

반원형 단면을 갖는 광도파로의 고유모우드의 벡터해*

양 순 철

목포대학교 물리학과

이형종 · 김한수

전남대학교 물리학과

(1993년 8월 5일 받음)

도파로의 전자기장을 Bessel함수와 삼각함수로 급수전개하고 코어와 클래드간의 경계면에서 유한한 갯수의 점들을 선택하여 각 점에 전자기장의 경계조건을 적용함으로써 반원형 단면을 갖는 광도파로의 벡터해를 구하였다. 그리고 각 고유모우드들의 전파상수와 에너지 분포를 구하여 그 특성을 토의하였다. 계산결과 반원형 단면의 대칭축에 대하여 even인 모우드의 전자기장 분포는 odd인 모우드의 E 가 H 로, $-H$ 가 E 로 바뀌어지는 것을 제외하고는 odd인 모우드와 거의 같았으며, 코어와 클래드의 굴절률 비가 1로 접근함에 따라서 even과 odd 모우드는 서로 축퇴됨을 볼 수 있었다.

I. 서 론

근래의 CVD(chemical vapor deposition), FHD(flame hydrolysis deposition) 등에 의한 실리카도파로의 제작 기술에 있어서 도파로의 열처리하는 도파로의 특성을 개선하기 위한 필수적인 공정이 되었다. 이들 도파로는 박막증착시에 광학적으로 거친 조직과 OH기 등의 불순물을 다량 포함하고 있다. 또한 도파로 패터닝 건식 식각(reactive ion etching)할 때는 건식에 의한 거친 계면이 생기게 된다. 따라서 도파로의 제작공정에 의한 이와같은 결함들을 제거하기 위하여 유화점 (flow temperature)이 낮은 BPSG (borophosphosilicate glass)와 같은 재료를 사용하여 도파로를 만든 다음 열처리를 하게되며 이때 도파로의 거친 계면과 미세조직 등이 재구성되어 도파로의 광전파손실이 0.02 dB/cm 정도로 매우 낮아지고,^[1] 유화 (flow)된 BPSG의 표면장력에 의하여 도파로의 코어가 반원모양으로 형성된다.^[2]

도파로의 모우드 계산은 도파로를 이용하는 광회로 소자의 설계 및 분석시에 필수적인 과정이다. 따라서 실리카도파로의 응용을 위하여 반원형 도파로의 도파모우드에 대한 정밀한 계산이 필요하게 되었다. 반원형 단면의 도파로에 대한 지금까지의 모우드 계산으로는

벡터 파동방정식을 스칼라 파동방정식으로 근사하여 2차원 푸리에 급수로 전개하는 스칼라 근사해법이 보고되었다.^[3] 이러한 스칼라 근사해법은 도파로의 코어와 클래드 간의 굴절률비가 1에 가까워질 때에 잘 맞는 방법이다. BPSG 도파로는 주로 광섬유에 연결되어 사용되는 모우드 구속이 약한 도파로이며, 따라서 이 방법은 BPSG 도파로에 대한 좋은 근사계산법이라 할 수 있다. 그러나 이 방법은 코어와 클래드 간의 굴절률 차가 커지면 잘 맞지 않으며 벡터특성을 포함하고 있지 않으므로 도파로의 편광특성 등을 계산할 경우에는 벡터 파동방정식을 직접 풀어서 도파모우드에 대한 벡터해를 구해야 한다.

Goell은 직사각형 도파로에 대한 도파모우드의 전자기장을 Bessel함수와 삼각함수의 급수로 표현하고 도파코어와 클래드간의 전자기장의 경계조건을 사용하여 컴퓨터로 도파로의 전파상수와 도파모우드의 벡터해를 구하였다.^[4] 본 연구에서는 이 방법을 반원 도파로에 적용하여 도파모우드의 전파상수와 벡터해를 구하였다. 2장에서는 반원 도파로의 H 성분간의 대칭성을 토의하고, 코어와 클래드의 경계면에서의 접선성분을 계산한 다음, 경계조건을 이용하여 경계면 양쪽의 전자기장을 일치시킴으로서 제차 연립 선형 방정식 (simulta-

*본 연구는 교육부 기초과학 학술연구조성비(BSRI-91-212)의 연구비 지원을 받아 이루어 졌음.

neous homogeneous linear equation)을 얻는다. 3장에서는 수치계산의 정확도를 토의하며 전파상수 분산곡선을 얻고, 각 모드들의 벡터해와 에너지 분포를 계산하여 그 결과를 토의한다.

II. 해 석

도파로의 코어와 클래드 영역의 유전상수는 각각 ϵ_0 , ϵ_1 의 값을 갖고 이들 값은 일정하다고 가정한다. 또한 두 영역에서의 투자율(permeability)은 자유공간에서의 값 μ_0 를 갖는다고 가정한다. 도파로의 좌표는 원통좌표계 (r, θ, z) 로 표현하며 그림 1과 같다. 여기서 빛의 전파방향은 $+Z$ 방향이다. 도파로의 전자기장의 Z 성분이 다음과 같은 형태의 해를 갖는다고 가정하자.^[4,5]

코어 내부에서 :

$$E_z = \sum_{n=0,1,2,\dots}^{\infty} \{A_n \sin(n\theta) + B_n \cos(n\theta)\} J_n(hr) \exp\{i(k_z z - \omega t)\} \tag{1}$$

$$H_z = \sum_{n=0,1,2,\dots}^{\infty} \{C_n \sin(n\theta) + D_n \cos(n\theta)\} J_n(hr) \exp\{i(k_z z - \omega t)\} \tag{2}$$

코어 외부에서 :

$$E_z = \sum_{n=0,1,2,\dots}^{\infty} \{S_n \sin(n\theta) + T_n \cos(n\theta)\} K_n(pr) \exp\{i(k_z z - \omega t)\} \tag{3}$$

$$E_z = \sum_{n=0,1,2,\dots}^{\infty} \{U_n \sin(n\theta) + V_n \cos(n\theta)\} K_n(pr) \exp\{i(k_z z - \omega t)\} \tag{4}$$

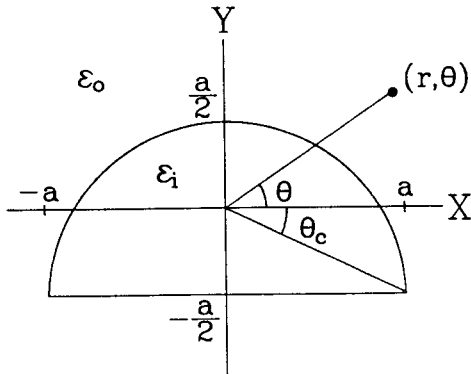


그림 1. Geometry of the waveguide with semicircular cross-section.

여기서 J_n 과 K_n 은 n 차 Bessel 함수와 modified Bessel 함수이며, ω 는 빛의 주파수이고 k_z 는 전파상수의 Z 방향 성분이다. 또한 전파상수의 X-Y 평면성분은

$$h = \sqrt{k_i^2 - k_z^2}, \quad p = \sqrt{k_z^2 - k_o^2} \tag{5}$$

로 표시하고 $k_i = \omega \sqrt{\epsilon_i \mu_0}$, $k_o = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ 로 정의한다.

전자기장의 r 과 θ 성분은 식 (1)~(4)의 전자기장의 Z 성분과 다음 식으로 표현된 Maxwell 방정식에서 구할 수 있다.

$$E_r = \frac{ik_z}{k^2 - k_z^2} \left[\frac{\partial E_z}{\partial r} + \left(\frac{\mu_0 \omega}{k_z r} \right) \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \right]$$

$$E_\theta = \frac{ik_z}{k^2 - k_z^2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \left(\frac{\mu_0 \omega}{k_z} \right) \frac{\partial H_z}{\partial r} \right]$$

$$H_r = \frac{ik_z}{k^2 - k_z^2} \left[\left(\frac{-k^2}{\mu_0 \omega k_z} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} + \frac{\partial H_z}{\partial r} \right]$$

$$H_\theta = \frac{ik_z}{k^2 - k_z^2} \left[\left(\frac{k^2}{\mu_0 \omega k_z} \right) \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \right] \tag{6}$$

단, 식 (6)의 k 는 코어에서는 k_i 의 값을 가지고 클래드에서는 k_o 의 값을 갖는다. 이제 코어와 클래드의 경계면에서 유한한 갯수의 점들을 선택하고 이 점들에서 식 (1)~(6)의 전기장과 자기장의 Z 성분 E_z, H_z , X-Y 평면에서의 전기장과 자기장의 접선성분 E_t, H_t 들이 연속이어야 하는 경계조건을 사용하여 코어의 해와 클래드의 해 사이에 관계식을 만들고 이를 풀면 도파로의 전파상수와 전자기장의 벡터해 및 에너지 분포가 구해진다. 물론 해는 방정식 (1)~(4)에서 유한한 갯수의 항을 취하여 근사한다.

원점에서 경계면까지의 거리 r_b 는 $\theta_c \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 영역에서

$$\frac{r_b}{a} = \frac{1}{2} \left(-\sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + 3} \right) \tag{7}$$

이며, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \theta_c$ 영역에서는

$$\frac{r_b}{a} = \frac{-1}{2 \sin\theta} \tag{8}$$

이다. 그리고 경계면에서 전기장의 접선성분 E_t 는

$\theta_c \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 인 영역에서는

$$E_t = -\frac{1}{2} \cos\theta E_r + \frac{1}{2} \sqrt{\sin^2\theta + 3} E_\theta \tag{9}$$

이고, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \theta_c$ 영역에서는

$$E_r = E_r \cos \theta - E_\theta \sin \theta \quad (10)$$

이다. 또한 자기장의 접선성분 H_t 도 식 (9)~(10)과 똑 같은 형태로 표시된다. 경계점들은 $\frac{\pi}{M}$ 의 간격을 갖고 균등히 분포하는 다음과 같은 방정식으로 M 개를 선택 하였다.

$$\theta_m = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{M} \left(m - \frac{1}{2} \right) \quad m = 1, 2, 3, \dots, M \quad (11)$$

반원형 단면의 도파로는 Y축에 대하여 대칭이며 따라서 전자기장의 각 성분은 Y축에 대하여 even이나 odd 성질 중 하나를 반드시 가져야 한다.^[4,5] Maxwell 방정식 (6)으로부터 E_z 가 Y축에 대하여 even일 때는 E_r, H_θ, E_y, H_x 는 even이고 $E_\theta, H_r, H_z, E_x, H_y$ 는 odd이다. 마찬가지로 E_z 가 odd일 때는 E_r, H_θ, E_y, H_x 는 odd이고 $E_\theta, H_r, H_z, E_x, H_y$ 는 even이다. 위의 X, Y 성분들의 대칭성 판별은 다음의 관계식을 이용한다.

$$\begin{aligned} E_x &= E_r \cos \theta - E_\theta \sin \theta \\ E_y &= E_r \sin \theta + E_\theta \cos \theta \\ H_x &= H_r \cos \theta - H_\theta \sin \theta \\ H_y &= H_r \sin \theta + H_\theta \cos \theta \end{aligned} \quad (12)$$

도파모우드를 E_x 의 even과 odd를 기준으로 하여 두 범주로 나누어 각각의 경우에 대한 해를 구하기로 하자. 먼저 E_z 가 odd일 때는 E_z 는 even이고 H_z 는 odd이다. 따라서 식 (1)~(4)는 다음과 같이 표현된다.

코어 내부에서 :

$$\begin{aligned} E_z(r, \theta) &= \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} A_n \sin(n\theta) J_n(hr) + \sum_{n=0,2,4,\dots}^{\infty} B_n \cos(n\theta) J_n(hr) \\ E_z(r, \theta) &= \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} C_n \sin(n\theta) J_n(hr) + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} D_n \cos(n\theta) J_n(hr) \end{aligned} \quad (13)$$

코어 외부에서 :

$$\begin{aligned} E_z(r, \theta) &= \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} S_n \sin(n\theta) K_n(pr) + \sum_{n=0,2,4,\dots}^{\infty} T_n \cos(n\theta) K_n(pr) \\ E_z(r, \theta) &= \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} U_n \sin(n\theta) K_n(pr) + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} V_n \cos(n\theta) K_n(pr) \end{aligned} \quad (14)$$

경계점 (r_m, θ_m) 에서 E_z, H_z, E_t, H_t 의 연속조건, 즉 $E_{z1}(r_m, \theta_m) = E_{z2}(r_m, \theta_m)$ 는

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} A_n \sin(n\theta_m) J_n(hr_m) + \sum_{n=0,2,4,\dots}^{\infty} B_n \cos(n\theta_m) J_n(hr_m) \\ & + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} S_n \sin(n\theta_m) K_n(hr_m) + \sum_{n=0,2,4,\dots}^{\infty} T_n \cos(n\theta_m) K_n(hr_m) \end{aligned} \quad (15)$$

이 되고, $H_{z1}(r_m, \theta_m) = H_{z2}(r_m, \theta_m)$ 는

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} C_n \sin(n\theta_m) J_n(hr_m) + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} D_n \cos(n\theta_m) J_n(hr_m) \\ & = \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} U_n \sin(n\theta_m) K_n(hr_m) + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} V_n \cos(n\theta_m) K_n(hr_m) \end{aligned} \quad (16)$$

이 되고, $E_{t1}(r_m, \theta_m) = E_{t2}(r_m, \theta_m)$ 는

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{A_n}{h^2} \times \\ & \left[f(\theta_m) h \sin(n\theta_m) J_n'(hr_m) + g(\theta_m) \frac{n}{r_m} \cos(n\theta_m) J_n(hr_m) \right] \\ & + \sum_{n=0,2,\dots}^{\infty} \frac{B_n}{h^2} \times \\ & \left[f(\theta_m) h \cos(n\theta_m) J_n'(hr_m) - g(\theta_m) \frac{n}{r_m} \sin(n\theta_m) J_n(hr_m) \right] \\ & + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{C_n}{h^2} \frac{\mu_0 \omega}{k_z} \times \\ & \left[f(\theta_m) \frac{n}{r_m} \cos(n\theta_m) J_n(hr_m) - g(\theta_m) h \sin(n\theta_m) J_n'(hr_m) \right] \\ & + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{D_n}{h^2} \frac{\mu_0 \omega}{k_z} \times \\ & \left[f(\theta_m) \frac{-n}{r_m} \sin(n\theta_m) J_n(hr_m) - g(\theta_m) h \cos(n\theta_m) J_n'(hr_m) \right] \\ & = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{-S_n}{p^2} \times \\ & \left[f(\theta_m) p \sin(n\theta_m) K_n'(pr_m) + g(\theta_m) \frac{n}{r_m} \cos(n\theta_m) K_n(pr_m) \right] \\ & = \sum_{n=0,2,\dots}^{\infty} \frac{-T_n}{p^2} \times \\ & \left[f(\theta_m) p \cos(n\theta_m) K_n'(pr_m) - g(\theta_m) \frac{n}{r_m} \sin(n\theta_m) K_n(pr_m) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{-U_n}{p^2} \frac{\mu_0 \omega}{k_z} \times \\
 & \left[f(\theta_m) \frac{n}{r_m} \cos(n\theta_m) K_n(pr_m) - g(\theta_m) p \sin(n\theta_m) K_n'(pr_m) \right] \\
 & + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{-V_n}{p^2} \frac{\mu_0 \omega}{k_z} \times \\
 & \left[f(\theta_m) \frac{-n}{r_m} \sin(n\theta_m) K_n(pr_m) - g(\theta_m) p \cos(n\theta_m) K_n'(pr_m) \right]
 \end{aligned} \tag{17}$$

이 되고, $H_{ij}(r_m, \theta_m) = H_{i0}(r_m, \theta_m)$ 는

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{A_n}{h^2} \frac{k_i^2}{\mu_0 \omega k_z} \times \\
 & \left[f(\theta_m) \frac{-n}{r_m} \cos(n\theta_m) J_n(hr_m) + g(\theta_m) h \sin(n\theta_m) J_n'(hr_m) \right] \\
 & + \sum_{n=0,2,\dots}^{\infty} \frac{B_n}{h^2} \frac{k_i^2}{\mu_0 \omega k_z} \times \\
 & \left[f(\theta_m) \frac{n}{r_m} \sin(n\theta_m) J_n(hr_m) + g(\theta_m) h \cos(n\theta_m) J_n'(hr_m) \right] \\
 & + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{C_n}{h^2} \times \\
 & \left[f(\theta_m) h \sin(n\theta_m) J_n'(hr_m) + g(\theta_m) \frac{n}{r_m} \cos(n\theta_m) J_n(hr_m) \right] \\
 & + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{D_n}{h^2} \times \\
 & \left[f(\theta_m) h \cos(n\theta_m) J_n'(hr_m) - g(\theta_m) \frac{n}{r_m} \sin(n\theta_m) J_n(hr_m) \right] \\
 & + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{-S_n}{p^2} \frac{k_o^2}{\mu_0 \omega k_z} \times \\
 & \left[f(\theta_m) \frac{-n}{r_m} \cos(n\theta_m) K_n(pr_m) + g(\theta_m) p \sin(n\theta_m) K_n'(pr_m) \right] \\
 & + \sum_{n=0,2,\dots}^{\infty} \frac{-T_n}{p^2} \frac{k_o^2}{\mu_0 \omega k_z} \times \\
 & \left[f(\theta_m) \frac{n}{r_m} \sin(n\theta_m) K_n(pr_m) + g(\theta_m) p \cos(n\theta_m) K_n'(pr_m) \right] \\
 & + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{-U_n}{p^2} \times \\
 & \left[f(\theta_m) p \sin(n\theta_m) K_n'(pr_m) + g(\theta_m) \frac{n}{r_m} \cos(n\theta_m) K_n(pr_m) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{-V_n}{p^2} \times \\
 & \left[f(\theta_m) p \cos(n\theta_m) K_n'(pr_m) - g(\theta_m) \frac{n}{r_m} \sin(n\theta_m) K_n(pr_m) \right]
 \end{aligned} \tag{18}$$

이 된다. 식 (18)에서 $f(\theta_m)$ 과 $g(\theta_m)$ 은 다음과 같다.

$$\theta_i \leq \theta_m \leq \frac{\pi}{2} \text{의 범위에서 :}$$

$$f(\theta_m) = -\frac{1}{2} \cos \theta_m$$

$$g(\theta_m) = \frac{1}{2} \sqrt{\sin^2 \theta_m + 3}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta_m \leq \theta_i \text{의 범위에서 :}$$

$$f(\theta_m) = \cos \theta_m$$

$$g(\theta_m) = -\sin \theta_m$$

정의된다. 식 (15)~(18)의 해를 컴퓨터를 이용하여 구함으로서 전파특성과 벡터해를 구한다. 여기서 도파로의 전파상수 k_z 와 도파로의 반경 a 에 관계되는 새로운 변수 P 와 B 를 다음과 같이 정의한다.

$$P^2 = \frac{(k_z/k_o)^2 - 1}{n_r^2 - 1}, \quad (0 < P^2 < 1)$$

$$B = \frac{ak_o}{\pi} \sqrt{n_r^2 - 1} \tag{19}$$

단, $n_r^2 = \frac{\epsilon_i}{\epsilon_o}$ 이다. 또한 $R_m = r_m k_o \sqrt{(n_r^2 - 1)}$ 로 정의하면

다음과 같이 표현된다.

$$pr_m = PR_m, \quad hr_m = \sqrt{(1 - P^2)} R_m,$$

$$R_m = \frac{\pi_m B}{a}, \quad \frac{h}{p} = \frac{\sqrt{1 - P^2}}{P}$$

$$\frac{k_o}{k_z} = \frac{1}{\sqrt{1 + P^2(n_r^2 - 1)}}$$

식 (15)~(18)에서 나타나는 각각의 무한 급수에서 N 개의 삼각함수 항까지를 취하면 미지수 $A_n, B_n, C_n, D_n, S_n, T_n, U_n, V_n$ 의 총 개수는 $8N + 2$ 개이다. 여기서 $8N + 2$ 의 $+2$ 항은 $n=0$ 일 때 $\cos(n\theta_m)$ 항 때문이다. 이 방정

식들을 풀기 위해서 식 (11)을 가지고 코어와 클래드의 경계면에서 M개의 경계점을 선택하고, H_z 의 경계조건에 관한 식 (16)에서 $m=1$ 과 $m=M$ 인 경계점에 대한 식을 제외하면 식 (15)~(18)은 $4M-2$ 개의 제차 연립 선형 방정식 (simultaneous homogeneous linear equation)이 된다. 무한급수에서 N개의 항들을 선택하여 미지수들을 column 행렬 X로 표시하고, $M=2N+1$ 개의 경계점들을 선택하면 식 (15)~(18)은 $(8N+2) \times (8N+2)$ 의 행렬 G를 가지고

$$GX=0 \quad (20)$$

의 행렬 방정식 형태로 쓰여진다. 여기서 G는 각각의 미지수에 해당하는 계수들을 원소로 갖는 정방행렬이다. 식 (20)의 해가 모두 0이 아닌 해를 갖기 위해서는 행렬 G의 행렬식 값이 영이 되어야 하며

$$\det G=0 \quad (21)$$

에서 B 값을 주고 P^2 의 값을 얻는다. 여기서 Bessel 함수의 계산과 행렬식의 계산에는 IMSL의 부프로그램 DLFTRG, DLFDRG, DBSJNS, DBSKS를 이용하였고 방정식의 근은 잘 알려진 이분법(bisection method)을 이용하여 구하였다. 이와같은 계산을 B를 변화시키면서 P^2 를 구하면 P^2 의 분산곡선을 얻을 수 있다. 구해진 분산곡선에서 특별한 (B, P^2) 값 하나를 선택하여, 그 값으로 식 (20)을 계산하여 column 행렬 X의 값을 구하고 이로부터 전기장과 자기장의 벡터해를 구한다. 여기서는 X의 원소들 즉 미지수들 중에서 하나를 1로 놓고 다른 모든 미지수들을 IMSL의 부프로그램 DBSJNS, DBSKS, DLFIRG, DLFIRG를 이용하여 계산하였다.

이상은 E_x 가 odd인 경우의 도파모우드에 대한 계산이다. 다시 E_x 가 even인 경우의 해를 구하자. E_x 가 even일때 E_z 는 odd이고 H_z 는 even이다. 이 경우 식 (1)~(4)는 다음과 같이 표현된다.

코어 내부에서 :

$$E_z(r, \theta) = \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} A_n \sin(n\theta) J_n(hr) + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} B_n \cos(n\theta) J_n(hr)$$

$$H_z(r, \theta) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} C_n \sin(n\theta) J_n(hr) + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} D_n \cos(n\theta) J_n(hr)$$

(22)

코어 외부에서 :

$$E_z(r, \theta) = \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} S_n \sin(n\theta) K_n(pr) + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} T_n \cos(n\theta) K_n(pr)$$

$$H_z(r, \theta) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} U_n \sin(n\theta) K_n(pr) + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} V_n \cos(n\theta) K_n(pr) \quad (23)$$

E_x 가 even일 경우의 전파상수와 모우드의 벡터해는 E_x 가 odd일 때와 똑같은 방법으로 계산하여 구했다. n_r 이 1에 가까워질때 즉 $n_r \rightarrow 1$ 의 극한에서는 식 (21)은 E_x 가 even일 때와 odd일 때의 2가지 경우에서 같은 근을 갖게됨을 유도한 식에서 볼 수 있었다. 따라서 $n_r \rightarrow 1$ 일 때 축퇴되어 하나의 전파상수에서 두개의 해를 갖는다고 할 수 있다.

III. 결과 및 토의

이 장은 컴퓨터로 계산한 결과들을 토의한다. 그림 2부터 그림 4는 전파상수에 관한 곡선이다. 식 (19)에 나타낸 바와 같이 B는 반원 도파로의 반지름 a와 관계되는 도파로의 크기를 나타내는 변수이고 P_2 는 전파상수 k_2 와 관계되는 변수이다. $E_{x,om}^*$ 은 전기장의 X성분 E_x 가 Y축에 관하여 odd 성질을 가질 때 구해진 해로서 cutoff 주파수가 m번째에 나타나는 모우드를 표시한다. 마찬가지로 $E_{x,em}^*$ 은 E_x 가 even일 때 구해진 해로서 cutoff 주파수가 m번째에 나타나는 모우드를 표시한다.

$n_r \rightarrow 1$ 의 극한에서 $E_{x,om}^*$ 모우드와 $E_{x,em}^*$ 모우드는 축퇴되며 그때 계산한 결과가 그림 2이다. 계산 결과는 12개의 모우드까지만 곡선으로 나타냈다. 상대 굴절률이 1이 아닐 경우 축퇴는 깨지게 되며 이때 구해진 결과들이 그림 3이다. 그림 3의 각각의 모우드에 관한 전파상수 곡선들은 $n_r \rightarrow 1$ 인 경우보다 (P^2, B) 평면에서 오른쪽으로 이동하며 $E_{x,1}^*$ 모우드는 $E_{x,1}^*$ 모우드의 전파상수 곡선보다 오른쪽에 분포함을 보여준다.

그림 2부터 그림 3의 전파상수 계산결과는 무한급수로 표현된 해에서 7개의 삼각함수 항까지 선택하고 구한

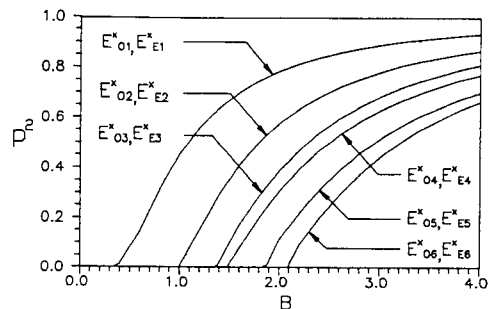


그림 2. Propagation constants of the first 12 modes in the limit of $n_r \rightarrow 1$.

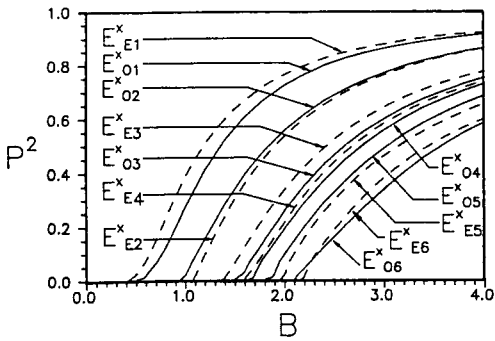
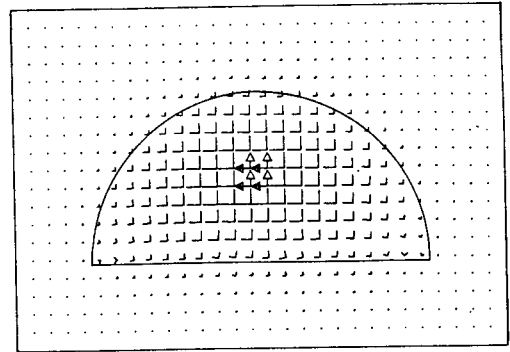


그림 3. Propagation constants of the odd and even modes for first 6 modes with $n_r=1.5$.

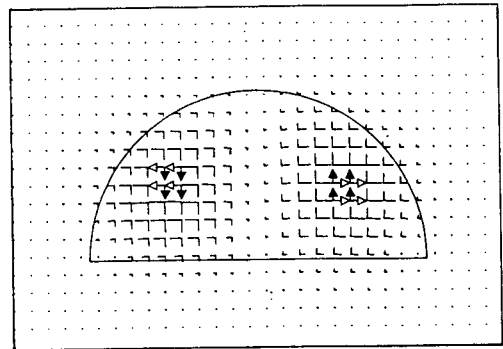
결과이다. 이 방법의 수렴성의 정확도를 알아보기 위해 (P^2, B) 평면에서 여러개의 B 값을 선택하고 무한급수를 정해진 항까지 선택한 후 각각의 B 값에서 P^2 값을 계산하였다. 이러한 계산을 항의 갯수를 3개, 4개, ..., 9개로 바꿔가면서 반복하여 결과들을 얻은 후 같은 B 값에서 항의 갯수 변경에 의한 P^2 값의 변동폭을 수렴성의 정확도로 평가했다. 이때 변동폭의 비교기준은 P^2 이 $[0, 1]$ 의 영역 안의 값이므로 1에 대한 퍼센트로 비교한다.

3개와 4개의 항의 선택 결과는 cutoff 주파수에 있어서 처음 모우드인 $m=1$ 모우드를 제외하고는 정확도가 매우 좋지 못하였다. 5개, 6개, ..., 9개의 선택 결과들을 비교하면 $m=1$ 인 모우드는 3% 이내의 정확도를 갖고, $m=2$ 에서 $m=6$ 까지의 모우드들은 대부분 6% 이내의 정확도를 가지나 몇개의 데이터들은 12% 정도의 큰 오차를 갖는다. 그러나 7개, 8개, 9개의 항을 선택한 결과들을 비교하면 $m=1$ 인 모우드는 1.5% 이내의 정확도를 갖고 P^2 값이 커질수록 정확도는 증가하며 $m=2$ 에서 $m=6$ 까지의 모우드들은 4% 이내의 정확도를 갖는다. 따라서 반원 도파로에서는 5개, 6개의 항보다는 7개 이상의 항의 선택이 수렴성의 면에서 더 좋다고 볼 수 있다. $m=1$ 모우드는 항의 선택의 갯수에 크게 의존하지 않는 높은 정확도를 갖고 있으며 항의 선택의 갯수가 증가할수록 높은 m 값을 가지는 모우드들의 정확도가 증가했다. 그리고 모든 모우드들에서 P^2 값이 큰 영역은 P^2 값이 작은 영역보다 정확도가 더욱 높았었다.

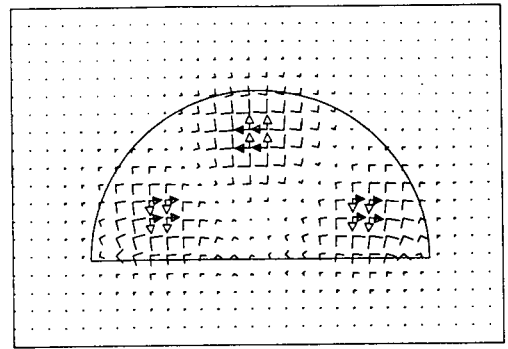
그림 4부터 그림 5까지는 $n_r=1.01, B=2.5$ 인 도파로의 E^x_{0m} 모우드를 7개 항까지 급수 전개하여 계산한 결과들이다. 그림 4는 도파모우드의 전기장과 자기장 각각에 대한 그 상대적 크기를 표시한 것이며 그림 5는 전자기장의 X, Y, Z 성분의 제곱으로부터 구한 X-Y 평면 내의 상대적인 에너지 분포이다. 일반적으로 상대굴절률 n_i 이



(a)



(b)



(c)

그림 4. Transverse Electromagnetic fields (E_x, E_y) and (H_x, H_y) of the waveguide with $n_r=1.01$ and $B=2.5$: Electric Fields is represented as \rightarrow and Magnetic Fields \rightarrow .

(a) E^x_{01} mode, (b) E^x_{02} mode, (c) E^x_{03} mode.

1에 가까워지면 도파로 내의 광의 진행은 균일한 자유 매질 내의 광의 진행과 유사해지며 이 경우 Maxwell 방정식의 전기장과 자기장의 대칭성에 의해 E^x_{0m} 모우

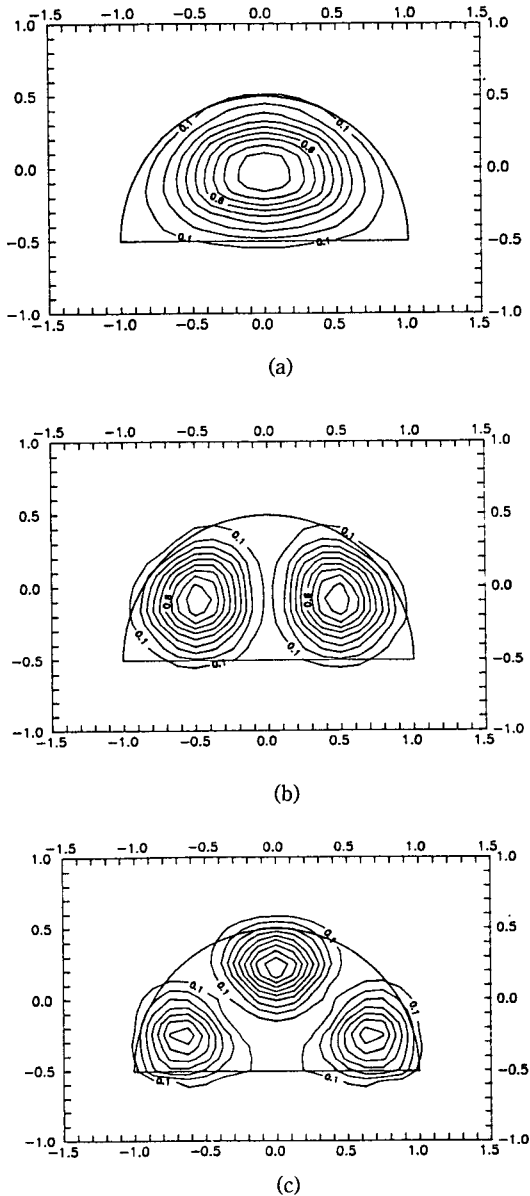


그림 5. Energy distributions within the waveguide with $n_r=1.01$ and $B=2.5$.

(a) E_{x1}^o mode, (b) E_{x2}^o mode, (c) E_{x3}^o mode.

드는 $E_{x_{nm}}^o$ 모우드의 전자기장과 에너지 분포에서 E 가 H 로, $-H$ 가 E 로 전자기장과 자기장이 서로 바뀐다는 것만 제외하고는 거의 구별할 수 없게 된다. 실제로 여기서 $E_{x_{nm}}^o$ 의 전자기장과 에너지 분포를 계산한 결과 이와같은 대칭성을 확인하였다. 그림 4의 벡터해를 보면 도파로의 중앙부에서는 도파모우드의 전자기장이 X나 Y 방향으로

거의 편광되어 있다. 그러나 도파로의 코어와 클래드의 경계면에서는 전자기장의 방향이 X나 Y방향으로부터 다소 변화된다. 이러한 현상은 도파로 경계면에서 두 매질간의 굴절률 차이에 의한 것으로서 n_r 이 1에 가까워질 경우 계산된 전자기장은 X나 Y방향으로 보다 더 선편광이 됨을 볼 수 있었다.

Marcattili의 표현 방법에 의하면 전기장이 X축에 평행한 모우드를 $E_{x_{mn}}^o$, Y축에 평행한 모우드를 $E_{y_{mn}}^o$ 으로 표시한다.^[6] 여기서 m 은 X축 방향에서 전기장의 최대치와 최소치의 갯수이고 n 은 Y축 방향으로 전기장의 최대치와 최소치의 갯수이다. 본 연구의 $E_{x_{01}}^o$ 모우드와 $E_{x_{11}}^o$ 모우드는 Marcattili의 E_{11}^o 모우드와 $E_{x_{11}}^o$ 모우드의 경향을 보이고, $E_{x_{02}}^o$ 모우드와 $E_{x_{22}}^o$ 모우드는 $E_{x_{21}}^o$ 모우드와 $E_{y_{21}}^o$ 모우드의 경향을 보인다. 그러나 $E_{x_{03}}^o$ 모우드는 $E_{x_{21}}^o$ 과 $E_{x_{11}}^o$ 이 합해진 경향을 보이고, $E_{x_{03}}^o$ 모우드는 $E_{x_{21}}^o$ 과 $E_{x_{11}}^o$ 이 합해진 경향을 보이며, 이는 반원 모양에 의한 효과로 보인다.

IV. 결 론

직사각형 도파로에 Goell이 적용한 수치해석 방법을 반원 도파로에 적용하여 전파상수 곡선을 얻고, 각 모우드의 전기장과 자기장의 벡터해 및 에너지 분포를 구하고 특성을 토의 하였다. 본 연구의 계산법은 도파로 내의 실제의 전자기장을 표현할 수 있는 도파모우드의 vector해의 계산법으로서 도파로의 코어와 클래드 간의 굴절률차가 큰 도파로와 편광특성과 관련된 도파로의 계산에 사용할 수 있다.

참 고 문 헌

[1] R. Ader, Y. Shani, C. H. Henry, R. C. Kistler, G. E. Blonder and N. A. Olsson, "Measurement of Very Low-Loss Silica on Silicon Waveguide with a Ring Resonator", Appl. Phys. Lett. **58**, 444 (1991).
 [2] 이형종, 임기진, 정창섭, 정환재, 김진승, "Si을 기판으로한 P₂O₅-SiO₂ 광도파로의 제작 및 손실 측정", 한국광학회지 **3**(4), 258 (1992).
 [3] C. H. Henry and B. H. Verbeek, "Solution of the Scalar Wave Equation for Arbitrarily Shaped Dielectric Waveguides by Two-Dimensional Fourier Analysis", Journal of Lightwave Tech. **7**, 308 (1989); 김진승, 이형종, 임기진, 정창섭, 정환재, "유한 영역에서 조화함수 전개법을 이용한 이산화

- 규소 광도파로의 모우드 분석”, 한국광학회지 **4**(1), 90 (1993).
- [4] J. E. Goell, “A Circular-Harmonic Computer Analysis of Rectangular Dielectric Waveguides”, Bell Syst. Tech. J. **48**(7), 2133 (1969).
- [5] L. Eyges, P. Gianino and P. Wintersteiner, “Modes of Dielectric Waveguides of Arbitrary Cross Sectional Shape”, J. Opt. Soc. Am. **69**(9), 1226 (1979).
- [6] E. A. J. Marcatili, “Dielectric Rectangular Waveguide and Directional Coupler for Integrated Optics”, Bell Syst. Tech. J. **48**(7), 2071 (1969).
- [5] L. Eyges, P. Gianino and P. Wintersteiner, “Modes

Vectorial Solutions of the Eigenmodes of the Waveguide with Semicircular Cross-Section

Soon Chul Yang

Department of Physics, Mokpo National University, Chonnam Muan 534-729, Korea

Hyung Jong Lee and Han Soo Kim

Department of Physics, Chonnam National University, Kwangju 500-757, Korea

(Received: August 5, 1993)

We find the vectorial solution of the optical waveguide with semicircular cross-section by expanding the electromagnetic fields of the waveguide into the series of trigonometric and Bessel functions and by applying the boundary conditions at the finitely selected points on the interface of the core and the cladding. We find also the propagation constants and the energy distributions of the eigenmodes and discuss its properties. As a result of computation, we find that the electromagnetic fields of the even modes about the symmetric axis of the semicircular shape are nearly the same as those of the odd modes except that \vec{E} and \vec{H} of the odd modes are replaced by $-\vec{H}$ and \vec{E} and that the even and odd modes are degenerated as the ratio of refractive index of the core and cladding approaches to 1.