

OTF계산값을 이용한 ERF계산

심상현 · 정창섭

전남대학교 물리학과

(1993년 3월 22일 받음)

Optical Transfer Function(OTF)으로부터 Edge Response Function(ERF)을 계산하는 computer program을 작성하였다. 이 program을 사용하여 무수차 광학계와 몇가지 형태의 수차를 포함하는 광학계의 ERF를 계산하였다. 왜곡수차, 촛점이동, 비점수차, 코마 또는 구면수차 등의 단일수차 및 이들이 조합된 몇가지 형태의 복합수차 등을 포함하는 광학계를 고려하였다. 계산의 결과로부터 sagittal case의 경우, 촛점이동이나 구면수차가 코마에 비하여 ERF에 나쁜 영향을 미치며, tangential case의 경우, 코마가 촛점이동과 구면수차보다 나쁜 영향을 미침을 알았다. 한편 코마는 tangential case의 ERF의 형태와 위치를 변화시키지만 왜곡수차는 상의 위치만을 변화시킨다는 것도 확인 할 수 있었다. 또한 코마와 왜곡수차를 포함하는 광학계의 tangential case의 ERF는 이들중 하나의 수차만 포함하는 경우보다 오히려 좋은 형태를 나타내어 두 수차가 상호 보완적인 영향을 미침을 알았다.

I. 서 론

광학계의 성능을 평가하기 위하여 사용하는 함수들로는 Point Spread Function(PSF), Line Spread Function(LSF), Edge Response Function(ERF), Optical Transfer Function(OTF) 등이 알려져 있다. 이들 중 PSF, OTF 등은 광학계에 대한 많은 정보를 포함하는 좋은 평가 함수들로 알려져 있으나, 이들의 실제 측정에는 어려움이 있으며, 실제적 측정에 있어서는 PSF나 OTF보다는 LSF 또는 ERF를 사용하는 것이 비교적 용이하다.^[1]

그러나 OTF, PSF에 대해 많은 연구가 이루어진 반면, LSF, ERF에 대하여는 비교적 적은 연구가 이루어져 왔으며, Weinstein^[2] 혹은 Barakat과 Houston^[3]에 의하여 촛점이동 수차를 비롯한 몇가지 형태의 제한된 수차를 포함하는 광학계에 대한 ERF가 계산된 바 있다.

ERF는 LSF로부터 계산해 낼 수 있으며, 또한 OTF로부터 계산해 낼 수도 있다. 그런데 LSF로부터의 계산에는 무한한 영역에 대한 적분이 필요하고, OTF로부터의 계산에는 유한적분으로 계산이 가능하다. 따라서 이론적 계산에 있어서는 OTF로부터 ERF를 계산하는 것이 유리하므로, 본 연구에서는 Barakat^[4]에 의하여 발표된 OTF계산값으로부터 ERF를 이론적으로 계산하는 방법을 컴퓨터 프로그램화 하였으며, Weinstein^[2]의 촛점이동 ERF 계산값과 본 프로그램에 의한 촛점이동

ERF 계산값을 비교하여 프로그램의 정확도를 확인하였다.

광학계가 왜곡수차, 촛점이동, 비점수차, 코마 또는 구면수차 중 한가지 수차를 포함하는 경우와 이들의 수차를 두가지 이상 복합적으로 포함하는 몇가지 경우에 대하여 ERF를 계산하여 보았다. 이들을 분석하여 위의 단일 수차들이 광학계의 ERF에 미치는 영향을 살펴보고 있으며, 또한 두가지 이상의 수차를 복합적으로 포함하는 광학계의 ERF변화를 분석하여 수차들 상호간의 보완적 효과를 확인하였다.

II. 이 론

1. 동함수

광학계의 동함수는

$$f(x,y) = T(x,y) \exp \{i(kW(x,y))\} \quad (1)$$

와 같이 동상의 좌표 (x,y) 에서의 amplitude transmittance $T(x,y)$ 와 파면수차함수 $W(x,y)$ 의 조합으로 표현된다. 여기에서 amplitude transmittance $T(x,y)$ 는 동의 형태가 원형이며, 동상의 모든 영역에서 일정한 진폭분포를 갖는 일반적인 광학계의 경우에는 동의 반경과 진폭분포를 규격화하여

$$T(x, y) = \begin{cases} 1 & \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \\ 0 & \sqrt{x^2 + y^2} > 1 \end{cases} \quad (2)$$

과 같이 쓸 수 있으며, 파면수차함수 $W(x, y)$ 는

$$W(x, y) = \sum_{m, p} W_{mp} (x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}} y^p \quad (3)$$

와 같은 식으로 표현된다. 여기에서 m 은 1, 2, 3, ... 등과 같은 정수이고, 이때 p 는 $m, m-2, m-4, \dots \geq 0$ 과 같은 정수이며, 실제에 있어서는 부가된 수차의 종류에 따라 m 과 p 가 결정되어진다.

2. 물체에 대한 상의 표현식^[4]

(1)식과 같은 동함수를 갖는 광학계의 상면의 좌표 (x', y') 에서의 복소회절진폭은

$$F(x', y') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp\{i(x'x + y'y)\} dx dy \quad (4)$$

와 같이 동함수를 Fourier transform함으로써 계산되어지며, point spread function(PSF)은

$$d(x', y') = \left| \frac{F(x', y')}{F(0, 0)} \right|^2 \quad (5)$$

과 같이 복소회절진폭을 제곱함으로써 구할 수 있다.

한편, 물체 $o(x, y)$ 의 상 $h(x', y')$ 는

$$h(x', y') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d(x' - x, y' - y) o(x, y) dx dy \quad (6)$$

와 같이 물체공간 전체에 대한 PSF의 적분으로부터 계산할 수 있다.

(6)식을 Fourier transform하면 convolution 정리로부터

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{h(x', y')\} &= \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d(x' - x, y' - y) o(x, y) dx dy\right\} \\ &= \mathcal{F}\{d(x', y')\} \mathcal{F}\{o(x, y)\} \end{aligned} \quad (7)$$

와 같이 PSF의 Fourier transform(OTF)과 물체의 Fourier transform(공간주파수 스펙트럼)의 곱으로 표현되며, 이들을 각각

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{h(x', y')\} &= H(s, t) \\ \mathcal{F}\{d(x', y')\} &= D(s, t) \\ \mathcal{F}\{o(x, y)\} &= O(s, t) \end{aligned} \quad (8)$$

와 같이 정의하면, (7)식은

$$H(s, t) = D(s, t) O(s, t) \quad (9)$$

와 같이 정리되며, 여기에서 s 와 t 는 공간주파수이다. (9)식을 역Fourier transform하면

$$h(x', y') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} D(s, t) O(s, t) \exp\{i(x's + y't)\} ds dt \quad (10)$$

와 같이 OTF를 이용하여 $o(x, y)$ 에 대한 $h(x', y')$ 를 구할 수 있는 식을 만들 수 있다.

한편, PSF의 Fourier transform인 OTF, $D(s, t)$ 는

$$D(s, t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d(x', y') \exp\{i(sx' + ty')\} dx' dy'}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d(x', y') dx' dy'} \quad (11)$$

와 같이 계산되어진다.

3. Edge Response Function^[4]

물체가 edge나 bar target 등 등경각 ϕ 를 갖는 선물체일 경우에는 극좌표계를 사용하는 것이 간편하므로

$$\begin{aligned} \omega &\equiv (s^2 + t^2)^{1/2} \\ \phi &\equiv \arctan\left(\frac{t'}{s'}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

$$u \equiv (x'^2 + y'^2)^{1/2}$$

와 같이 정의하고, 차원이 없는 공간주파수 ω 가 길이의 역수의 차원을 갖는 실제공간주파수 Ω , 입사파장 λ 및 광학계의 f -수들과

$$\Omega = \frac{\omega}{2\lambda f} \quad (13)$$

과 같은 관계로 정의되면, Ω 가 $1/\lambda f$ 보다 클 때, ω 가 2보다 클 경우에는 OTF값이 0이 되므로 $|\omega| < 2$ 이어야 한다. 따라서 (10)식은

$$h(u, \phi) = \int_{-2}^{+2} D(\omega, \phi) O(\omega, \phi) \exp(iu\omega) d\omega \quad (14)$$

와 같은 극좌표의 식으로 표현된다.

Edge response function(ERF)를 구하기 위한 물체 edge, $o(u)$ 는

$$o(u) = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ 1 & u > 0 \end{cases} \quad (15)$$

와 같고, 이로부터 edge의 상은

$$h(u, \phi) = \int_{-2}^{+2} \left\{ \pi \delta(\omega) + \frac{1}{i\omega} \right\} T(\omega, \phi) \exp(iu\omega) d\omega$$

$$= \pi + \int_{-2}^{+2} \frac{T(\omega, \phi)}{\omega} \exp(iu\omega) d\omega \quad (16)$$

와 같이 표현된다. 이 식을 $u \rightarrow +\infty$ 이면 1, $u \rightarrow -\infty$ 이면 0이 되도록 규격화하면^[3]

$$E(u, \phi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^2 D_r(\omega, \phi) \frac{\sin u\omega}{\omega} d\omega$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^2 D_i(\omega, \phi) \frac{\cos u\omega}{\omega} d\omega \quad (17)$$

와 같이 되며, 이 규격화된 $E(u, \phi)$ 를 edge response function(ERF)이라 한다. 여기에서 $D_r(\omega, \phi)$ 는 OTF의 실수부, $D_i(\omega, \phi)$ 는 OTF의 허수부를 나타낸다.

III. 수치계산 및 컴퓨터 프로그램

W. Weinstein^[2]은 초점이동 광학계에 대한 ERF를

$$E(p, v) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m p^{2m}$$

$$\times \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+2m)! v^{2n+1}}{(2n+1)! (n+2m+\frac{1}{2})! (n+2m+\frac{3}{2})!} \right\} \quad (18)$$

과 같이 급수해로 계산하였으며, v 가 ρ 에 비하여 클 경우에는

$$E(p, v) = \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{2}{v} + \frac{6}{v^3} - \frac{3}{40v^5} + \frac{16p^2}{3v^3} - \frac{8p^2}{v^5} + \frac{256p^4}{15v^5} \right.$$

$$+ \left(\frac{\pi}{v} \right)^{1/2} \sin \left(2v - \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{1}{v^2} - \frac{937}{512v^4} + \frac{2p^2}{v^4} \right)$$

$$+ \left(\frac{\pi}{v} \right)^{1/2} \cos \left(2v - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\left. \times \left(-\frac{17}{16v^3} + \frac{16813}{4096v^5} + \frac{39p^2}{8v^5} \right) \right\} + O\left(\frac{1}{v^6} \right) \quad (19)$$

와 같은 식으로 계산하였으며, 여기에서 사용된 변수 v 와 p 를 본 연구에서 사용한 u 와 W_{20} 로 나타내면

$$v = -2\pi u$$

$$p = 2\pi W_{20} \quad (20)$$

와 같다.

본 연구에서는 (17)식을 이용하여 OTF로부터 ERF를 계산하는 컴퓨터 프로그램을 작성하였으며, OTF값의 계산에는 본 연구진에 의하여 개발된 프로그램^[5]이 사용되었다. 개발된 ERF계산 프로그램의 정확도를 알아 보기 위하여 (18)식과 (19)식으로부터 계산된 W. Weinstein의 계산값과 비교하여 본 결과 대부분 0.001 이내의 오차를 나타내었으며, 비교적 오차가 크게 나타난 극소수의 경우에도 0.005정도의 오차를 벗어나지 않아 제작된 프로그램이 높은 정확도를 가지고 있음을 확인할 수 있었다.

IV. 계산결과 및 토의

1. 한가지 수차를 포함하는 광학계의 ERF

왜곡수차, 초점이동, 비점수차, 코마 또는 구면수차 등의 단일수차를 포함하는 광학계에 대한 ERF를 계산하여 보았다.

초점이동 광학계에 대한 ERF와 구면수차를 포함하는 광학계에 대한 ERF를 각각 그림 1와 그림 2에 보였다. 이들의 수차는 대칭수차이므로 sagittal case와 tangential case의 결과가 동일하다. 그러나 코마는 비대칭수차이므로 sagittal case와 tangential case에 대하여 각각 계산하였으며, 그 결과를 그림 3에 보였다. 한편 왜곡수차와 비점수차의 경우에는 sagittal case에는 영향을 미치지 않고, tangential case에 대해서만 작용하며, 이에 대한 계산의 결과를 그림 4와 그림 5에 각각 보였다. 그림 1과 그림 2를 보면 동일한 크기의 서로 다른 수차를 갖는 광학계의 경우에 sagittal case를 살펴보면, 초점이 동이나 구면수차에 비하여 코마는 비교적 그 영향이 작음을 알 수 있다. Tangential case의 경우에는 초점이

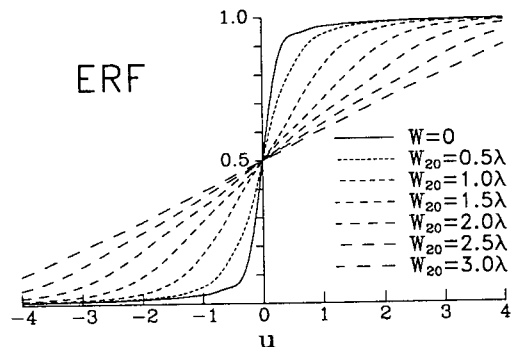


그림 1. 초점이동 광학계의 ERF

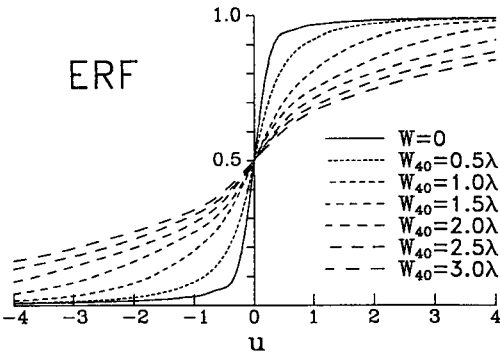


그림 2. 구면수차를 포함하는 광학계의 ERF

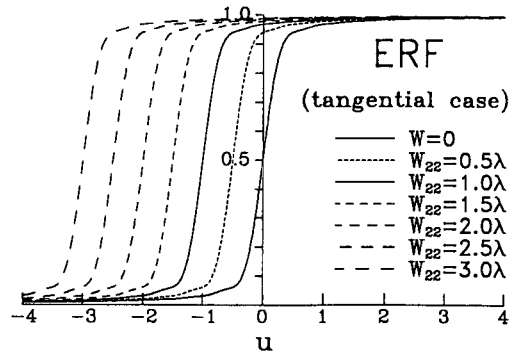


그림 4. 왜곡수차를 포함하는 광학계의 ERF (tangential case)

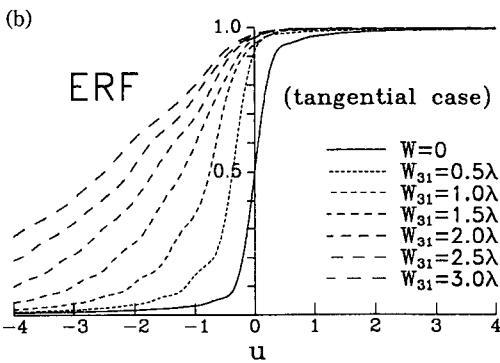
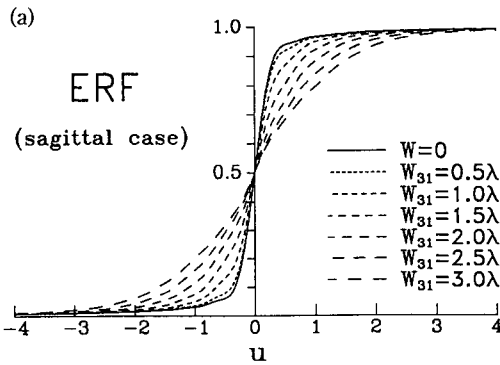


그림 3. 코마를 포함하는 광학계의 ERF
(a) sagittal case, (b) tangential case

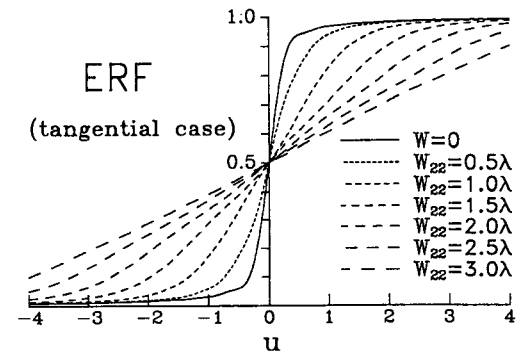


그림 5. 비점수차를 포함하는 광학계의 ERF (tangential case)

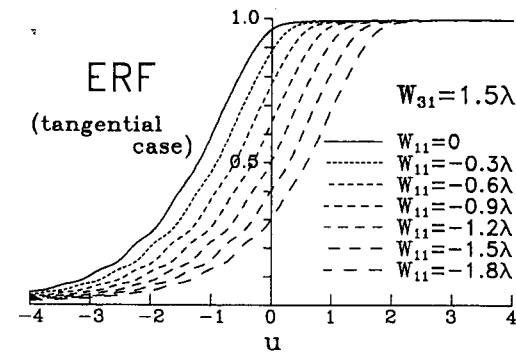


그림 6. 코마와 왜곡수차를 포함하는 광학계의 ERF (tangential case)

동과 비점수차가 같은 영향을 주며, 코마의 영향이 상대적으로 크게 나타남을 볼 수 있다. 또한 코마에 의한 영향으로 상의 형태의 변화와 더불어 위치가 이동현상이 나타나고, 왜곡수차에 의한 영향은 단지 상의 위치이동으로만 나타남을 알 수 있다.

2. 여러가지 수차를 포함하는 광학계의 ERF

한가지 수차를 포함하는 광학계의 ERF에 대한 분석에서 tangential case에 대한 경우 코마와 왜곡수차의 영향으로 상의 이동현상이 나타남을 확인하였다. 이로부터 이들 두 수차를 적절히 결합하면 상의 위치를 이상적인 상의 위치로 이동시킬 수 있음을 예측할 수 있다. 실제로

코마를 1.5λ 포함하고 왜곡수차를 $0, -0.3\lambda, -0.6\lambda, -0.9\lambda, -1.2\lambda, -1.5\lambda, -1.8\lambda$ 씩 포함하는 광학계에 대한 tangential case에 대한 ERF를 그림 6에 보였는데, 왜곡수차가 -1.2λ 인 부근에서 가장 좋은 상을 얻을 수 있음을 확인할 수 있다.

V. 결 론

광학계를 평가하는 여러가지 함수중 비교적 측정이 용이하고, 상질에 미치는 영향을 쉽게 파악할 수 있는 ERF를 계산하는 컴퓨터 프로그램을 작성하였고, 이 프로그램의 정확도가 높음을 확인하였다.

여러가지 형태의 수차를 포함하는 광학계의 ERF를 개발된 프로그램에 의하여 계산하여, 각각의 수차들이 ERF에 미치는 영향을 살펴본 결과 sagittal case의 경우 코마보다는 초점이동과 구면수차가 상질을 크게 저하시키는 것을 알 수 있었으며, tangential case의 경우에는 초점이동이나 비점수차보다 코마가 더욱 나쁜 영향을 끼침을 확인하였다. 코마에 의하여 ERF는 형태와 위치가 변화되며, 왜곡수차에 의하여는 위치만이 변화됨을 알았다.

한편, 코마나 왜곡수차에 의해 나타나는 상의 위치이동현상을 코마와 왜곡수차를 적절히 조합하여 없앨 수 있음을 확인하였다.

본 연구를 통하여 개발된 컴퓨터 프로그램은, 실제 광학계의 평가실험에서 얻은 ERF 측정데이터의 정확도를 확인하거나, 상질 향상을 위한 연구의 검증과정 등에 유용하게 사용될 수 있을 것이다. 또한 확인된 수차의 종류에 따른 ERF의 변화형태 및 수차들 상호간의 보완 효과는 보다 좋은 성능의 광학계를 설계하는 데 응용할 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

- [1] R. L. Lamerts, G. C. Higgins, and R. N. Wolfe, JOSA **48**, 487 (1958).
- [2] W. Weinstein, J. Opt. Soc. Am., **44**, 610 (1954).
- [3] R. Barakat and A. Houston, J. Opt. Soc. Am., **55**, 1132 (1965).
- [4] R. Barakat, *Topics in Applied Physics* Vol.41, (Springer-Verlag, Berlin, 1980) Chap. 2.
- [5] 정창섭, 심상현, 새물리 **28**, 233(1988).

Computation of the ERF from the OTF

Sang Hyun Sim and Chang Sub Chung

Department of Physics, Chonnam National University, Kwangju 500-757, Korea

(Received: March 22, 1993)

A computer program for computing the edge response function(ERF) from the optical transfer function(OTF) was developed. The ERFs of un-aberrated optical system and aberrated optical system were studied by the use of that program. We calculated the ERFs of the optical systems with a single aberration and with a combined aberration. In sagittal case, the ERF of the optical system with defocus or spherical aberration was worse than that with coma. In tangential case, the ERF of the optical system with coma was worse than that with defocusing or spherical aberration. Both the shape and the position of ERF were varied with coma, but only the position of ERF was varied with distortion, in tangential case.