

직교화와 SVD를 도입한 광학설계의 최적화기법에 대한 연구*

김기태 · 이종용

청주대학교 이공대학 물리광학과

(1993년 8월 27일 받음)

설계변수의 직교화와 SVD(singular value decomposition)를 최적화에 도입하고, 이를 double-Gauss형 사진렌즈계에 적용시켜 최적화의 수렴성과 안정성을 일반적인 최소자승법, 감쇠최소자승법의 경우와 비교하였다.

최적화에서 정규방정식의 조건수(고유값의 최대, 최소값의 비)가 최적화의 불안정성과 밀접한 관련이 있다는 것은 이미 알려져 있다. 본 연구에서 SVD를 도입하여 조건수를 제한하여 본 결과 최적화의 안정성이 매우 증진 되었으며, 감쇠최소자승법에서 적은 감쇠항을 주고 직교화와 SVD를 적용시킨 경우가 가장 빠르고 안정하게 수렴하였다. 이것은 변수의 직교화와 SVD가 감쇠최소자승법에서 적은 감쇠항을 줄 때 생기는 불안정성을 잘 극복하고 있음을 나타내고 있다.

I. 서 론

광학설계에서 최적화는 광학계의 수차 또는 설계의 제한조건들로 error 함수를 정의하고, 이를 최소화 시킴으로써 이루어 진다.^[1] 렌즈설계에서 최적화는 1954년 S. Rosen과 C. Eldert에 의하여 최소자승법(least squares method)^[2,3]이 사용 되었으며, 최소자승법에서는 최적화가 진행되는 동안 수차함수의 비선형성과 상호종속성 때문에 불량조건^[4]이 발생하는 경우가 많으며, 이 때는 설계변수의 변화량이 매우 커지게 되어 최적점을 지나치게 되어 merit function이 불안정하게 진동하는 현상이 많이 발생하기 때문에 현재는 잘 사용하지 않고 있다.

Merit function이 불안정하게 진동하는 것을 방지하기 위하여, 감쇠항을 도입하여 가능한 한 설계변수의 변화량을 적게한 감쇠최소자승법(damped least squares method)^[5,6]이 현재 많이 사용되고 있으며, 설계변수의 변화량을 적게하면 선형화에 따른 오차가 적어져 최소자승법보다 상대적으로 안정하게 수렴하게 된다. 감쇠최소자승법에는 damping을 주는 방법에 따라 additive damping과 multiplicative damping으로 나뉘어 진다. 국내에서도 감쇠최소자승법을 사용한 반사경계, double-

Gauss형 사진렌즈계, double-Gauss형 접사렌즈계 등의 설계에 대한 논문^[7,8,9]이 발표되어 있다.

Error 함수들의 상호 종속성에 기인하는 문제점을 해결하기 위하여 D.S. Grey는 직교화기법^[1,10,11]을 제안 하였으며, 직교화 기법으로는 수차함수를 구성하는 변수들을 직교화하는 직교화기법과 Gram-Schmidt 알고리즘^[1]에 의하여 수차함수를 직교화하는 정규직교화기법이 있다.

본 연구에서는 변수들을 Householder변환^[12]과 QL알고리즘^[13]을 이용하여 변수를 직교화시키는 방법을 사용하였으며, 매 iteration마다 정규방정식의 고유값(eigenvalue)을 구하여 고유값이 상대적으로 작은 직교화된 변수는 사용하지 않도록 하였으며, 이를 통하여 정규방정식의 불량조건을 제거하였다. 고유값이 작은 변수벡터를 제거하는 방법은 연립방정식의 해법에서 SVD(singular value decomposition) 알고리즘^[14,15,16]에서 이미 사용되고 있으며, SVD의 singular value는 본 연구에서 사용한 정규방정식의 고유값과는 개념이 다르나, 대칭행렬(symmetric matrix)인 경우는 singular value와 고유값의 절대값은 같다.^[15]

본 연구에서는 설계변수의 직교화와 고유값을 제한하는 최적화기법의 안정성과 수렴성을 알아보기 위하여 EFL이 50 mm, BFL이 33 mm, 최대반시계각이 22.5°인 double-Gauss형 사진렌즈계의 설계에 적용시켜 보았으

* 본 연구는 1992년도 교육부 지원 한국학술진흥재단의 자유공모(지방대학육성)과제 연구조성비에 의하여 수행된 것임.

며, 그 결과 직교화방법이 최소자승법, 감쇠최소자승법보다 빠르고 안정하게 최적점에 수렴함을 확인할 수 있었다.

II. 최소자승법과 감쇠최소자승법

최소자승법에서 error 함수는 최적화하려는 광학계의 error의 크기를 나타내는 함수로서 설계변수에 대하여 연속적이고 미분가능한 함수이며, merit function은 이들 error 함수들의 제곱의 합으로 정의된다.

최소자승법의 merit function Φ 는

$$\Phi = \sum_{i=1}^m f_i^2 \quad (1)$$

로 정의되고, error 함수 f_i 는

$$f_i = w_i(e_i - t_i) \quad (2)$$

이다. (2)식에서 w_i 는 가중치, e_i 는 실제의 수차 또는 제한조건이며 t_i 는 목표값이고 error 함수 $f_i(i=1, 2, \dots, m)$ 는 광학계의 설계변수들 $x_j(j=1, 2, \dots, n)$ 에 대하여 일반적으로 비선형함수이다. 최적화에서는 광학계의 수차 외에도 설계의 제한조건을 고려할 수 있다. Merit function을 error 함수들의 제곱의 합으로 정의 하는 것은 서로 부호가 다른 수차나 제한조건들이 상쇄되는 것을 방지하기 위한 것이다. Error 함수 f_i 를 1차까지 Taylor 전개하면

$$f_i = f_{i0} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Delta x_j + \dots$$

$$f_{i0} + \sum_{j=1}^m a_{ij} \Delta x_j + \dots$$

$$, a_{ij} \Delta x_j + a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (3)$$

으로 쓸 수 있다. Error 함수들을 벡터와 행렬이 형태로 표현하면

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$F = F_0 + A \Delta X$$

$$\Phi = F^T F \quad (4)$$

로 쓸 수 있다. (4)식에서 m 은 error 함수의 개수이고 n 은 설계변수의 개수이다. 그리고 X, F 의 전치벡터는 X^T, F^T 로, 행렬 A 의 전치행렬은 A^T 로 정의하면 감쇠최소자승법의 일반화된 merit function은

$$\Psi = \Phi + \Delta X^T p^2 Q \Delta X$$

$$= F^T F + \Delta X^T p^2 Q \Delta X$$

$$\approx F_0^T F_0 + 2A^T F_0 \Delta X + \Delta X^T A^T A \Delta X + \Delta X^T p^2 Q \Delta X$$

$$= F_0^T F_0 + 2A^T F_0 \Delta X + \Delta X^T (A^T A - p^2 Q) \Delta X \quad (5)$$

로 주어진다. (5)식의 일반화된 merit function Ψ 가 최소값을 가지기 위한 조건은

$$\Psi = 2A^T F_0 + 2(A^T A + p^2 Q) \Delta X = 0 \quad (6)$$

이며, 감쇠최소자승법의 정규방정식은

$$(A^T A + p^2 Q) \Delta X + A^T F_0 = 0 \quad (7)$$

으로 주어지고, $p^2 Q$ 는 감쇠항이다. p 는 감쇠계수(damping factor)로 damping의 크기를 결정하는 변수로 사용되고, (7)식에서 감쇠계수 p 를 0으로 놓으면 최소자승법의 정규방정식이 된다.

$$A^T A \Delta X + A^T F_0 = 0 \quad (8)$$

(7)식에서 Q 는 대각행렬로 각각의 변수에 주는 damping의 크기를 조절하는 역할을 하고 있으며, 감쇠최소자승법은 Q 를 결정하는 방법에 따라서 additive damping과 multiplicative damping으로 나누어진다. Additive damping은 모든 변수에 동일한 크기의 damping을 주는 방법이고 multiplicative damping은 각각의 변수마다 서로 다른 크기의 damping을 주는 방법이다.

Additive damping에서 Q 는 단위행렬로 성분 q_{ij} 는

$$q_{ij} = \delta_{ij} \quad (9)$$

로 주어지며, multiplicative damping에서의 Q 는 대각행렬이며, 성분 q_{ij} 는

$$q_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} a_{kj} \delta_{ij} \quad (10)$$

로 주어진다. 따라서, Q 의 대각성분은 $A^T A$ 의 대각성분과 같으며 각각의 변수가 merit function에 주는 영향에 비례하는 감쇠를 받도록 하고있다.

최소자승법은 수렴속도가 아주 빠르지만 최소점 근처

에서는 불안정하여 불량조건에 의한 over-shooting이 발생하여 merit function이 진동하는 경우가 자주 발생하는 문제가 있고, 감쇠최소자승법에서는 이를 보완하기 위하여 변수의 변화량 ΔX 에 감쇠를 줌으로써 이를 극복하고 있다.

III. 설계변수를 직교화한 최적화기법

설계변수의 직교화는 설계변수(design variable) X 를 직교화된 변수 Y 로 변환하여 이루어지며, 그 과정은 다음과 같다.

감쇠최소자승법의 정규방정식 (7)식으로 부터, $E=A^T A + \beta^2 Q$ 라 놓으면

$$E \Delta X = -A^T F_0 \quad (11)$$

이 된다. (11)식의 양변에 E 의 고유벡터행렬 H 를 곱하면

$$\begin{aligned} HEH^{-1} H \Delta X &= -HA^T F_0 \\ D \Delta Y &= -V, \quad V=HA^T F_0 \end{aligned} \quad (12)$$

가 얻어지고, (12)식에서 $D=HEH^{-1}$ 로 대각행렬이며 D 의 대각요소들은 E 의 고유값들이다. 행렬 D 는 E 의 고유벡터 방향(y_1, y_2, \dots, y_n)으로 축이 향하며, 회전행렬 H 에 의하여 E 는 대각화 된다. 변환행렬 H 는 E 의 단위고유벡터들로 구성된 행렬이며, E 가 대칭행렬이므로 $H^{-1}=H^T$ 이다. 새로운 정규방정식 (12)식은 직교화된 새로운 변수 $Y=HX$ 로 구성된다.

기하학적 관점에서 보면 변수의 직교화는 merit function의 타원등고선의 주축들이 좌표변환에 의하여 새로운 좌표로 표현되고, 변환된 변수들은 서로 직교하는 고차평면에 존재한다.

(12)식의 직교화된 정규방정식에서 행렬 D 의 대각요소(행렬 E 의 고유값)의 절대값중 최대값을 λ_{max} , 최소값을 λ_{min} 이라 하면, 조건수 $cond(D)$ 는

$$cond(D) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \quad (13)$$

로 정의된다. 그림 1(a)의 경우 조건수는 1이며 좋은 조건(well-condition)으로, A점에서 경사(gradient)의 방향은 merit function의 최소점 O로 향하고 정규방정식은 신뢰할 수 있는 해를 가지게 된다. 그러나, 그림 1(b)의 경우와 같이 조건수가 매우 크다면, 정규방정식은 불량조건(ill-condition)이 되고 B점의 경사방향은 최소점 O로 향하지 않으며 over-shooting이 발생하게 된다. 이 때의

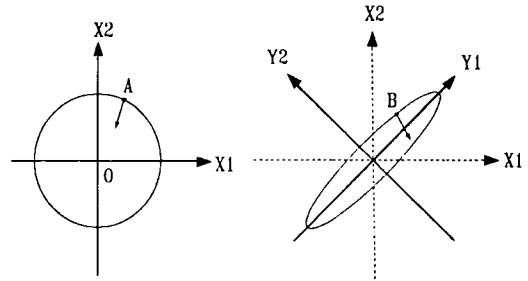


그림 1. Typical contour line of merit function. (a) well-condition, (b) ill-condition.

정규방정식의 해는 신뢰할 수 없게 된다. 이와 같은 경우에는 타원등고선의 주축 중 고유값이 작은 축을 정규방정식에서 제거함으로써 불량조건을 완화시킬 수 있으며, 이 경우에도 다른 직교변수들의 구성에는 전혀 영향이 없다.

본 연구에서는 고유값의 최대치를 기준으로 일정한 비율로 문턱치를 주어, 이 보다 작은 고유값을 가지는 직교화된 변수벡터는 정규방정식에서 제거하였다. 이것은 직교화된 구조변수들이 N 차원 공간에서 사실상 N 보다 작은 차원으로 된다는 것을 의미한다. Merit function에 기여량이 적은 변수벡터를 제거하는 방법은 이미 SVD(singular value decomposition)에서 사용되고 있으며, SVD에서는 $A \Delta X = B$ 형태의 해를 구할 때

$$A_{mn} = U_{nm} \Sigma_{nm} V_{nn}^T \quad (14)$$

$$\Sigma_{nm} = U_{nm}^T A_{mn} V_{nn} \quad (15)$$

의 형태로 직교변환시키며, 여기서 행렬 U 는 AA^T 의 고유벡터로 구성된 행렬으로써 left singular vector, 행렬 V 는 $A^T A$ 의 고유벡터로 구성된 행렬이며 right singular vector라 불린다. Σ 는 $m \times n$ 의 대각행렬이며 대각성분은 AA^T 와 $A^T A$ 의 고유값들의 제곱근으로, singular value라 불리고 있다. A 가 정방행렬이 아닌 경우에도 AA^T 와 $A^T A$ 의 고유값은 서로 같고, 크기가 큰 행렬에 $|m-n|$ 개의 0인 고유값이 존재한다. (14)식에서 A 가 대칭행렬이라면, singular value는 행렬 A 의 고유값들의 절대값과 같다.

본 연구에서 사용한 직교화기법은 SVD와 비교하여 고유값이 상대적으로 작은 변수벡터를 제거하는 것은 같으나, 정규방정식의 행렬 E 는 이미 정방행렬이고 대칭행렬이기 때문에 U, V 와 singular value를 구하지 않고 E 의 고유값을 Householder 변환과 QL 알고리즘을 사

용하여 구하였다는 점에 차이가 있다.

IV. 직교화 기법의 double-Gauss형 사진렌즈계의 설계에 적용

앞절에서 언급된 직교화기법을 double-Gauss형 사진렌즈계 설계에 적용시켜 직교화기법의 수렴속도와 안정성을 조사 하였다. 초기설계는 double-Gauss형 사진렌즈계인 미국특허 3,043,193⁽¹⁷⁾을 참고로 설계하였으며 각각의 단렌즈가 특허와 동일한 power 배치를 갖도록 하였다. EFL은 50mm가 되도록 규격화 하였으며, 초기설계의 제원은 표 1, 형태와 유한광선수차는 각각 그림 2, 그림 3에 나타내었다.

최적화방법간의 수렴속도와 안정성에 대한 비교검토를

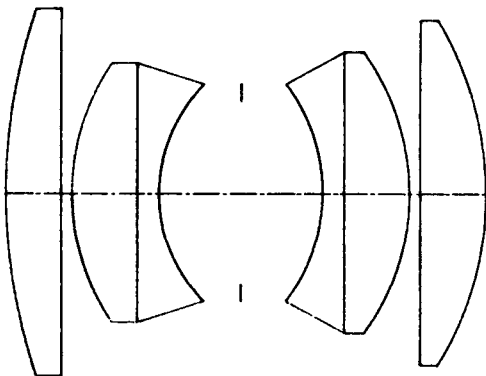


그림 2. Optical layout of the initial photographic lens system.

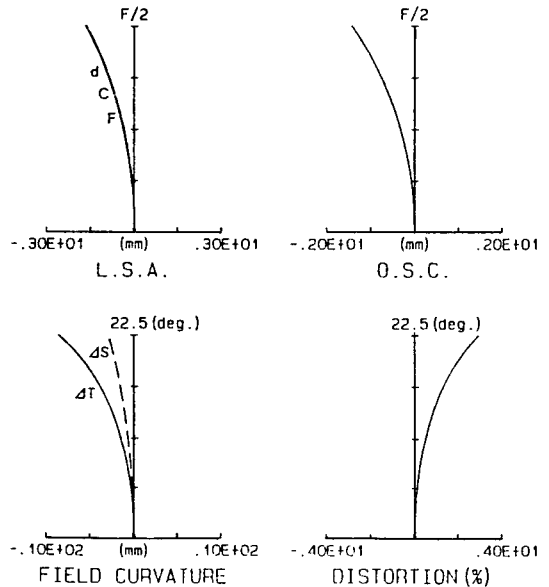


그림 3. Finite ray aberrations of the initial photographic lens system.

표 1. Design data of the initial photographic lens system (double-Gauss type, F/2.0).

Surface #	c	d	n_d	n_c	n_f	GLASS
1	.01830	5.0000	1.69100	1.69977	1.68718	LaK-9
2	.00000	1.0000	1.00000	1.00000	1.00000	Air
3	.04667	6.0000	1.61271	1.61998	1.60955	SK-4
4	.00000	2.0000	1.58144	1.59149	1.57722	LF-4
5	.07000	7.5000	1.00000	1.00000	1.00000	Air
6	.00000	7.5000	1.00000	1.00000	1.00000	Air
7	-.06081	2.0000	1.67270	1.68756	1.66660	SF-5
8	.00000	6.0000	1.69100	1.69977	1.68718	LaK-9
9	-.04500	1.0000	1.00000	1.00000	1.00000	Air
10	.00000	6.0000	1.69100	1.69977	1.68718	LaK-9
11	-.03207		1.00000	1.00000	1.00000	Air

EFL: 49.40158 mm BFL: 32.76226 mm

표 2. Optimization conditions for the photographic lens system.

error terms	number	weighting
ABERRATIONS		
longitudinal spherical aberration at d-line	5	1.0
longitudinal spherical aberration at C-line	6	1.0
longitudinal spherical aberration at F-line	6	1.0
offence against sine condition	5	1.0
astigmatism	5	1.0
tangential ray aberration	5	1.0
sagittal ray aberration	5	1.0
distortion	5	0.01
Petzval sum	1	1.0
CONSTRAINTS		
EFL	1	0.5
BFL	1	0.5

사진렌즈계의 최적화과정에서는 중구면수차, 코마, 비점수차, 자오상면만곡, 구결상면만곡, Petzval sum과 왜곡수차, 색수차를 고려하였다. 설계제한을 초점거리가 50 mm, 상거리가 33 mm되게 한 것은 카메라의 표준렌즈의 초점거리가 50 mm이며, 렌즈의 마지막 면과 필름 사이에는 적당한 거리가 유지되어야 하기 때문이다.^[18] 최적화에서 고려된 수차와 최적화조건은 표 2에 나타났다. 반 시계각은 22.5°로 하였으며, 입사고, 반시계각을 각각 5등분하여 계산하였다. 왜곡수차의 가중치를 0.01로 한 것은 다른 수차는 모두 길이의 차원을 가지나 왜곡수차는 퍼센트로 표시 되므로 가중치의 균형을 맞추기 위함이며, EFL과 BFL에 가중치를 0.5로 한 것은 적은 가중치를 주더라도 EFL과 BFL은 잘 보정되기 때문이다. 그 외의 수차는 가중치를 모두 1로 하였다.

본 연구에서는 최소자승법과 감쇠최소자승법에 직교화기법을 적용하였고, 감쇠최소자승법에서는 multiplicative damping을 사용하였으며, 감쇠계수 p는 0.01에서 1.0 사이의 값을 주었다. SVD를 사용하는 경우 고유값의 문턱치 λ_n 는

$$\lambda_n = \lambda_{max} \Gamma \tag{16}$$

로 주었으며, λ_{max} 는 고유치중 최대값이고 Γ 는 threshold level이다. 이와 같이 고유치를 제한하게 되면 정규방정식의 조건수는 $1/\Gamma$ 보다 같거나 작게 된다. Threshold level은 10^{-3} 에서 10^{-7} 사이의 값을 사용하였고, 30회의 iteration에 대하여 그 결과를 비교하였다. 그림 4~7의 reduced merit function은 merit function의 제곱근을 취하여, 초기값을 기준으로 퍼센트로 환산한 값이다.

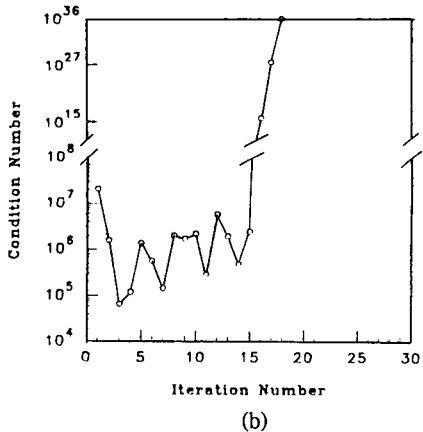
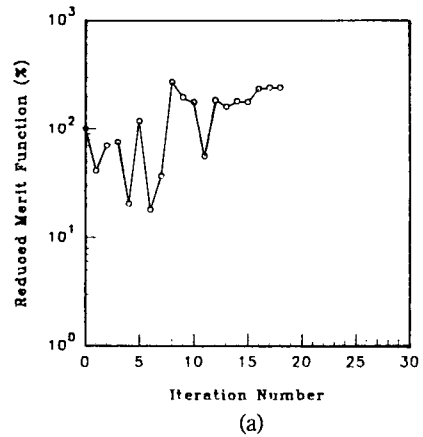


그림 4. Optimization by using least squares method without SVD(ordinary I.S method). (a) variation of reduced merit function, (b) variation of condition number.

직교화된 벡터의 고유값에 제한을 주지 않으면 기존의 최소자승법과 동일한 결과를 얻게 되고, 그림 4에 이 경우의 reduced merit function과 조건수의 변화가 나타나 있다. 이 때의 최적화 과정을 살펴보면 조건수가 급값을 갖는 경우(5회, 8회, 12회)에 reduced merit function도 급격히 증가한다. 또한 조건수가 발산하는 18회, 다음의 19회째 iteration에서는 정규방정식의 QL 인수분해가 실패하여 최적화가 진행되지 않는다. 그림 4에서 조건수와 최적화의 안정성과는 매우 밀접한 관련을 가지고 있음을 알 수 있고 조건수의 급격한 증가는 최적화에서 over-shooting 즉, 불안정성을 예고하는 것으로

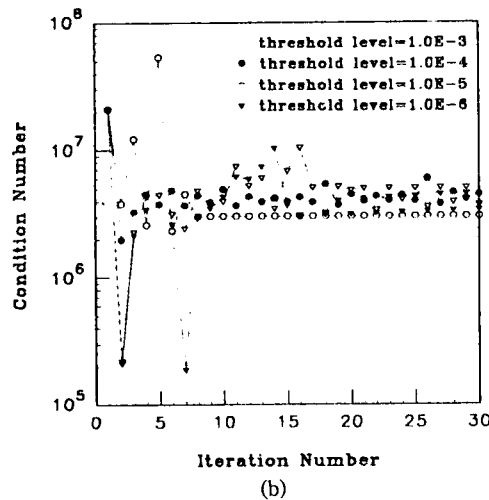
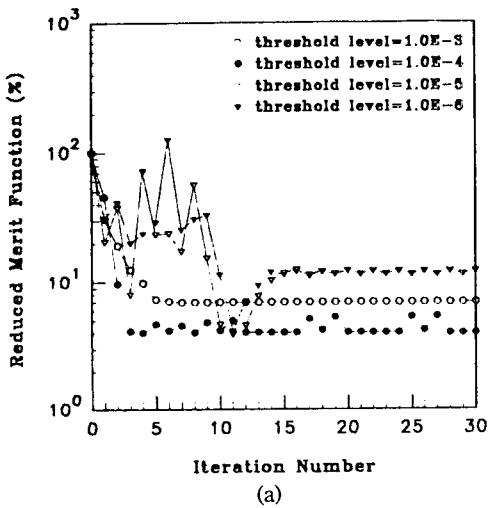


그림 5. Optimization by using least squares method with SVD. (a) variation of reduced merit function, (b) variation of condition number.

볼 수 있다.

그림 5에는 최소자승법에서 조건수를 제한한 경우의 reduced merit function과 조건수의 변화가 나타나 있다. 직교화된 변수벡터의 고유값에 적절한 threshold level Γ 를 주게 되면 불안정성이 현저히 감소되면서 최적점에 수렴함을 볼 수 있다. 또한 Γ 가 10^{-3} 인 경우를 살펴보면 조건수가 급격히 증가하는 경우가 생기더라도 문턱치 λ_0 보다 작은 고유값을 가지는 변수벡터가 정규방정식에서 제거됨으로 인하여 reduced merit function이 증가하지 않음을 보여주고 있다. 그러나 Γ 가 낮게 선정된 경우(threshold level= 10^{-6})에서는 여전히 reduced me-

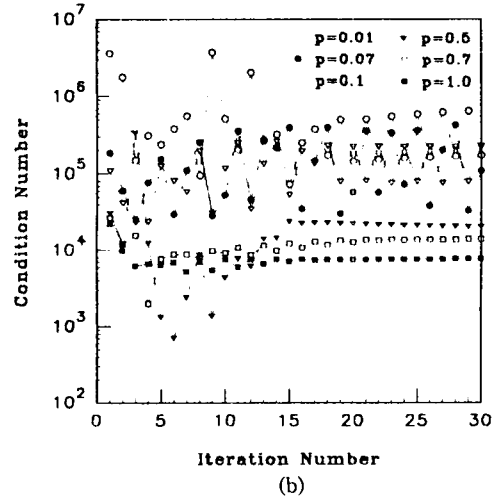
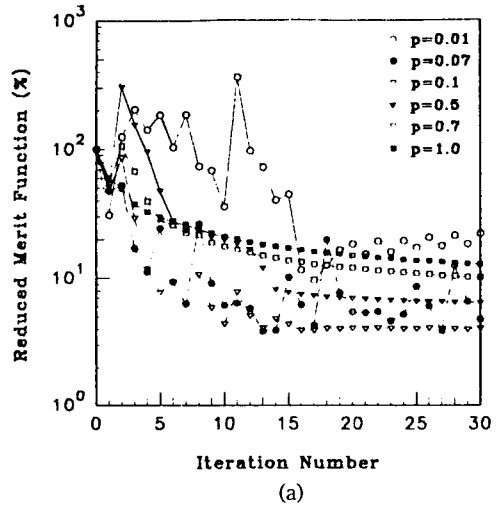
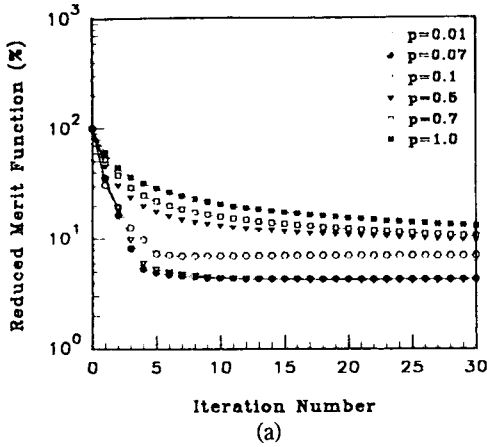


그림 6. Optimization by using damped least squares method without SVD (ordinary DLS method). (a) variation of reduced merit function, (b) variation of condition number.



rit function의 진동이 나타나고 있다.

그림 6에는 감쇠최소자승법에서 multiplicative damping을 이용하여 최적화한 경우의 reduced merit function과 조건수의 변화가 나타나 있다. 그림 6을 살펴보면 감쇠계수가 큰 경우($p=0.7, 1.0$)는 수렴속도는 늦지만 안정하게 수렴하고, 이 때는 조건수도 작고 그 변화량도 적다. 반면에 감쇠계수가 작은 경우($p=0.01, 0.07$)에서는 조건수가 크고 변화도 심하며, 이는 reduced merit function의 변화에도 그대로 나타나고 있다. 그림 6에서 가장 적절한 감쇠계수의 크기는 0.1일 때이며, 이 때 reduced merit function의 진동은 있으나 가장 빨리 최적점에 도달 하였다. 감쇠계수가 0.1인 경우의 조건수 변화를 살펴보면 조건수 자체는 $10^4 \sim 10^5$ 의 범위로 큰 편이나

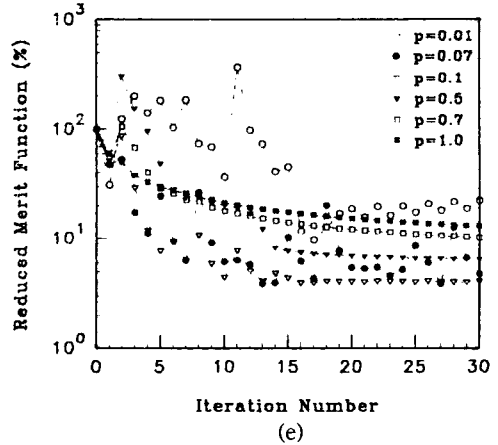
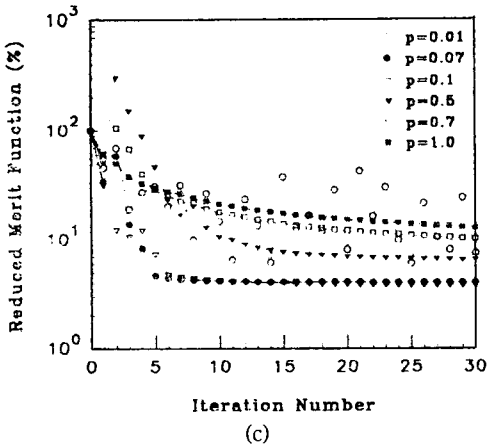
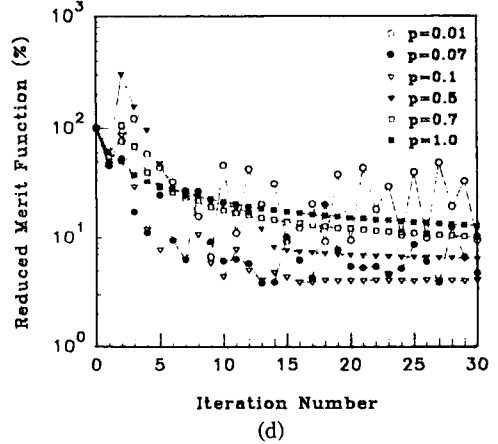
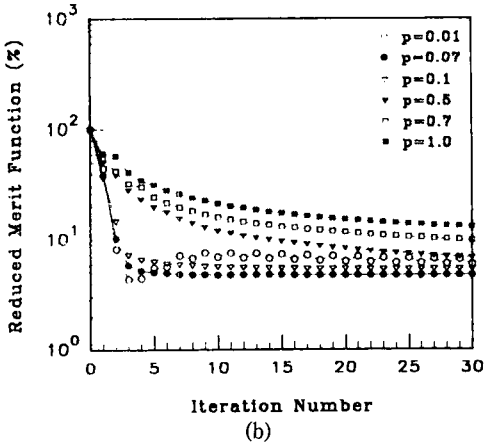


그림 7. Optimization by using damped least squares method with SVD. (a) threshold level= 10^3 , (b) threshold level= 10^4 , (c) threshold level= 10^5 , (d) threshold level= 10^6 , (e) threshold level= 10^7 .

진동이 큰 경우($p=0.01, 0.07$)와 비교하여 보면 조건수의 변화가 상대적으로 적음을 알 수 있다.

그림 7에는 감쇠최소자승법에 SVD를 적용한 결과이다. F 를 크게 한 경우(그림 7의 (a),(b))에서는 0.01 1.0인 범위의 모든 감쇠계수에 대하여 안정하게 수렴하였고 감쇠계수가 작으면 빨리 수렴하였다. 이것은 그림 6에서의 $p=0.01, p=0.07$ 경우와 좋은 대조를 이루며, F 를 줄으로써 정규방정식의 불량조건이 잘 극복되고 있음을 보여주고 있다. 그림 7에서 감쇠계수가 큰 경우는 SVD가 reduced merit function의 변화에 큰 영향을 주지 않음이 나타나고 있으며, 이것은 그림 6에서 감쇠계수가 큰 경우에는 조건수 자체가 작아 SVD에 의하여 제거되는 변수벡터가 적기 때문일 것으로 이해 된다. SVD를 적용시킨 경우에서도 낮은 F 를 주면 감쇠최소자승법과의 유사하게 최적화가 진행된다는 것이 그림 7에서

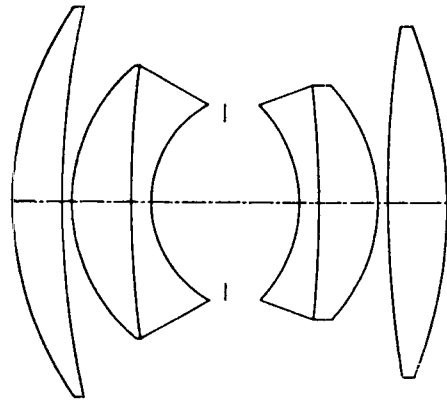


그림 8. Optical layout of the optimized photographic lens system (10 curvature variables were used).

표 3. Typical data of the optimized photographic lens system (10 curvature variables were used).

Surface #	c	d	n_d	n_c	n_f	GLASS
1	.02837	5.0000	1.69100	1.69977	1.68718	LaK-9
2	.01081	1.0000	1.00000	1.00000	1.00000	Air
3	.05439	6.0000	1.61271	1.61998	1.60955	SK-4
4	.00915	2.0000	1.58144	1.59149	1.57722	LF-4
5	.08695	7.5000	1.00000	1.00000	1.00000	Air
6	.00000	7.5000	1.00000	1.00000	1.00000	Air
7	-.06949	2.0000	1.67270	1.68756	1.66660	SF-5
8	-.00830	6.0000	1.69100	1.69977	1.68718	LaK-9
9	-.05686	1.0000	1.00000	1.00000	1.00000	Air
10	.00859	6.0000	1.69100	1.69977	1.68718	LaK-9
11	-.02019		1.00000	1.00000	1.00000	Air

EFL: 50.19268 mm BFL: 33.03436 mm

표 4. Design data of the optimized photographic lens system (all curvature and distance variables were used).

Surface #	c	d	n_d	n_c	n_f	GLASS
1	.02704	4.99689	1.69100	1.69977	1.68718	LaK-9
2	.00792	0.99553	1.00000	1.00000	1.00000	Air
3	.05076	5.96782	1.61271	1.61998	1.60955	SK-4
4	.01276	1.96033	1.58144	1.59149	1.57722	LF-4
5	.07833	5.49465	1.00000	1.00000	1.00000	Air
6	.00000	5.49668	1.00000	1.00000	1.00000	Air
7	-.06861	1.94081	1.67270	1.68756	1.66660	SF-5
8	.00224	5.99523	1.69100	1.69977	1.68718	LaK-9
9	-.05426	0.99655	1.00000	1.00000	1.00000	Air
10	.00977	6.00146	1.69100	1.69977	1.68718	LaK-9
11	-.01731		1.00000	1.00000	1.00000	Air

EFL: 50.00036 mm BFL: 33.01042 mm

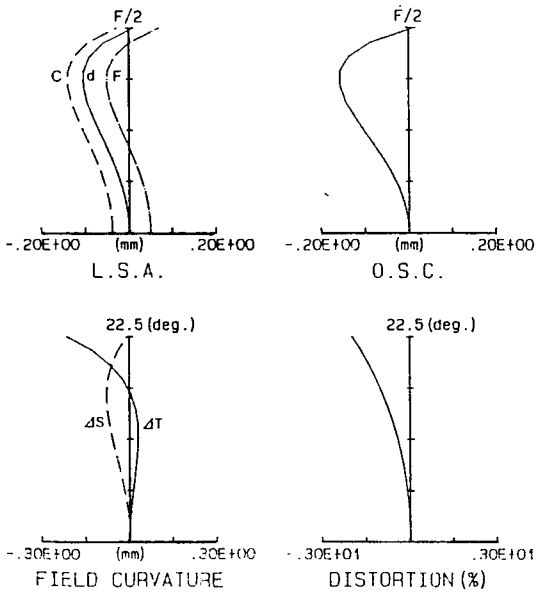


그림 9. Finite ray aberrations of the optimized photographic lens system (10 curvature variables were used).

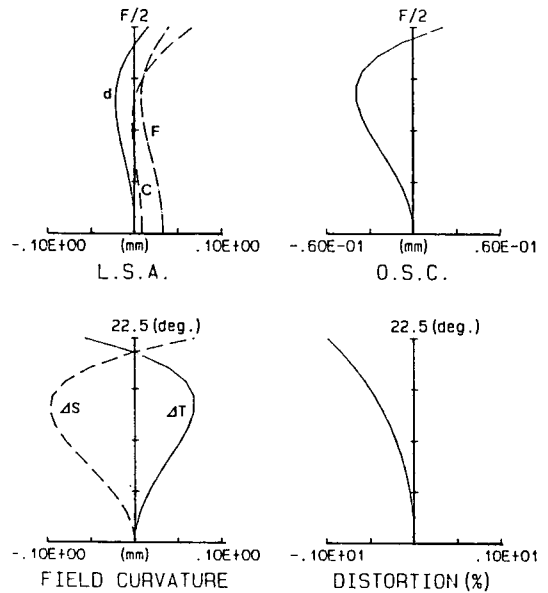


Fig. 10. Finite ray aberrations of the final photographic lens system.

V. 결 론

Γ 가 10^5 , 10^6 인 경우가 잘 보여 주고 있고, Γ 가 10^7 이하인 경우에는 감쇠최소자승법과 거의 같은 양상을 보인다.

최적화된 결과로 보아서는 각 방법에서 도달한 최적점의 제원은 모두 double-Gauss 형으로 유지되고, 곡률은 약간씩 다르나 전체적으로 보아 큰 차이는 없다. 그림 8에 제시된 설계는 곡률변수만 사용한 최적화에서 Γ 가 10^4 , 감쇠계수가 0.07인 경우 3회 iteration에서 얻어진 설계치이다. 이 때의 reduced merit function은 초기의 4.34%였고 렌즈계의 제원, 유한광선수차는 표 3, 그림 9에 나타냈다.

곡률변수만으로 최적화된 렌즈계는 설계제원을 다시 곡률변수 전부와 거리변수 전부를 사용하여 각각의 수차들의 가중치를 달리해가며 최종설계를 확정하였으며, 이 때의 reduced merit function값은 초기의 2.68%까지 줄여 줄 수 있었다. 최종적으로 설계된 사진렌즈계의 제원은 표 4, 유한광선수차는 그림 10에 나타냈다.

비축상점에 대한 vignetting 효과는 무한대에 물체가 있을 때 축상물체점의 경우와 비교하여 최대 반시계각 22.5° 에서 87.65%의 광량이 통과하였다.

설계변수를 직교화시키고 정규방정식에서 고유값이 작은 변수벡터를 제거하여 조건수를 제한한 직교화기법을 double-Gauss형 사진렌즈계의 최적화에 적용시켜 최소자승법, 감쇠최소자승법과 최적화의 수렴속도와 안정성을 비교하였다.

Double-Gauss형 사진렌즈계의 설계에서는 10개의 곡률변수를 사용하는 최적화를 통하여 유한광선수차를 보정하였으며, 정규방정식의 조건수가 최적화의 안정성과 매우 밀접한 관련이 있음을 확인하였다. 최소자승법의 경우 조건수가 최대 극값을 가질 때 merit function이 발산 하였으며, 조건수를 제한 시키면 merit function의 진동을 현저하게 줄일 수 있었다. 감쇠최소자승법의 경우 감쇠계수를 크게하면 정규방정식의 조건수가 현저하게 작아 졌으며, 이 때의 merit function도 안정하게 수렴 하였다.

본 연구에서 변수를 직교화시키고 정규방정식의 조건수를 적절하게 제한하면 적은 감쇠항으로도 빠르고 안정하게 최적화가 진행함을 확인하였으며, 이는 조건수의 제한이 감쇠최소자승법에서 감쇠항이 적은 경우에 발생하는 정규방정식의 불량조건을 잘 극복하고 있음을 보

여주고 있다.

Double-Gauss형 사진렌즈계를 10개의 곡률변수만으로 최적화한 경우 가장 좋은 최적화조건은 감쇠계수가 0.01 이고 f 가 10^{-4} 일 때였으며, 이 경우 3회만에 최적점에 수렴하였다. 최종 설계된 사진렌즈계는 왜곡수차가 1% 이내, 다른 수차들은 0.1 mm 이내로 보정되었으며 vignetting효과는 최대 반시제각 22.5°에서 0°일 때와 비교하여 87.65%의 광량이 통과하였다.

참 고 문 헌

[1] T. H. Jamieson, *Optimization Techniques in Lens Design*, Monographs on Applied Optics No. 5, American Elsevier Pub., New York(1971).
 [2] S. Rosen and C. Eldert, *J. Opt. Soc. Amer.* **44**, 250(1954).
 [3] J. Meiron, *J. Opt. Soc. Amer.* **55**, 1105(1965).
 [4] G. E. Forsythe and C. B. Moler, *Computer Solution of Linear Algebraic Systems*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs(1967).
 [5] D. P. Feder, *Appl. Opt.* **2**, 1209(1963).
 [6] D. R. Buchele, *Appl. Opt.* **7**, 2433(1968).
 [7] 이종웅, 이상수, *새물리*, **27**, 8(1987).
 [8] 정진호, 장요셉, 정해빈, 이상수, *새물리*, **25**, 85

(1985).
 [9] 김진태, 정진호, 최옥식, *새물리*, **29**, 128(1989).
 [10] D. S. Grey, *J. Opt. Soc. Amer.* **53**, 672(1963).
 [11] L. W. Cornwell and A. K. Rigler, *Appl. Opt.* **11**, 1659(1972).
 [12] K. E. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, John Wiley & Sons Inc., New York (1978).
 [13] G. H. Golub, C. F. Van Loan, *Matrix Computation*, The Johns Hopkins University Press, London (1989).
 [14] G. E. Forsythe, M. A. Malcolm and C. B. Moler, *Computer Methods for Mathematical Computations*, Prentice-Hall Inc., New Jersey(1977).
 [15] P. E. Gill, W. Murray, M. H. Wright, *Numerical Linear Algebra and Optimization*, Volume I, Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City (1991).
 [16] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, New York(1986).
 [17] G. Lange et al., U.S.P. 3,043,193 (1962).
 [18] M. Laikin, *Lens Design*, Marcel Dekker Inc., New York(1991).

A Study on the Optimization Technique by Using Orthogonalization and Singular Value Decomposition in Lens Design

Ki Tae Kim and Jong Ung Lee

Dept. of Physics and Optical Engineering, Chongju University, Chongju 360-764, Korea

(Received: August 27, 1993)

An optimization technique with variable orthogonalization and SVD(singular value decomposition) is examined in a double-Gauss type photographic lens design and its convergence and stability are compared with ordinary least squares and DLS(damped least squares) method.

It is known that there are close relationship between the stability of optimization and condition number of nomal equation, the ratio between maximum and minimum of eigenvalues. In this study, the stability is greatly improved by limiting the condition number, the SVD, as expected. The case of DLS with small damping, orthogonalization and SVD shows the most rapid convergence and stability. It means that the unstability of DLS method with small damping is overcome by using the variable orthogonalization and SVD.