에서와 같이 해석해와 접합시켜 계산할 때에는 2×10^{-3} 까지 크게 할 수 있어 계산 속도가 100배 이상 빠르게 됨이 이를 증명하고 있다. 이 시간증분은 레이놀즈수에 따라 달라지는데 위의 값을 기준으로 해 대략 레이놀즈수에 비례하는 값을 주면 된다.

먼저 이 방법의 핵심인 해석해와 수치해의 접합이 얼마나 잘 이루어졌는가를 보기 위하여 수렴이 된 상태에서 끝점 근처 영역에서 해석해와 수치해를 Fig. 4에 와도 값으로 비교하였다. 그림의 i 는 r 방향의 격자 번호로서 $i=0$ 이 벽면을 나타내고, j 는 s 방향의 것으로 $j=0, 43$ 이 대칭선이고, 끝점은 $j=21.5$ 에 위치한다. 여기서 실선으로 표시된 값이 해석해이고 흰 원은 수치해인데 검은 원은 S_2 영역에 속하고 해석해의 미지계수를 구하는데 사용된 값이며, 흰 원은 S_3 영역과 벽면위치로 미지계수 계

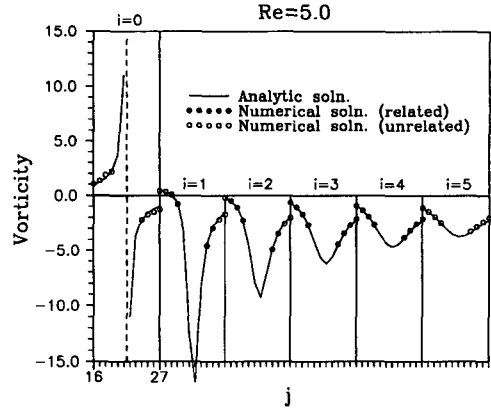


Fig. 4 Comparison of vorticity values between analytic and numerical solutions near the tip

산에서 제외된 점의 값이다. (벽면 와도값은 유량함수로부터 간접적으로 구해진 값이므로 제외시켰다.) 그림에서 볼 수 있듯이 접합이 이루어지는 S_2 의 영역에서 뿐만 아니라, 더 큰 S_3 영역에서도 해석해가 수치해를 잘 근사하고 있다. 한편, Table 1에는 반복계산에 의해 구해진 미지계수들을 나타내었는데 계수의 값들은 대체로 1의 크기(order of 1) 이하의 값을 갖으며 높은 Order로 갈수록 계수의 크기가 작아짐을 볼 수 있다. 이는 점근해의 특성을 잘 반영하는 결과라 할 수 있는데 실제로 각 Order의 항들의 값들을 비교해 보면 ω_0 가 전체의 대부분을 차지하고 ω_1, ω_2 는 거의 무시할 정도로 작은 값을 갖는다. 또 Table에는 S_1, S_2 영역에서의 수치해, 해석해 간의 상대오차를 마지막 칸에 표시하였는데 약 1~2% 정도의 값으로 만족할 만한 접합이라 할 수 있다.

해석해를 도입한 결과 계산이 어떻게 개선되었는가를 보기 위하여 $Re=5$ 인 경우 해석해를 사용하

Table 1 Coefficients calculated from iterations

	A_0	B_0	A_1	A_2	B_2	Rel. Err.
Re=1	-0.885	-0.106	-0.0004	0.0377	0.0014	0.0137
Re=3	-1.094	-0.256	-0.0017	0.0550	0.0104	0.0161
Re=5	-1.338	-0.402	-0.0027	0.0742	0.0258	0.0187
Re=10	-1.754	-0.708	-0.0040	0.1183	0.0816	0.0268

지 않는 방법에 의한 벽면에서의 와도값과 본 방법에 의한 와도값을 Fig. 5에 비교하였다. 전자에 의한 결과는 끝점 근처에서 뒷면의 와도가 양의 무한대로 발산하다가 음의 쪽으로 급격히 떨어지는 것을 볼 수 있는데 이는 수치 계산상에서 끝점 근처의 와도의 발산형태를 잘 따라주지 못하고 그냥 단순한 유한차분을 하였기 때문에 생긴 잘못이다. 그러나 본 방법은 끝점 근처에서는 유한차분 대신에 해석해를 썼기 때문에 끝점에서 양과 음으로 잘 발산하는 벽면 와도 값을 볼 수 있다. Fig. 6은 레이놀즈수에 따른 벽면 와도분포인데 모든 경우 해를 성공적으로 구할 수 있었다.

Table 2와 Fig. 7에는 뒷면 박리기포의 길이 l_s , 중심 유량함수값 ψ_c 들을 단순 수치해와 Hudson & Dennis⁽³⁾와 Taneda⁽¹²⁾의 결과들과 함께 비교하였

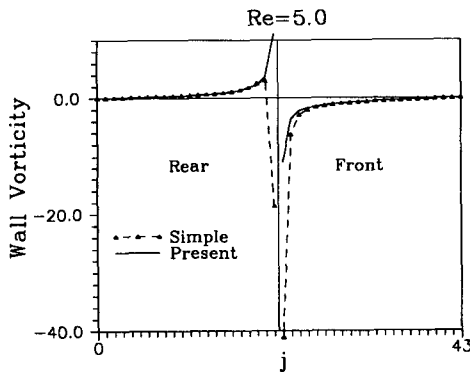


Fig. 5 Comparison of wall vorticity between simple numerical solution and matched analytic-numerical solution

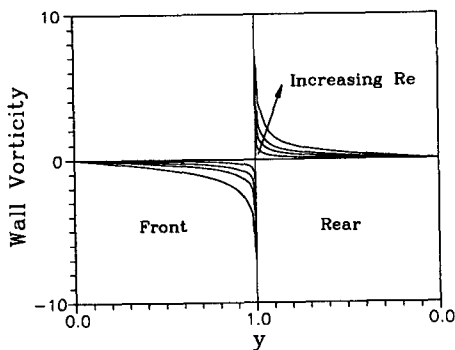


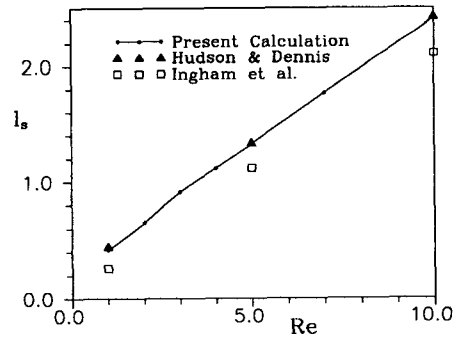
Fig. 6 Wall vorticity profiles at various Reynolds numbers

Table 2(a) Comparison of strength of separation bubble

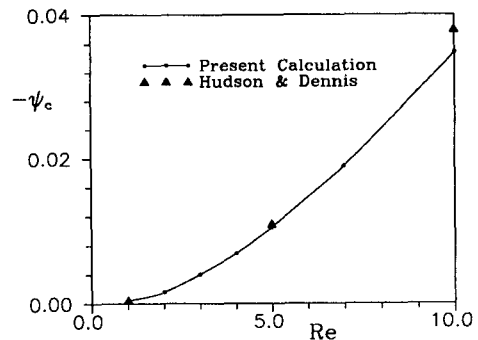
Re	Simple	Hudson & Dennis	Matched
1.0	0.247×10^{-3}	0.48×10^{-3}	0.477×10^{-3}
3.0	0.196×10^{-2}	—	0.403×10^{-2}
5.0	0.117×10^{-1}	0.11×10^{-1}	0.103×10^{-1}
10.0	0.380×10^{-1}	0.38×10^{-1}	0.348×10^{-1}

Table 2(b) Comparison of length of separation bubble

Re	Simple	Hudson & Dennis	Matched
1.0	0.285	0.45	0.418
3.0	0.592	—	0.910
5.0	1.35	1.34	1.32
10.0	2.77	2.43	2.41



(a) Length of separation bubble, l_s



(b) Strength of the separation bubble, $-\psi_c$

Fig. 7 Quantitative results

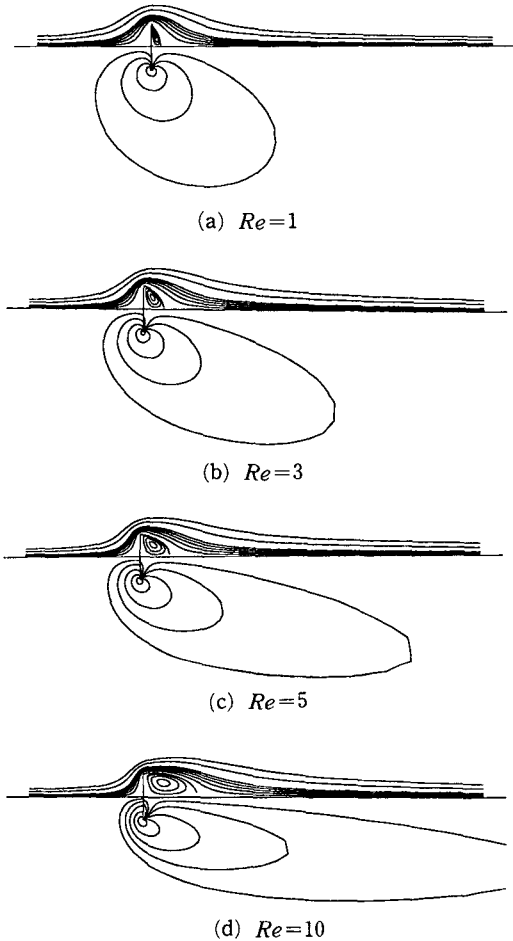


Fig. 8 Streamlines($\psi=0.9\psi_c, 0.6\psi_c, 0.3\psi_c, 0, 0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.1, 0.2, 0.3$) and equi-vorticity lines($\omega=-2, -1, -0.5, -0.25, -0.1, 0.1, 0.25$)

다. 본 방법은 단순 수치해에 비해 개선된 결과를 얻을 수 있다.

Fig. 8에 이 계산에 의한 유선과 등와도선을 나타내었다. 예측할 수 있는 바와 같이 레이놀즈수가 증가함에 따라 박리기포의 크기와 세기는 커진다. 와도는 끝점 근처에서 집중적으로 생성되어 후류로 전달되어 가는데 역시 레이놀즈수가 커짐에 따라 와도도 큰 값으로 나타나며 후류로 더 많이 전달되어 나가는 것을 볼 수 있다.

압력을 전술한 방법에 따라 구하였고, 앞에 와도에서 했던 방법과 같이 해석해와 선적분에 의한 수치해를 Fig. 9에 비교하였다. 해석해는 수치해를 잘 근사하며, 끝점 근처에서 매끄럽게 발산해 압력 분포가 개선되었음을 볼 수 있다. Re 에 따른 벽면

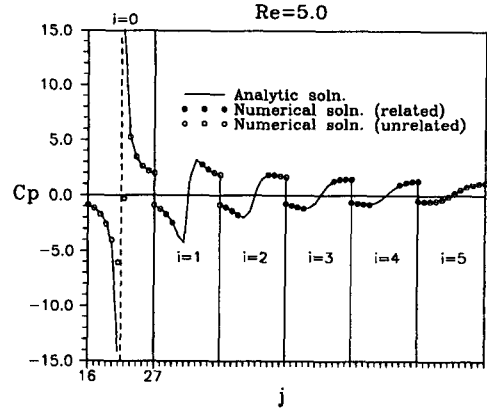


Fig. 9 Comparison of pressure values between analytic and numerical solutions near the tip

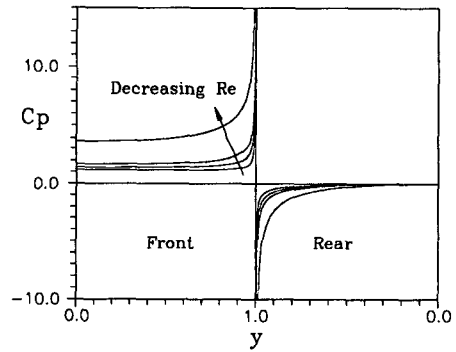


Fig. 10 Wall pressure profiles at various Reynolds numbers

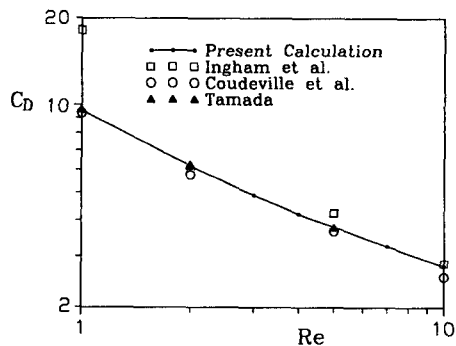


Fig. 11 Drag coefficients, C_D with respect to various Reynolds numbers

압력분포는 Fig. 10과 같고, 이를 적분해 구한 저항계수 C_D 를 Fig. 11에 표시했다($C_D = \text{Drag} / \rho U^2 H$). 그림에 함께 비교한 것은 Tamada 등⁽²⁾의 이론해와 Coudeville 등⁽¹¹⁾의 실험치인데 레이놀

즈수 5이하에서는 모든 경우가 잘 일치하며, 더 큰 레이놀즈수에서는 Tamada 등의 이론해가 다른 두 결과와 달라지기 시작하는 것이 관찰된다. 또 Ingham 등⁽⁴⁾의 무한개 평판에 대한 결과도 함께 도시하였는데 평판의 상호 작용 때문에 레이놀즈수가 작아질수록 해의 차이가 많이 나고 있다.

6. 결 론

유한 수직 평판 주위의 이차원 층류 유동을 수치적으로 해석하였는데 주요 결과는 다음과 같다.

(1) 특이점인 끝점 근처의 해를 정확히 구하기 위해 수정와도와 그 근처에서의 해석해를 수치계산에 이용하였으며 그로부터 계산을 빠르고 정확히 수행할 수 있었다.

(2) 뒷편 박리기포는 레이놀즈수의 증가에 따라 그 크기와 세기가 증가하는데 이전의 다른 계산들과 비교해 5~10%의 개선을 얻었다.

(3) 끝점 근처의 해석해를 이용하여 압력분포를 정확히 구할 수 있었고, 이로부터 구한 저항계수는 실험치와 잘 일치하며 종전의 이론해에 비해 적용 범위가 넓어졌음을 확인하였다.

참고문헌

- (1) Miyagi, T., 1978, "Standing Vortex-Pair behind a Flat Plate Normal to Uniform Flow of Viscous Fluid," J. Phys. Soc. Japan, Vol. 34, pp. 1396~1401.
- (2) Tamada, K., Miura, H. and Miyagi, T., 1983, "Low-Reynolds-number flow past a cylindrical body," J. Fluid Mech., Vol. 132, pp. 445~455.
- (3) Hudson, J.D. and Dennis, S.C.R., 1985, "The flow of a viscous incompressible fluid past a normal flat plate at low and intermediate Reynolds numbers: the wake," J. Fluid Mech., Vol. 160, pp. 369~383.
- (4) Ingham, D.B., Tang, T. and Morton, B.R., 1990, "Steady two-dimensional flow through a row of normal flat plates," J. Fluid Mech., Vol. 210, pp. 281~302.
- (5) 전지수, 최도형, 김문언, 1988, "반원호 주위를 흐르는 점성류의 수치계산," 대한기계학회논문집, Vol. 12, pp. 916~925.

- (6) Goldstein, S., 1960, "Lectures on Fluid Mechanics," Wiley(Interscience), New York, pp. 137~145.
- (7) Davis, R.T., 1967, "Laminar Incompressible flow past a semi-infinite flat plate," J. Fluid Mech., Vol. 27, pp. 691~704.
- (8) Yoshizawa, A., 1970, "Laminar Viscous Flow past a Semi-Infinite Flat Plate," J. Phys. Soc. Japan, Vol. 28, pp. 776~779.
- (9) Van de Vooren, A.I. and Dijkstra, D., 1970, "The Navier-Stokes Solution for Laminar Flow past a Semi-Infinite Flat Plate," J. Engng. Math., Vol. 4, pp. 9~27.
- (10) In, K.M., Choi, D.H. and Kim, M.U., 1990, "Analysis of Viscous Flow past a Circular Arc," Proc. 2nd KSME-JSME Fluids Engng. Conf., Vol. 1, pp. 430~434.
- (11) Coudeville, H., Trepaud, P. and Braun, E.A., 1965, Rarefied Gas Dynamics, Vol. 1, p. 444.
- (12) Taneda, S., 1968, Rep. Res. Inst. Appl. Mech., Kyushu Univ., Vol. 16, p. 155.

부 록

A.1 와도에 대한 해석해

우선 해석해를 구하는데 더 편리한 새 좌표계를 만들기로 한다. 다음의 식(A1)와 같은 타원형 좌표계(Elliptic coordinates) (u, v) 를 사용한다. 여기에서 (X, Y) 는 길이 2인 평판이 X 축 상의 $(-1, 0) - (1, 0)$ 에 놓여 있는 실제 평면(Physical plane)이 된다.

$$Z = \cosh w \quad (Z = X + iY, \quad w = u + iv) \quad (A1)$$

다시 끝점 $(X=1, Y=0)$ 을 중심으로 하는 식(A2)와 같은 극좌표계를 만든다.

$$w = \rho \exp(i\phi) \quad (A2)$$

이 때 지배방정식은 식(A3)과 같이 되고,

$$\nabla_1^2 w = \frac{Re}{2} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} - \frac{\partial w}{\partial \phi} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) \quad (A3a)$$

$$\nabla_1^2 \psi = -J_1 \psi \quad (A3b)$$

$$\nabla_1^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

식(14) 변환의 Jacobian J_1 은 식(A4)과 같게 된다.

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \left| \frac{dZ}{dw} \right|^2 = |\sinh w|^2 = \frac{1}{2} (\cosh 2u - \cos 2v) \\
 &\approx \rho^2 \left[1 + \frac{1}{3} \rho^2 \cos 2\phi + \frac{2}{45} \rho^4 \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\phi \right) \right. \\
 &\quad \left. + \dots \right] \quad (A4)
 \end{aligned}$$

한편 물체 벽면에서의 경계조건은 No-slip 조건과 No-penetration 조건으로서 식(A5)과 같아진다.

$$\psi = 0, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = 0 \quad \text{at } \phi = \pm \frac{\pi}{2} \quad (A5)$$

이때 실제 평면상에서 끝점으로부터의 거리 r_t 는 다음의 식(A6)와 같다.

$$\begin{aligned}
 Z - 1 &= r_t \exp(i\theta_t) = 2 \sinh^2 \frac{w}{2} \\
 r_t &\approx \frac{1}{2} (u^2 + v^2) = \rho^2 \quad \text{near } \rho = 0 \quad (A6)
 \end{aligned}$$

전술한 바와 같이 와도발산의 가장 큰 항(Leading term)은 끝점 근처에서 r_t 의 제곱근에 반비례하며 따라서 식(A6)에 의해 ρ 에 반비례하고, 식(A3b)에 의해 유량함수는 ρ^3 에 비례하게 되므로, 유량함수 ψ 와 와도 ω 를 ρ 에 대해 전개(Series expansion wrt. ρ)시키면 식(A7)과 같아진다.

$$\begin{aligned}
 \omega &= \frac{1}{\rho} \tilde{\omega}_0(\phi) + \tilde{\omega}_1(\phi) + \rho \tilde{\omega}_2(\phi) + \dots \\
 \psi &= \rho^3 \tilde{\psi}_0(\phi) + \rho^4 \tilde{\psi}_1(\phi) + \rho^5 \tilde{\psi}_2(\phi) + \dots \\
 J_1 &= \rho^2 \tilde{J}_0(\phi) + \rho^4 \tilde{J}_1(\phi) + \rho^6 \tilde{J}_2(\phi) + \dots \quad (A7)
 \end{aligned}$$

식(A7)을 지배방정식(A3)에 넣고 ρ 의 급수에 따라 정리하면 다음과 같은 식(A8)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho^3} : \nabla_1^2 \omega_0 &= 0 \\
 \frac{1}{\rho^2} : \nabla_1^2 \omega_1 &= 0 \\
 \frac{1}{\rho} : \nabla_1^2 \omega_2 &= 0 \\
 1 : \nabla_1^2 \omega_3 &= \frac{Re}{2} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial \rho} \frac{\partial \psi_0}{\partial \phi} - \frac{\partial \omega_0}{\partial \phi} \frac{\partial \psi_0}{\partial \rho} \right) \quad (A8a) \\
 \rho : \nabla_1^2 \psi_0 &= -J_0 \omega_0 \\
 \rho^2 : \nabla_1^2 \psi_1 &= -J_0 \omega_1 \\
 \rho^3 : \nabla_1^2 \psi_2 &= -(J_0 \omega_2 + J_1 \omega_0) \\
 \rho^4 : \nabla_1^2 \psi_3 &= -(J_0 \omega_3 + J_1 \omega_1) \quad (A8b)
 \end{aligned}$$

단 $\omega_k(\rho, \phi) = \rho^{k-1} \tilde{\omega}_k(\phi)$, $\psi_k(\rho, \phi) = \rho^{k+3} \tilde{\psi}_k(\phi)$, $J_k(\rho, \phi) = \rho^{2k+2} \tilde{J}_k(\phi)$, $k = 0, 1, 2, \dots$

여기에서, ω 에 관한 식을 보면, ω_3 에서 부터 비로소 대류항(Convective term)이 들어가게 되어, 레이놀즈수가 나타난다.

식(A5)의 경계조건에 유의하여 풀게 되면 식(A9)와 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 \omega_0 &= \frac{1}{\rho} (A_0 \cos \phi + B_0 \sin \phi) \\
 \omega_1 &= A_1 \\
 \omega_2 &= \rho (A_2 \cos \phi + B_2 \sin \phi) \quad (A9a) \\
 \frac{\psi_0}{\rho^3} &= -\frac{A_0}{8} \left(\cos \phi + \frac{1}{3} \cos 3\phi \right) \\
 &\quad - \frac{B_0}{8} (\sin \phi + \sin 3\phi) \\
 \frac{\psi_1}{\rho^4} &= -\frac{A_1}{16} (1 - \cos 4\phi) \\
 \frac{\psi_2}{\rho^5} &= -\frac{1}{288} \left(2 \cos \phi + 3 \cos 3\phi + \frac{7}{5} \cos 5\phi \right) A_0 \\
 &\quad - \frac{1}{288} (-2 \sin \phi + 3 \sin 3\phi + 5 \sin 5\phi) B_0 \\
 &\quad - \frac{1}{120} (5 \cos \phi - \cos 5\phi) A_2 + \frac{1}{24} (\sin \phi \\
 &\quad - \sin 5\phi) B_2 \quad (A9b)
 \end{aligned}$$

A.2 압력에 대한 해석해

앞 절과 같은 좌표계를 사용하면, 식(B1)과 같은 압력 Poisson 방정식이 얻어진다. 여기서 압력은 본문에서와 같이 무차원화된 전압이다.

$$\nabla_1^2 P = J_1 \omega^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial \rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \omega}{\partial \phi} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) \quad (B1)$$

이 방정식의 경계조건을 구하기 위하여, 벽면에서의 ρ 방향 운동량 방정식으로부터 다음의 식(B2)를 구한다.

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = -\frac{2}{Re} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \phi} \quad \text{at } \phi = \pm \frac{\pi}{2} \quad (B2)$$

또한 위의 식(B2)로부터 끝점 근처에서 압력 발산의 가장 큰 항(Leading term)은 ρ 에 반비례하는 항이라는 것을 알 수 있다. 앞서와 마찬가지로 ρ 에 따라 급수 전개하면, 다음의 식(B3)과 같고, 이식을 식(B1)에 넣고 ρ 에 대한 각 차수에 따라 다음의 방정식 식(B4)를 얻을 수 있고, 이 식들을 경계조건(B2)과 식(A9a)를 참고하여 차례로 풀면 식(B5)의 결과를 얻을 수 있다.

$$P = \frac{1}{\rho} \tilde{P}_0(\phi) + \tilde{P}_1(\phi) + \rho \tilde{P}_2(\phi) + \dots \quad (B3)$$

$$\frac{1}{\rho^3} : \nabla_i^2 P_0 = 0$$

$$\frac{1}{\rho^2} : \nabla_i^2 P_1 = 0$$

$$\frac{1}{\rho} : \nabla_i^2 P_2 = 0$$

단, $P_k(\rho, \phi) = \rho^{k-1} \bar{P}_k(\phi)$, $k=0, 1, 2, \dots$

$$(B4) \quad P = \frac{2}{Re} \left[\frac{1}{\rho} (-A_0 \sin \phi + B_0 \cos \phi) + \text{Const.} \right. \\ \left. + \rho (A_2 \sin \phi - B_2 \cos \phi) + \dots \right] \quad (B5)$$