

〈論 文〉

가변 샌드위치 구조물의 형상최적설계

박철민* · 박경진** · 이완익***

(1992년 10월 5일 접수)

Shape Optimal Design of Variable Sandwich Structure

Cheol Min Park, Gyung Jin Park and Wan Ik Lee

Key Words : Sandwich Beam(샌드위치보), Sandwich Plate(샌드위치평판), Structural Optimization(구조최적설계), Shape Optimization(형상최적설계), Variable Structures(가변구조물)

Abstract

General Structure optimization is utilized to minimize the weight of structures while satisfying constraints imposed on stress, displacements and natural frequencies, etc. Sandwich structures consist of inside core and outside face sheets. The selected sandwich structures are isotropic sandwich beams and isotropic sandwich plate. The face sheets are treated as membrane and assumed to carry only tensions, while the core is assumed to carry only transverse shear. The characteristics of the varying area are considered by adding the projected component of the tension to the transverse shear. The bending theory and energy method are adopted for analyzing sandwich beams and plates, respectively. In the optimization process, the cost function is the weight of a structure, and a deflection and stress constraints are considered. Design variable are thickness and tapering coefficients which determine the shape of a structure. An existing optimization code is used for solving the formulated problems.

기 호 설 명

b	: 부재의 너비(폭)	L	: 부재 전체의 길이
C_i	: 처짐에서의 미지계수	M	: 굽힘모멘트
E	: 영계수	m_x^*	: $m_x + Ph \tan \phi$
E_{ss}	: $E_s(1 - \nu_s \nu_y)$	m_x, m_y	: 외력모멘트
E_{yy}	: $E_y(1 - \nu_y \nu_s)$	n	: 법선 방향
F	: 인장력	Q_{core}	: Core의 전단력
G_{sy}	: Face sheet의 전단계수	Q	: 전체 전단력
G_x, G_y	: Core의 전단계수	s	: 접선 방향
h	: Core의 두께	t	: Face Sheet의 두께
h_0	: $x=0$ 일때 Core의 두께	t_0	: $x=0$ 일때 Face Sheet의 두께
		δ	: 처짐량
		u_s	: 접선 방향의 변위
		u_n	: 법선 방향의 변위
		U_{Face}	: Face Sheet의 변형에너지

*산업과학연구소

**정회원, 한양대학교 기계공학과

***정회원, 한양대학교 기계설계학과

C_{core}	: Core의 변형에너지
U	: 전체 변형에너지
V	: 외부 에너지
w	: 처짐
θ_x	: x 방향의 처짐각
θ_y	: y 방향의 처짐각
ϕ	: 단위 길이당 각도
ϵ_s	: 접선방향의 변형률
ϵ_y	: 법선방향의 변형률
ρ	: 곡률
β_f	: Face Sheet의 경사계수
β_c	: Core의 경사계수
γ_{xz}	: y 평면의 전단변형률
γ_{yx}	: x 평면의 전단변형률
γ_{sy}	: 법선평면의 전단변형률
γ_f	: Face Sheet의 비중량
γ_c	: Core의 비중량
ν_y, ν_s	: 포아송 비

1. 서 론

경량 구조 설계에 대한 수요가 증가함에 따라 많은 학자들은 최신 설계 기법과 첨단 재료 개발에 박차를 가하고 있다. 이와 같은 연구 개발 분야에 적합한 재료중의 하나로서 복합재료로 만든 샌드위치 구조물이 있는데 고응력, 저중량 특성으로 인해 많은 구조 설계 분야에 응용되고 있다. 특히 최근 들어 이러한 재료들은 무게와 부피가 대단히 중요한 설계인자로 되는 항공기 구조물에 사용되고 있을 뿐 아니라 자동차 구조에서도 샌드위치 형태의 구조물이 채택되고 있어 그 응용 범위가 확산일로에 있다. 샌드위치 구조물은 얇은 두 외재(face sheet)와 내재(core)로 접착된 구조물이며 내재는 보통 가볍고 전단에 강한 재료를 사용하는 반면 외재는 인장에 강한 재료가 사용된다. 그러므로 샌드위치 구조는 높은 강도와 강성을 가지며 가벼운 중량을 지니게 된다.⁽¹⁻⁷⁾ 샌드위치 구조물은 기하학적 특성 때문에 일반적인 구조물의 해석과는 다른 특수한 이론이 요구되며 그 응용도 최근에 발전되었으므로 그에 대한 연구 자료가 그다지 많지 않은 실정이다. Huang과 Alspaugh는 길이의 변화에 따라 두께가 변하는 샌드위치 보를 연구하였다.⁽¹⁾ 이때 해석 방법은 종래의 일정두께의 샌드위치 보 해

석방법을 그대로 사용하였는데 두 재료로 구성된 샌드위치 보의 내재에는 전단력만이, 외재에는 인장력만이 작용한다는 가정으로 변형 및 응력을 도출하였다. 또한 샌드위치 보의 두께를 변수로 하여 보 이론을 적용하여 해석하였고, 이들을 최적설계 방식으로 결정하는 방법을 제시하였다. Libove는 길이에 따라 두께가 변하는, 즉 가변 샌드위치 평판에 대한 연구를 하였다. 여기서도 내재에서 전단력, 외재에서 인장력만 작용한다고 가정하였으나 두께가 변할 때의 영향을 고려하였다. 그리고 평면 응력 상태에서 폭이 넓은 보(wide beam)와 같이 거동한다는 가정으로 보 이론을 적용하여 해석하였다.⁽²⁾ Paydar는 Libove와 같은 가정으로 평판이론을 사용하여 길이에 따라 두께가 변하는 샌드위치 평판을 해석하였다. 해석 방법으로는 유한 요소법에 의한 해석, Levy법에 의한 해석, 유한 차분법을 사용한 에너지 법에 의한 해석 등 여러 방법으로 해석하였다.⁽³⁾ Paydar와 Park은 위의 가변 형상을 고려한 이론 해석을 기초로 샌드위치 보의 무게를 최소화하고 보의 형상을 설계하는 최적설계법을 소개하였다.⁽⁶⁾

본 연구에서는 길이의 변화에 따라 두께가 변하는 샌드위치 보와 평판에 대해 고찰하였고 이에 따르는 형상의 최적설계를 하였다. 해석시 구조의 기하학적 형상은 증립면에 대해 대칭이다. 외재는 막(membrane)요소로 취급되며 내재는 두께방향으로 신장하지 않는다고 생각하였다. 이러한 내재에 대한 가정은 허니컴(honeycomb) 또는 Foamed Plastic Core에도 적용할 수 있다. 그리고 앞에서도 설명한 것과 같이 외재에서는 인장력만 작용하고, 내재의 횡방향 전단력에 대한 외재의 영향은 무시되었다. 그러나 평판을 해석할 때는 외재의 횡방향 전단력이 고려된다. 두께가 변화하는 가변 샌드위치 보와 평판의 해석은 단면 두께의 변화에 따라 기울기가 생기게 되고 이 기울기에 의해 외재에 작용하는 막응력이 내재의 전단력과 전단 변형에 영향을 주기 때문에 수직 막응력이 영이 되는 일정한 두께를 갖는 샌드위치 구조물에 대한 해석 방법과는 다소 차이가 있다.

이와같은 해석방법으로 얻은 결과가 최적설계 과정에 적용되었는데 최적설계에서는 위 해석으로부터 구한 응력과 처짐을 제한 조건으로 하고 무게를 목적함수로 한 형상 최적 설계를 하였다.⁽⁸⁻¹¹⁾ 이때 설계변수는 외재와 내재의 두께 및 샌드위치 구

조물 형상의 경사계수(tapering coefficient)로 정하였다. 따라서 설계변수들의 값이 결정되면 이 결과에 의해 샌드위치 구조물의 최적 형상을 결정할 수 있다. 최적화 기법으로는 비선형 프로그램(nonlinear programming) 중에서 최근에 대한히 효과적이라고 알려져 있는 반복 이차 프로그램(recursive quadratic programming, RQP)⁽⁹⁾이 채택되었다. 그리고 사용된 최적 프로그램은 IDESIGN3^(10~11)이며 FORTRAN 언어⁽¹²⁾를 사용하여 본 연구의 문제가 프로그래밍 되어 IDESIGN3에 첨가되었다.

2. 이론 해석

샌드위치 구조물에 대한 모델이 기준좌표와 함께 Fig. 1~2에 보여지고 있다.

2.1 기본가정 및 좌표계

샌드위치 구조물을 효과적으로 해석하기 위해 가정한 사항은 다음과 같다.

(1) 샌드위치 구조물의 외재는 인장력만 작용하고 내재는 전단력만 작용한다.

(2) 외재의 두께는 충분히 얇기 때문에 외재 두께의 수직 단면은 외재의 중심축에 직각을 이루며 일정하게 변형한다.

(3) 외재와 내재는 중립면 즉 Fig. 1~2의 x 축에 대하여 대칭이다.

2.2 해석 과정에 대한 설명

사용된 샌드위치 구조물의 해석은 우선 기하학적 변형이 산출되고 이에 의해 나머지 역학적인 양들이 유도된다.^(1~5) Fig. 3과 Fig. 4에 나타나있듯이 정적 하중을 받을 때 샌드위치 구조물의 기하학적 변형으로부터 접선 방향의 변위 u_s 와 법선 방향의 변위 u_n , y 방향의 변위 u_y 는 각각 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$u_s = \theta_x \frac{h}{2} \cos \phi + w \sin \phi \tag{1}$$

$$u_n = w \cos \phi - \theta_x \frac{h}{2} \sin \phi \tag{2}$$

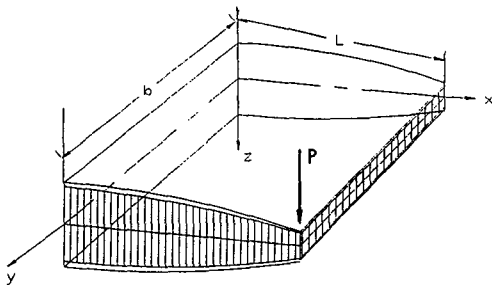


Fig. 1 Sandwich Plate with Variable Thickness

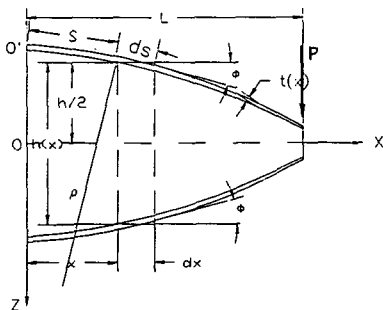


Fig. 2 Sandwich Beam with Variable Thickness

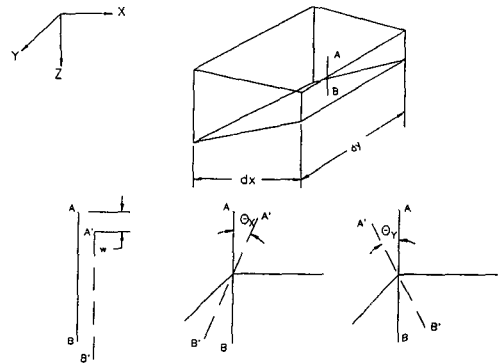


Fig. 3 The Cross Section of Sandwich Plate Displacements

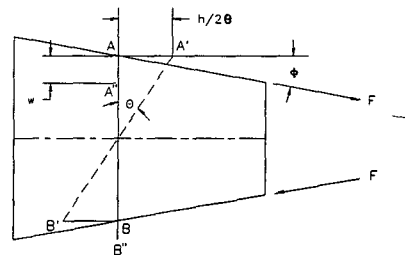


Fig. 4 Rotation θ and Deflection w of the Typical Cross Section AB

$$u_y = \theta_y \frac{h}{2} \quad (3)$$

여기서 h 는 내재의 두께이며 $\theta_x, \theta_y, \phi, w$ 는 변형 각도 및 변위로서 Fig. 2, Fig. 3에 표시되어 있다.

(1) 등방성 재료의 샌드위치 보에 대하여

Fig. 2는 등방성 재료를 사용한 가변 샌드위치 보이며 해석 방법은 보 이론이 도입되었다. 샌드위치 보에 하중을 가했을 때 기하학적으로 변형하는 상태에 의해 변위를 계산한다. 이때 변위는 앞의 식(1), (2)에 나타나 있다. 이들 변위로 인해 상단 외재(Upper Face Sheet)에 발생하는 변형률 ϵ_s 는 다음과 같이 나타낸다.

$$\epsilon_s = \frac{du_s}{ds} - \frac{u_n}{\rho} = \cos\phi \frac{du_s}{dx} - \frac{u_n}{\rho} = \epsilon \quad (4)$$

윗 식에서 ρ 는 곡률을 나타내며 그 식은 다음과 같다.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\phi}{ds} = \cos\phi \frac{d\phi}{dx} \quad (5)$$

(4)식에서 u_s, u_n 을 소거하면 변형률 ϵ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\epsilon = \cos\phi \left(\frac{d(h\theta_x)}{2dx} \cos\phi - \frac{h\theta_x}{2} \sin\phi \frac{d\phi}{dx} + \frac{dw}{dx} \sin\phi + w \cos\phi \frac{d\phi}{dx} \right) \quad (6)$$

계산된 변위와 이미 알고 있는 보의 전체 모멘트 식에 의해 응력과 처짐을 구할 수 있다. 힘과 모멘트에 의한 변위는 Fig. 4에서 보여지고 있다. 이때 단위 폭당 인장력 F 는 다음과 같다.

$$F = E\epsilon t = Et \cos\phi \left(\frac{d(h\theta_x)}{2dx} \cos\phi + \frac{dw}{dx} \sin\phi \right) \quad (7)$$

Fig. 4에 표시한 바와 같이 상단 외재(upper face sheet)에서는 인장력, 하단 외재(lower face sheet)에서는 같은 크기를 가지는 반대 방향의 힘이 작용한다. 그 두 힘이 전체 구조물의 우력 모멘트(coupling moment)를 발생하게 하고 또 이 인장력을 x, z 방향으로 분리했을 때 z 방향의 분력이 내재의 전단력에 영향을 미치게 된다. 그러므로 전체 구조물의 전단력은 외재의 z 방향 분력과 내재의 전단력의 합과 같은데 이점이 단면 가변시의 영향을 포함하게 된다. 그리고 x 방향의 힘은 외재에서의 인장응력에 의한 분력이다. 이와 같이 우력 모멘트 M 과 전단력 Q 는 각각 다음과 같이 표시할

수 있다.

$$M = F \cos\phi h \quad (8)$$

$$Q = Q_{core} + 2F \sin\phi \quad (9)$$

여기서 Q_{core} 는 내재에서 생기는 전단력이고, γ_{xz} 가 xz 평면에 발생하는 전단 변형률이라 할 때 Q_{core} 는 다음과 같이 나타내진다.

$$Q_{core} = (G\gamma_{xz}) h \quad (10)$$

따라서 식(8)에 식(7)를 대입하면 우력 모멘트는 다음과 같이 표현된다.

$$M = Eth \cos^2\phi \left(\frac{d(h\theta_x)}{2dx} \cos\phi + \frac{dw}{dx} \sin\phi \right) \quad (11)$$

본 논문에 사용된 샌드위치 보는 2차원적 평면응력이기 때문에 외재의 y 방향 변형률 ϵ_y 와 xz 평면 내의 전단 변형률 γ_{xz} 는 영이 되어 무시한다. 한편 식(8)을 식(9)을 대입하면 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$Q = Q_{core} + \frac{2M}{h} \tan\phi \quad (12)$$

변형각 θ_x , 전단변형 γ_{xz} , 처짐각 dw/dx 는 식(13)과 같은 기하학적인 관계가 있다.⁽³⁾

$$\theta_x = \frac{dw}{dx} - \gamma_{xz} \quad (13)$$

식(13)을 식(12)에 대입하면 전단력은 다음과 같다.

$$Q = Gh \left(\frac{dw}{dx} - \theta_x \right) + \frac{2M}{h} \tan\phi \quad (14)$$

여기서 G 는 전단 상수이다.

식(14)를 $h\theta_x$ 에 대해 정리하면 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$h\theta_x = h \frac{dw}{dx} - \frac{1}{G} \left(Q - \frac{2M}{h} \tan\phi \right) \quad (15)$$

$h\theta_x$ 를 소거하기 위해 식(15)를 식(11)에 대입하고 $dh/dx = -2\tan\phi$ 를 사용하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{2M}{Eth^2 \cos^3\phi} - 2 \frac{\tan\phi}{Gh^2} \left(\frac{dM}{dx} + \frac{2M}{h} \tan\phi \right) + \frac{1}{Gh} \frac{dQ}{dx} \quad (16)$$

우리가 이미 알고 있는 굽힘모멘트와 전체 전단력은 L 을 보의 길이라 할 때 다음과 같이 나타낸다.

$$M = P(L - x) \quad (17)$$

$$Q = P \quad (18)$$

Fig. 2에 있는 보에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$y(0) = 0 \quad (19)$$

$$\theta_x(0) = 0$$

$$= > \left(\frac{dw}{dx} - \frac{P}{Gh} \left(1 - \frac{2L}{h} \tan\phi \right) \right)_{x=0} = 0 \quad (20)$$

변하는 내재와 외재의 두께를 1차 함수로 가정하면 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$h = h_0 \left(1 - \beta_c \frac{x}{L} \right) \quad (21)$$

$$t = t_0 \left(1 - \beta_r \frac{x}{L} \right) \quad (22)$$

여기서 h_0 는 $x=0$ 에서 내재의 두께이고 t_0 는 $x=0$ 에서 외재의 두께이다. 그리고 β_c, β_r 는 각각 내재와 외재의 경사 계수(tapering coefficient)이다.

외재에 발생하는 인장응력은 F 를 면적으로 나눈 량이므로 식(8)로 부터 유도된다.

$$\sigma = \frac{M}{th \cos\phi} \quad (23)$$

내재에 발생하는 전단응력은 식(12)의 전단력 Q 를 면적으로 나눈값으로 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\tau = \frac{Q(h - 2(L - x) \tan\phi)}{h^2} \quad (24)$$

(2) 등방성 재료의 샌드위치 평판에 대하여

Fig. 1은 등방성 재료를 사용한 가변 샌드위치 평판이다. 주어진 좌표계에 대해서 길이가 L , 폭이 b , 두께가 h 와 t 인 샌드위치 평판은 Fig. 3에서 나타난 바와 같이 처짐과 변형각을 예상할 수 있다. 이 예상한 처짐과 변형각을 역학적 경계 조건(kinematic boundary condition)에 맞게 어떤 함수로 가정하는데 여기서는 처짐 w 와 변형각 θ_x, θ_y 는 다음과 같이 가정되었다.

$$w = x^2(C_0 + C_1y + C_2y^2) \quad (25)$$

$$\theta_x = C_3x \quad (26)$$

$$\theta_y = x(C_4 + C_5y) \quad (27)$$

앞의 보 해석은 엄밀해를 구하는데 반해 평판해석은 근사해를 구하고 있다. 물론 복잡한 도출과정에 의해 제한된 경계조건하에서 평판의 엄밀해를

구할 수 있으나 이는 해석시에만 가능할 뿐 최적설계에 적용시키기에는 너무 복잡한 면이 있다.

상단 외재에 발생하는 변형 ϵ_s, ϵ_y 는 다음과 같다.

$$\epsilon_s = \frac{\partial u_s}{\partial s} - \frac{u_n}{\rho} = \cos\phi \frac{\partial u_s}{\partial x} - \frac{u_n}{\rho} \quad (28)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (29)$$

식(1), (2), (3)의 각 변위를 식(28), (29)에 대입하면 접선 방향의 변형률 ϵ_s , y 방향의 변형률 ϵ_y 와 전단 변형률 γ_{sy} 를 구할 수 있다.

$$\epsilon_s = \frac{h}{2} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \cos^2\phi + \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) \cos\phi \sin\phi \quad (30)$$

$$\epsilon_y = \frac{h}{2} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \quad (31)$$

$$\gamma_{sy} = \frac{h}{2} \cos\phi \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + \sin\phi \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right) \quad (32)$$

내재에서 전단 변형률 γ_{xz}, γ_{yz} 는 다음과 같다.

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \quad (33)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \quad (34)$$

위의 변형률을 이용해서 샌드위치 평판의 전체 포텐셜 에너지(total potential energy)에 대한 식을 유도할 수 있는데 이는 에너지 법에 의해 그 처짐과 변형각을 구하기 위함이다. 먼저 변형 에너지(strain energy, U)에 대한 식을 구한다. 상단 외재(upper face sheet)의 변형 에너지(strain energy) U_{face} 는 다음과 같이 표현이 된다.

$$U_{face} = \frac{1}{2} \iint t (\sigma_s \epsilon_s + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{sy} \gamma_{sy}) ds dy \quad (35)$$

두개의 외재에 대한 변형 에너지(strain energy) 합 U_{face} 는 $ds/dx = \sec\phi$ 를 이용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$U_{face} = 2U_{Face} = \iint t (\sigma_s \epsilon_s + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{sy} \gamma_{sy}) \sec\phi dx dy \quad (36)$$

내재의 변형 에너지(strain energy) U_{core} 는 다음과 같이 나타낸다.

$$U_{core} = \frac{1}{2} \iint h (\tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dx dy \quad (37)$$

이 외재와 내재의 변형 에너지 (strain energy)를 합하면 전체 변형 에너지 (total strain energy) U 가 된다.

$$U = \iint t (\sigma_s \epsilon_s + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{sy} \gamma_{sy}) \sec \phi dx dy + \frac{1}{2} \iint h (\tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dx dy \quad (38)$$

$$\sigma_s = E_{ss} (\epsilon_s + \nu_y \epsilon_y) \quad (39)$$

$$\sigma_y = E_{yy} (\epsilon_y + \nu_s \epsilon_s) \quad (40)$$

위의 식 (38)을 변형률에 대한 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$U = \int_0^L \int_0^b [(E_{ss} t (\epsilon_s^2 + \nu_y \epsilon_y \epsilon_s) + E_{yy} t (\epsilon_y^2 + \nu_s \epsilon_s \epsilon_y) + G_{sy} t \gamma_{sy}^2) \sec \phi + \frac{1}{2} G_x h \gamma_{xz}^2 + \frac{1}{2} G_y h \gamma_{yz}^2] dx dy \quad (41)$$

여기서 $E_{ss} = E / (1 - \nu_s \nu_y)$, $E_{yy} = E / (1 - \nu_s \nu_y)$, ν_s 는 접선 방향의 포아송 비이며 ν_y 는 y 방향의 포아송 비이다. 그리고 G_{sy} , G_x , G_y 는 각각의 전단 상수이다.

다음은 외부 일 (virtual work) V 에 대한 식을 유도하였고 이 식은 다음과 같다.

$$V = \iint (-P(x, y) w(x, y) - m_x^*(x, y) \theta_x(x, y) - m_y(x, y) \theta_y(x, y)) dx dy \quad (42)$$

여기서 $m_x^* = m_x + Ph \tan \phi$ 이며 m_x , m_y 는 x , y 방향에 각각의 중립면에 대한 외력 모멘트 (external moment per unit of middle surface)이다.

위 식 (41)과 (42)를 합하면 Total Potential Energy가 된다.

$$\text{Total Potential Energy (TPE)} = U + V \quad (43)$$

따라서 전체 포텐셜 에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \text{TPE} = \int_0^L \int_0^b & [(E_{ss} t (\epsilon_s^2 + \nu_y \epsilon_y \epsilon_s) + E_{yy} t (\epsilon_y^2 + \nu_s \epsilon_s \epsilon_y) + G_{sy} t \gamma_{sy}^2) \sec \phi \\ & + \frac{1}{2} G_x h \gamma_{xz}^2 + \frac{1}{2} G_y h \gamma_{yz}^2 \\ & - P(x, y) w(x, y) - m_x^*(x, y) \theta_x(x, y) \\ & - m_y(x, y) \theta_y(x, y)] dx dy \quad (44) \end{aligned}$$

위에서 구한 전체 포텐셜 에너지를 최소화 하기 위해 각 계수에 대해서 미분을 취한다.

$$\frac{\partial \text{TPE}}{\partial C_i} = 0 \quad i=0, 1, \dots, 5 \quad (45)$$

미분을 통해 나온 식을 연립하면 C_0 , C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , C_5 의 계수를 구할 수 있고 앞에서 가정되었던 처짐 (w)와 변형각 (θ)을 구할 수 있다.

이 처짐과 변형각을 이용하여 각각의 응력을 구한다. 다음에 나타나는 식은 외재의 인장응력 σ_s , σ_y 와 전단응력 τ_{sy} 및 내재의 전단응력 τ_{xz} , τ_{yz} 이다.

$$\begin{aligned} \sigma_s = E_{ss} & \left(\frac{h}{2} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \cos^2 \phi + \nu_y \frac{h}{2} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) \cos \phi \sin \phi \right) \quad (46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y = E_{yy} & \left(\frac{h}{2} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \nu_s \frac{h}{2} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \cos^2 \phi \right. \\ & \left. + \nu_s \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) \cos \phi \sin \phi \right) \quad (47) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{sy} = G_{sy} & \left(\frac{h}{2} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \cos \phi \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right) \sin \phi \right) \quad (48) \end{aligned}$$

$$\tau_{xz} = G_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) \quad (49)$$

$$\tau_{yz} = G_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right) \quad (50)$$

3. 최적설계의 수식화

본 논문에서 최적설계를 적용하기 위해 각 경우 (1) 등방성 재료의 샌드위치 보, (2) 등방성 재료의 샌드위치 평판을 해석하였다. 이 때 각각의 해석에서 구한 처짐과 응력값을 제한조건으로 정하였고, 구조물의 중량 (weight)를 목적 함수로 취해 구조물의 중량을 최소화 하였다. 이 때 제한조건의 크기 및 계수들은 이미 발표된 연구에서 채택하였다.⁽⁶⁾ 설계변수는 외재와 내재의 두께, 그리고 경사 계수 (tapering coefficient)로 설정하였다. 그리고 구조물에서 최대 응력이 발생하는 점이 일반적으로 예상되지 않는 관계로 구조물의 길이를 10등분하여 각 절점에서 응력을 평가하였다. 처짐 조건은 구조물 끝의 상단부의 처짐만이 고려되었다. 등방성 재료에서 외재는 알루미늄의 물성치를 사용했으며 내재는 Honeycomb의 물성치를 사용했다. 이때 외재의 영 계수 (young's modulus) E 값은 207×10^9 Pa이고 내재의 전단계수 (shear modulus) G 값은 28×10^9 Pa이며 외재의 포아송비는 0.3이다. 최적설계과정에서 사용한 최적 프로그램은

IDESIGN3^(10~11)을 이용하였으며 알고리즘으로는 반복 이차 프로그램(RQP)⁽⁹⁾을 채택하였다. 이에 각 문제에 대한 최적설계의 수식화는 다음과 같이 표현된다.

- (1) 등방성 재료의 샌드위치 보에 대한 수식화 목적함수

$$\text{보의무게} = \int_0^L (2\gamma_f \frac{ds}{dx} t + \gamma_c h) dx \quad (51)$$

제한조건

- (가) 외재에서 최대 인장응력

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{allow}} = 1.2 \times 10^9 \text{ Pa}$$

$$\sigma = \frac{M}{th \cos \phi} \leq \sigma_{\text{allow}} \quad (52)$$

- (나) 내재에서의 최대 전단응력

$$\tau_{\max} \leq \tau_{\text{allow}} = 1.4 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$\tau = \frac{Q(h - 2(L - x) \tan \phi)}{h^2} \leq \tau_{\text{allow}} \quad (53)$$

- (다) 최대 처짐 $\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{allow}} = 0.00254 \text{ m}$ (54)

- (2) 등방성 재료의 샌드위치 평판에 대한 수식화 목적함수

$$\text{보의무게} = \int_0^L \int_0^b (2\gamma_f \frac{ds}{dx} t + \gamma_c h) dx dy \quad (55)$$

제한조건

- (가) 외재에서 최대 인장응력

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{allow}} = 1.2 \times 10^9 \text{ Pa}$$

$$\sigma_s = E_{ss} \left(\frac{h}{2} \frac{\partial \theta_s}{\partial x} \cos^2 \phi + \nu_s \frac{h}{2} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) \cos \phi \sin \phi \right) \quad (56)$$

$$\sigma_y = E_{yy} \left(\frac{h}{2} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \nu_s \frac{h}{2} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \cos^2 \phi + \nu_s \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) \cos \phi \sin \phi \right) \quad (57)$$

$$\tau_{sy} = G_{sy} \left(\frac{h}{2} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \cos \phi + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right) \sin \phi \right) \quad (58)$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_s + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_s - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{sy}^2} \quad (59)$$

$$\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2} = \sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{allow}} \quad (60)$$

- (나) 내재에서의 최대 전단응력

$$\tau_{\max} \leq \tau_{\text{allow}} = 1.4 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$\tau_{xz} = G_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) \leq \tau_{\text{allow}} \quad (61)$$

$$\tau_{yz} = G_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right) \leq \tau_{\text{allow}} \quad (62)$$

- (다) 최대 처짐 $\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{allow}} = 0.00254 \text{ m}$ (63)

4. 결과 및 고찰

샌드위치 구조물의 각각의 경우를 같은 조건하에서 최적설계하여 이때 형성된 기하학적 구조를 비교, 검토해 보았다. 앞에서 진술했듯이 여기서 사용한 외재는 등방성 재료에 알루미늄의 물성치를 사용하였으며 내재는 허니컴을 사용하였다. 하중 조건은 집중하중을 작용시켜 고찰하였다.

Table 1과 2에서는 각각의 해석을 비교하기 위하여 끝단에서의 처짐이 비교되었다. 이때 보와 평판을 동시에 비교하기 위하여 평판의 폭을 1 cm로 하여 보와 동일한 형상으로 만든 다음 보와 평판의 처짐을 비교해 보았다. Table 1과 2에서 볼 수 있듯이 평판의 처짐이 보의 처짐보다 다소 작게 나타나는데 이는 보에서 고려하지 않았던 포아송 비 때문에 평판의 강성이 더욱 커졌기 때문이다. 자세하게 설명하면 보에서의 관성 모멘트는 $I = t^3/12$ 이지만 평판에서 굽힘강성은 $t^3/12(1 - \nu^2)$ 이기 때문에 $\nu = 0.3$ 으로 계산했을 때 약 10% 정도 평판의 강성이 높게 평가되고 덧붙여 에너지법의 적용에서 앞에서 가정한 처짐식의 차수가 낮으므로 처짐정도가 정밀하지 못하여 더욱 강성이 높게 평가된다. 그 결과로 처짐량이 약 25% 정도 차이가 나게 된다.

Fig. 5와 Fig. 6은 각각의 경우에 대한 응력 분포를 비교하고 있다. Fig. 5는 외재의 인장응력에 대

Table 1 Deflection in concentrated load (cm)

Concentrated Load	Sandwich Beam of Isotropic Material	Sandwich Plate of Isotropic Material
150 N	1.3580	1.0142
100 N	0.9054	0.6761
50 N	0.4527	0.3381

Table 2 Deflection in concentrated load (cm) $\phi = 0$

Concentrated Load	Sandwich Beam of Isotropic Material	Sandwich Plate of Isotropic Material
150 N	1.3584	1.0140
100 N	0.9056	0.6760
50 N	0.4528	0.3380

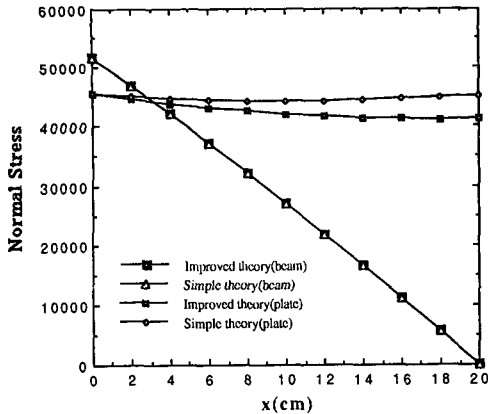


Fig. 5 Normal Stress Analysis of Face Sheet under the Load(100 N)

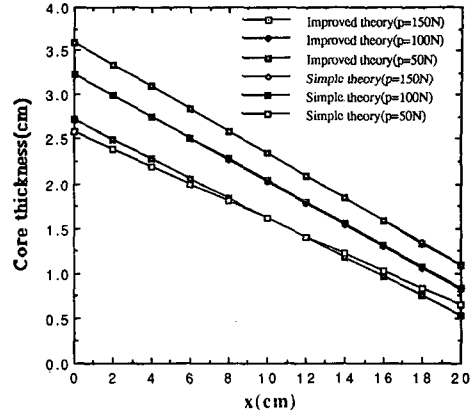


Fig. 7 Core Thickness Variation with Respect to Concentrated Loads in a Beam

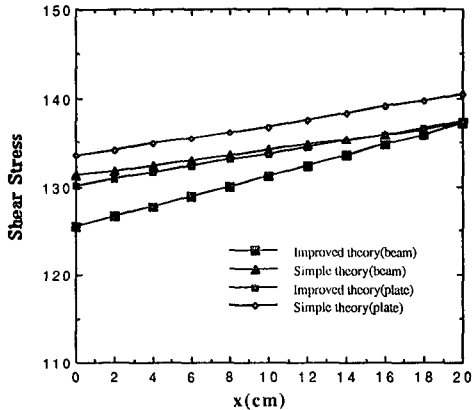


Fig. 6 Shear Stress Analysis of Core under the Load(100 N)

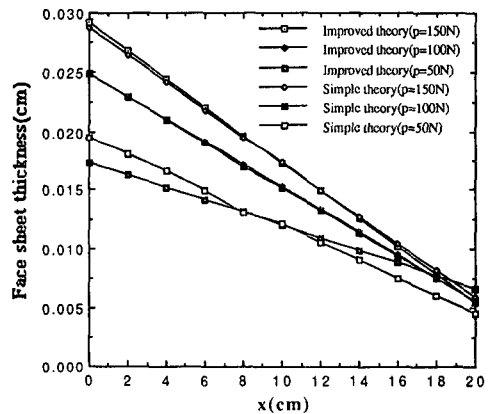


Fig. 8 Face sheet Thickness Variation with Respect to Concentrated Loads in Beam

한 결과인데, 구조물의 가변성이 무시된 즉 식(1)~(2)에서 $\phi=0$ 으로 가정하여 계산되는 종전의 해석방법과 본 연구에 사용된 개선된 해석방법이 외재에 작용하는 인장응력에서는 별다른 차이가 없다. 이는 외재에는 인장력만이 작용되고 있으므로 인장응력에서의 힘과 모멘트의 크기가 종전 해석방법에서의 것과 계산방법이 거의 같기 때문이다. 그리고 평판과 보의 결과를 비교하면 보이론과 평판이론의 차이로 인해 그 결과치의 차이가 생기는데 이러한 차이에서도 처짐의 결과에서와 같은 요인들로 인해 일어나는 차이라 할 수 있겠다. Fig. 6은 내재의 전단응력에 관한 것으로 종전의 해석방법과 개선된 해석방법의 결과가 다를 수 있다. 이는 가변성을 고려함으로 인해 인장응력의 수직분력

이 전단응력에 영향을 끼치고 있기 때문이다. 인장응력의 수직분력이 전체 전단력을 감소시키는 작용을 하므로 내재의 전단력이 인장응력의 수직분력만큼 작아진다. 그러므로 개선된 방법에 의한 전단응력이 종전의 방법에 비해 적은 전단응력을 도출한다. 그리고 평판과 보를 비교하면 엄밀해와 근사해의 차이로 인해 생기는 오차라 볼 수 있다. 이도 마찬가지로 처짐의 결과와 같은 요인이라 할 수 있다.

이러한 해석으로부터 얻은 결과를 최적설계에 적용시켜 고찰하였다. Fig. 7과 Fig. 8은 집중하중을 받을 때 보에서 각각의 두께 변화를 비교하고 있다. 목적함수의 결과는 Fig. 9에 나타나 있다. 이들 결과에서는 종전의 해석방법과 개선된 해석방법

이 크게 차이가 없다. 이것은 응력값들이 거의 비슷한 값을 가지므로 최적설계시 두께의 차이에는 영향을 줄 수 없기 때문이다.

평판에 대한 결과는 Fig. 10, 11, 12에 나타나 있다. Fig. 10은 평판에서 집중하중을 받을 때 내재의 두께변화에 대한 결과이고 Fig. 11을 외재의 두께변화에 대한 결과이다. Fig. 10과 Fig. 11에서 알 수 있듯이 150 N과 100 N일때의 결과가 종전해석 방법과 개선된 해석방법에서 차이가 나고 있다. 이는 두께 함수를 선형으로 가정했기 때문에 최적 두께를 제대로 나타내지 못하고 있다. 더 높은 차수의 두께함수를 이용하면 최적치의 두께를 얻을 수 있으리라 예상되며 구간별로 내간법(Interpolation)을 사용하는 것도 좋은 방법일 것으로 생각된다. 하중 50 N에서는 두가지 해석방법의 최적치가 비슷하게 나오고 있다. 이 결과로 하중이 커질수록 두께의 변화가 심해진다는 것을 알 수 있다. Fig. 12는 평판에서의 목적함수의 결과이다. 이 목적함수의 결과에서는 종전의 해석방법이 더 가볍게 나타나는데 이것은 앞의 두께 결과에서 발생하는 최적두께의 부정확한 값 때문이다. 그 예로서 하중 50 N일때 결과를 보면 두께가 최적값을 찾을 때 목적함수의 값이 종전의 해석방법과 거의 비슷한 값을 가진다. 이에 앞에서도 언급했듯이 두께의 함수조건을 바꿔줌으로서 최적의 결과를 가질 수 있으리라 예상된다.

위에서 설명한 내용과 그 결과를 검토해 본 바 종전 해석방법에 의한 설계가 더욱 경량이면서 부피도 적지만 안전 설계 관점에서 볼 때에는 응력이

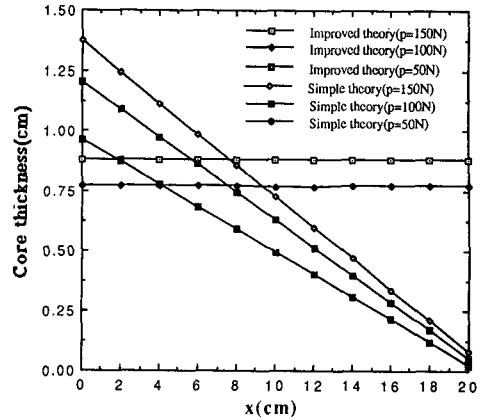


Fig. 10 Thickness Variation with Respect to Concentrated Loads in Plate

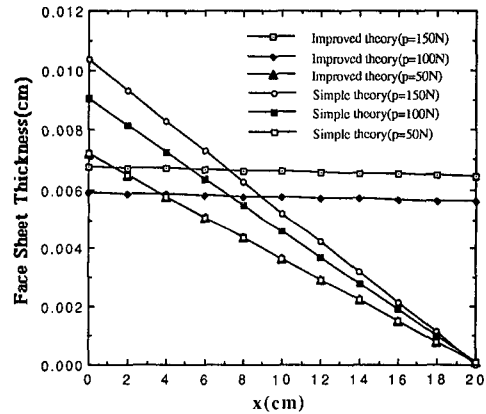


Fig. 11 Face Sheet Thickness Variation with Respect to Concentrated Loads in Plate

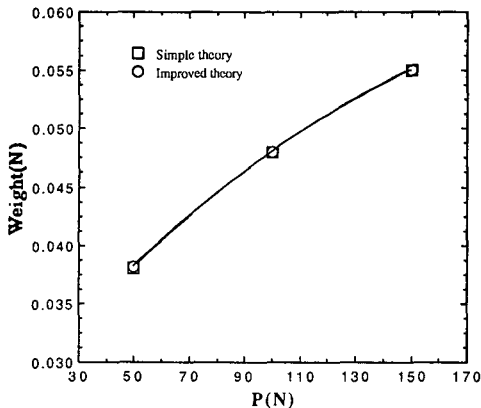


Fig. 9 Total Beam Weight with Respect to Concentrated Loads

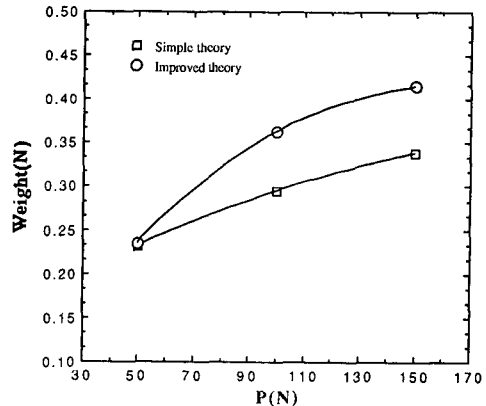


Fig. 12 Total Plate Weight with Respect to Concentrated Loads

적게 계산되는 개선된 해석방법이 적합하다고 볼 수 있겠다. 한편 경량 설계에서 더욱 경제적인 설계를 위해 이방성 재료를 외재로 사용한 샌드위치 구조물을 설계하면 좀더 경량의 설계를 할 수 있을 것이라 사료된다.

5. 결 론

샌드위치 구조물의 각각의 경우를 보 이론과 평판 이론의 해석 방법을 도입하여 최적설계하였다. 이때 형성된 기하학적 구조를 비교, 검토한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 샌드위치 구조물 같이 응력해석이 이론적으로 이루어질 수 있는 구조물의 설계에는 최적설계 방식의 도입이 적절하다고 판단된다.

(2) 등방성 재료를 사용한 샌드위치 평판의 폭을 1 cm로 하여 보와 동일한 형상으로 해석하였을 때 샌드위치 평판의 에너지법의 적용과 포아송비 때문에 약 25% 정도 더 강성이 높게 평가된다.

(3) 종전 해석방법으로 계산한 결과와 개선된 해석방법으로 계산한 결과는 크게 차이는 나지 않지만 전단응력에 미치는 영향에 있어서 약간의 차이를 보일 수 있으므로 적게 평가되는 개선된 해석 방법이 더욱 안전하게 설계할 수 있다고 사료된다.

(4) 보와 평판에서 응력분포와 두께, 목적함수의 결과가 두가지 해석방법에 의해 전반적으로 같은 경향을 나타내고 있다. 평판에서 좀 더 정확한 결과를 얻기 위해서는 높은 차수의 두께함수를 선정하여 계산하면 좋은 결과를 얻을 수 있을 것이다.

(5) 목적함수의 결과에서는 가변성 고려여부에 따라 더욱 안전설계를 할 수 있다.

(6) 보다 다양한 설계 요구를 충족시켜 주기 위해서 이방성 재료를 사용한 샌드위치 구조물이 연구되어지면 더욱 경량설계를 할 수 있다고 생각한다.

후 기

본 연구는 1990년 과학재단 신진연구비 지원으로 수행되었으며 (과제번호 : 903-0908-003-2) 관계자 여러분께 감사 드립니다.

참고문헌

- (1) Huang, S.N. and Alspaugh, D.W., 1974, "Minimum Weight Sandwich Beam Design," AIAA Jnl. 12 1617-1618.
- (2) Libove, C. and Lu, C.H., 1988, "Beam Like Bending of Variable-Thickness Sandwich Plates," AIAA Jnl. 24.
- (3) Paydar, N., 1985, "Stress Analysis of Variable Thickness Sandwich Plates of Rectangular Planform."
- (4) Chang Fo Van, "Bending of Uniformly Loaded Cantilever Rectangular Plates, Applied Mathematics and Mechanics, English Edition, Vol. 1, No. 3, 1980.
- (5) Paydar, N. and Park, G.J., 1990, "Optimal Design of Sandwich Beams," Computer and Structures, Vol. 34.
- (6) Alspaugh, D.W., 1976, "Minimum Weight Design of Axisymmetric Sandwich Plate," AIAA Jnl. 14 1683-1689.
- (7) Ko, C.L., 1988, "Flexural Behavior of a Rotating Sandwich Tapered Beam," AIAA Jnl. 27.
- (8) Arora, J.S., "Optimum Design," Mc Graw-Hill Book Company.
- (9) Thanedar, P.B., et al., 1986, "Performance of some RQP algorithms on structural design algorithms," Int. J. Number. Meth. Engng 23, 2187-2202.
- (10) Arora, J.S. and Tseng, C.H., 1986, "IDESIGN User's Manual Version 3.5," Optimal Design Laboratory, University of Iowa, Iowa City, IA.
- (11) Park, G.J. and Arora, J.S., 1985, "Role of data base management in design optimization systems," J. Aircraft 24, 745-750.
- (12) James, M.L., Smith, G.M. and Wolford J.C., 1985, "Applied Numerical Method for Digital Computer, Harper and Row, Publisher, New York.