

신호원 수를 모를 때 신호 도착방향을 추정하는 방법

A Method of Estimation of Direction of Arrival with Number of Signal Sources Unspecified

최진호*, 이용업*, 윤진선*, 송익호*

(Jinho Choi*, Yong Up Lee*, Jin Seon Yun*, Ickho Song*)

요약

이 논문에서는 신호원 수를 모를 때 신호의 도착 방향을 추정하는 문제를 생각하여 이를 푸는 한가지 방법을 제안하였다. 이 방법은 다중신호분류(multiple signal classification : MUSIC) 방법과 Capon의 방법에 관련이 있는 것이다. 모의 실험을 거쳐 신호원 수를 모를 때 제안된 방법의 성능이 신호원 수를 정확히 알 때 MUSIC방법의 성능과 거의 같음을 보였다.

Abstract

In this paper, estimation of direction of arrival without assuming the number of signal sources is addressed. A direction of arrival estimation algorithm is proposed which is related to the multiple signal classification (MUSIC) and Capon's methods. The performance of the proposed method when the number of signal sources is unknown is shown to be almost the same as that of the MUSIC method when the number of signal sources is exactly known.

I. 머릿말

배열 수신기를 써서 신호원의 방향을 추정하는 방법은 여러가지가 있는데, 요즘에는 고유구조에(eigen-structure) 바탕을 둔 고해상도 방법들이 제안되고 있다. 보기를 들면 다중신호분류(multiple signal classification : MUSIC), Min-Norm, 회전불변(rotation-invariance) 기법들[1,2] 쓴 신호매개변수 추정과 같은 것이 이러한 것들이다. 또한 고유구조에 바탕을 두지 않은 최대우도(maximum likelihood) 방법과 같은 다른 방법들도[3] 제안된 바 있다.

신호의 도착 방향을 추정할 때에 널리 쓰이는 MU-

SIC 방법과 같이 고유구조에 바탕을 둔 방법들을 쓰려면, 신호의 도착 방향을 추정하기에 앞서서 먼저 신호원 수를 알아 낸 다음 부공간분해를(subspace decomposition)[4,5] 거쳐야 한다. 곧, 신호원 수를 추정한 다음 측정된 배열 출력자료의 공분산 행렬에서 신호와 잡음 부공간들을 먼저 얻어야 하는데, 이 두 부공간은 신호의 도착 방향을 추정하는 데에 매우 중요한 역할을 한다.

그러나, 신호원 수를 추정하는 것은 매우 어려운 문제이며, 이를 위해 여러가지 방법들이 제시되었다. 그 가운데에서 널리 쓰이는 AIC(Akaike information criterion) 원리를 쓰는 방법과[6] MDL(minimum descriptive length)원리를 쓰는 방법들은[7] 신호와 잡음의 통계적 특성을 완전히 알아야 쓸 수 있다. 다시 말하면, 이 방법들로 부공간을 나눈 다음 MUSIC

* 한국과학기술원 전기 및 전자공학과

접수일자: 1993년 4월 15일

방법을 써서 신호의 도착 방향을 추정하려면 신호와 잡음의 통계적 특성을 완전히 알아야 한다.

한편, 신호원 수를 미리 알 필요없이 신호의 도착 방향을 추정하는 방법들도 제안되었는데, 그 방법 가운데에서 Capon 방법이[2,8] 가장 널리 알려져 있다. 물론, 신호원 수를 안다면 MUSIC 방법의 성능이 Capon 방법의 성능보다 좋다. 이 논문에서는 신호원 수를 모를 때 신호의 도착 방향을 추정하는 한가지 방법을 제안하였다. 이 방법은 MUSIC 방법과 Capon 방법에 관련이 있는 것이다. 모의 실험을 거쳐서 제안된 방법의 성능이 신호원 수를 알 필요가 없음에도 불구하고 신호원 수를 알아야만 쓸 수 있는 MUSIC 방법의 성능과 비슷하다는 것을 보였다.

II. MUSIC과 Capon 방법

크기가 $L \times 1$ 인 복소 벡터의 집합인 복소 벡터 공간을 $C^{L \times 1}$ 이라고 쓰기로 하고 출력 벡터가 $y(t) \in C^{L \times 1}$ 인 다음과 같은 관측 모형을 생각하자.

$$y(t) = Ax(t) + n(t), \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

식(1)에서 $M \times 1$ 벡터 $x(t)$ 는 평균이 0인 복소 정규 확률 벡터이고(complex Gaussian random vector) 가산성 잡음 $n(t)$ 는 평균이 0이고 공분산(covariance) 행렬이 $\sigma^2 I$ 인 복소 정규 확률 벡터라고 하자. 행렬 A 는 $L \times M (L > M)$ 복소 행렬인데, θ_i 가 i 번째 신호의 도착 방향이라면 $A = [a(\theta_1), a(\theta_2), \dots, a(\theta_M)]$ 인 모양을 갖는다. 여기서 $a(\theta_i)$ 를 조종(steering) 벡터 또는 전달(transfer) 벡터라고 부른다.

출력 벡터 $y(t)$ 의 공분산 행렬을 R_y 로 쓰면 이는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$R_y = AR_x A^H + \sigma^2 I. \quad (2)$$

이 공분산 행렬 R_y 의 고유값(eigenvalue)과 고유벡터(eigenvector)를 각각 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_L$ 과 e_1, e_2, \dots, e_L 로 나타내면 $\lambda_{M+1} = \lambda_{M+2} = \dots = \lambda_L = \sigma^2$ 이다. 행렬 $S = [e_1, e_2, \dots, e_M]$ 과 $G = [e_{M+1}, e_{M+2}, \dots, e_L]$ 의 범위(range)를 각각 신호 부공간(signal subspace)과 잡음 부공간(noise subspace)이라 부른다. 신호 도착 방향의 집합을 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M\}$ 이라고 하면 벡터 $a(\theta_i), 1 \leq i \leq M$ 이 잡음 부공간과 직교하므로(orthogonal) $\theta \in \Theta$ 일 때

$$a^H(\theta)G = 0 \quad (3)$$

이다. 여기서 $D(\theta) = a^H(\theta)GG^H a(\theta)$ 라 하면 이 함수 $D(\theta)$ 는 $\theta \in \Theta$ 에서만 0임이 알려져 있다[3].

그러나, 우리가 얻을 수 있는 것은 R_y 의 추정값인

$$\hat{R}_y = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t)y^H(t) \quad (4)$$

이므로 이것으로부터 얻는 S 와 G 의 추정값인 \hat{S} 와 \hat{G} 를 쓰면 MUSIC 영 스펙트럼(null spectrum) $f_M(\theta)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$f_M(\theta) = a^H(\theta)\hat{G}\hat{G}^H a(\theta). \quad (5)$$

그러므로, $f_M(\theta)$ 는 $\theta \in \Theta$ 근처에서 극소점을 가질 것이고 $f_M(\theta)$ 의 극소점을 찾음으로써 신호의 도착 방향을 추정할 수 있다.

Capon 방법은[8] 전과속형성(beamforming) 방식 원리를 발전시킨 것으로써, 측정된 배열 수신기 출력에서 신호 도착 방향의 신호 전력은 일정하게 유지하면서 잡음전력을 가장 작게하는 것이다. 곧

$$\min_w w^H R_y w \text{ subject to } |w^H a(\theta)| = 1 \quad (6)$$

의 풀이는

$$w_c = \frac{R_y^{-1} a(\theta)}{a^H(\theta) R_y^{-1} a(\theta)} \quad (7)$$

이므로, Capon 스펙트럼 $f_c(\theta)$ 는

$$f_c(\theta) = a^H(\theta) R_y^{-1} a(\theta) \quad (8)$$

이다. 신호 도착 방향 추정값은 $f_c(\theta)$ 를 극소로 하는 θ 의 값이다. 여기서 알 수 있듯이 Capon 방법으로 신호의 도착 방향을 추정할 때에는 신호원 수를 알아야 할 필요가 없다.

III. 새로운 방법

먼저 다음과 같은 두행렬

$$F = [\hat{S} : \hat{G}] \quad (9)$$

와

$$W = \begin{pmatrix} O_{M \times M} & O_{M \times (L-M)} \\ O_{(L-M) \times M} & I_{(L-M) \times (L-M)} \end{pmatrix} \quad (10)$$

을 생각하자. 식 (10)에서 $O_{J \times K}$ 는 크기가 $J \times K$ 이고 모든 원소가 0인 행렬이며, $I_{J \times K}$ 는 크기가 $J \times K$ 인 단위(identity) 행렬이다. 그리고 $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_L$ 을 \hat{R}_y 의 고유값이라 하고 $\Lambda = \text{diag} [(\frac{\lambda_1}{\lambda_c}), (\frac{\lambda_2}{\lambda_c}), \dots, (\frac{\lambda_L}{\lambda_c})]$ 이라고 둔 다음 다음과 같은 영 스펙트럼을 생각해 보자[9].

$$f_n(\theta) = a^H(\theta) F \Lambda^{-n} F^H a(\theta), \quad n \geq 0. \quad (11)$$

여기서 $\hat{R}_y = R_y$ (점근적으로, $N \rightarrow \infty$)이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda^{-n} = W$ 이므로

$$\begin{aligned} f_\infty(\theta) &= a^H(\theta) G G^H a(\theta) \\ &= f_M(\theta) \end{aligned} \quad (12)$$

가 된다.

위에서, 스펙트럼 $f_n(\theta)$ 를 쓰면 신호원 수를 모를 때에도 신호의 도착 방향을 추정할 수 있다는 것을 알 수 있다. 그리고 $\hat{R}_y \cong R_y$ 일 때 n 이 매우 크다면 $f_n(\theta)$ 의 성능은 MUSIC 영 스펙트럼의 성능과 거의 같을 것임을 알 수 있다. 그 뿐만 아니라, $\hat{\lambda}_L$ 으로 정규화하면 $f_1(\theta)$ 의 역이 Capon의 스펙트럼이 된다는 것을 $R_y^{-1} = F \Lambda^{-1} F^H$ 임을 눈여겨 보면 쉽게 보일 수 있다.

이제, 앞에서 얻은 영 스펙트럼 $f_M(\theta)$ 와 $f_n(\theta)$ 의 다른 점을 살펴보자. 먼저 $\hat{R}_y = R_y$ 라 두면 영 스펙트럼 $f_M(\theta)$ 와 $f_n(\theta)$ 는

$$f_M(\theta) = a^H(\theta) G G^H a(\theta) \quad (13)$$

과

$$f_n(\theta) = a^H(\theta) G \Lambda_c^{-n} G^H a(\theta) + a^H(\theta) S \Lambda_c^{-n} S^H a(\theta) \quad (14)$$

로 된다. 여기서 $\Lambda_c = \text{diag} [(\frac{\lambda_{M+1}}{\lambda_c}), (\frac{\lambda_{M+2}}{\lambda_c}), \dots, (\frac{\lambda_L}{\lambda_c})]$ 이며, $\Lambda_s = \text{diag} [(\frac{\lambda_1}{\lambda_c}), (\frac{\lambda_2}{\lambda_c}), \dots, (\frac{\lambda_M}{\lambda_c})]$ 이다. 그런데 $\lambda_{M+1} = \lambda_{M+2} = \dots = \lambda_L$ 이므로

$$f_n(\theta) = f_M(\theta) + \epsilon_n(\theta) \quad (15)$$

와

$$\epsilon_n(\theta) = a^H(\theta) S \Lambda_c^{-n} S^H a(\theta) \quad (16)$$

임을 알 수 있다. 여기서, $\epsilon_n(\theta) \geq 0$ 이므로

$$f_n(\theta) \geq f_M(\theta) \quad (17)$$

이다. 엄밀히 말하면, 어떤 방향에서도 $\epsilon_n(\theta) > 0$ 이므로, 곧 $f_n(\theta) > 0$ 이므로, 스펙트럼 $f_n(\theta)$ 는 영 스펙트럼은 아니다.

이제, 영 스펙트럼 $f_M(\theta)$ 와 $f_n(\theta)$ 의 차이인 $\epsilon_n(\theta)$ 의 상한(upper bound) 얻어보면, (16)에서

$$\begin{aligned} \epsilon_n(\theta) &= \sum_{i=1}^M (\frac{\lambda_i}{\lambda_c})^n |a^H(\theta) e_i|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^M (\frac{\lambda_i}{\lambda_c})^n \|a^H(\theta)\|^2 \|e_i\|^2 \\ &\quad \cdot \sum_{i=1}^M (\frac{\lambda_i}{\lambda_c})^n L \\ &\leq M L (\frac{\sigma^2}{\lambda_M})^n \\ &\equiv B_n \end{aligned} \quad (18)$$

이다. 여기서 $\| \cdot \|$ 는 2-Norm이며, $n \rightarrow \infty$ 이면 B_n 이 0이 됨을 알 수 있다.

신호원 수 M 이 2이고 두 신호가 매우 가까이 있을 때를 생각해 보면, 공분산 행렬 R_y 의 가장 큰 두 고유값은

$$\lambda_1 \cong \sigma^2 + L(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2 \quad (19)$$

와

$$\lambda_2 \cong \sigma^2 + \frac{2L P_1 P_2 \epsilon_\phi^2 \epsilon_\rho^2}{(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2} \quad (20)$$

이다[10]. 여기서 $P_i = E[|x_i(t)|^2]$, $i = 1, 2$,는 신호 전력이며, $\epsilon_\rho^2 = 1 - |\rho|^2$, $\epsilon_\phi^2 = 1 - |\phi|^2$ 이고, $\rho = E[x_1(t) x_2^*(t)] / \sqrt{P_1 P_2}$ 이며, $\phi = \frac{1}{L} a^H(\theta_1) a(\theta_2)$ 이다. 이때 상한 B_n 은 근사적으로

$$\begin{aligned} B_n &= M L (\frac{\sigma^2}{\lambda_2})^n \\ &\cong M L (1 - \frac{\gamma}{\gamma + \sigma^2})^n = M L (1 + \frac{\gamma}{\sigma^2})^{-n} \end{aligned} \quad (21)$$

인데, 여기서

$$\gamma = \frac{2P_1 P_2 \epsilon_p^2 \epsilon_r^2}{(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2} \quad (22)$$

이다. 식 (21)에서 상한 B_n 은 SNR, 신호원 사이의 상관, 두 신호 도착방향의 차이에 의존함을 알 수 있다. 또한, (22)에서 $P=P_1=P_2$ 이면 γ 는 P 에 비례하므로, (21)에서 SNR에 비례하는 $\frac{\gamma}{\sigma^2}$ 가 커지면 B_n 은 0에 가까워짐을 알 수 있다.

그러면, 가까이 있는 두 신호원이 $f_{MU}(\theta)$ 로 분간될 때 $f_n(\theta)$ 로도 분간될 수 있을 만큼 B_n 을 충분히 작게 하는 n 의 값을 얻어 보자. 두 신호 도착 방향의 한 가운데에서, 곧, $\theta = \theta_m \approx \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$ 일때 MUSIC 영 스펙트럼 $f_{MU}(\theta)$ 를 생각하자. $\epsilon_n(\theta_m)$ 의 상한 B_n 이 $f_{MU}(\theta_m)$ 보다 작으면

$$\begin{aligned} f_n(\theta_m) &= f_{MU}(\theta_m) + \epsilon_n(\theta_m) \\ &\geq f_{MU}(\theta_m) \\ &\geq B_n \\ &\geq f_{MU}(\theta_i) + \epsilon_n(\theta_i) \quad (f_{MU}(\theta_i) = 0) \\ &= f_n(\theta_i), \quad i=1, 2. \end{aligned} \quad (23)$$

이므로 $f_n(\theta_m)$ 은 $f_n(\theta_1)$ 과 $f_n(\theta_2)$ 보다 크다. 이와 같이, B_n 이 $f_{MU}(\theta_m)$ 과 같거나 $f_{MU}(\theta_m)$ 보다 작도록 n 을 잡으면 두 신호원은 영 스펙트럼 $f_n(\theta)$ 과 $f_{MU}(\theta)$ 어느 것으로도 분간할 수 있다. 두 신호원이 서로 상관관계가 없고 전력이 같으며 배열크기 L 이 10일 때 표 1에 $f_n(\theta)$ 와 B_n 이 같게 되는 n 의 값을 보였다.

표 1. $f_n(\theta)$ 와 B_n 이 같아지는 n

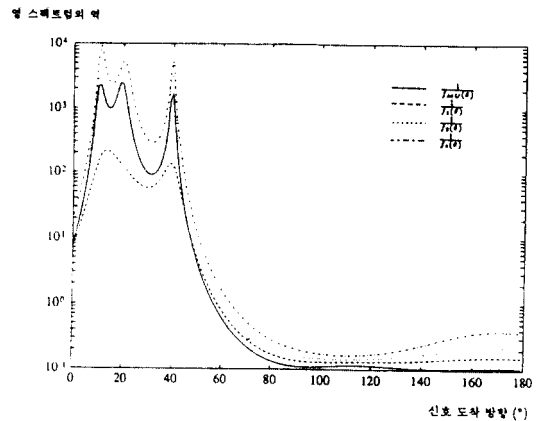
두 신호 도착 방향의 차이 (\circ)	5	7	9	11	13	15
SNR = 10 dB	7.209	4.696	3.329	2.666	2.182	1.887
SNR = 20 dB	2.966	2.238	1.729	1.507	1.312	1.058

실제로는(곧, N 이 유한할 때에는) \hat{R}_s 이 R_s 와 다르기 때문에 식 (12)는 얻을 수 없으므로, n 을 무한히 크게 하면 오히려 $f_{MU}(\theta)$ 와 $f_n(\theta)$ 의 차이가 커진다. 그러므로 n 은 (23)을 만족시키는 그리 크지 않는 수로 해야 한다.

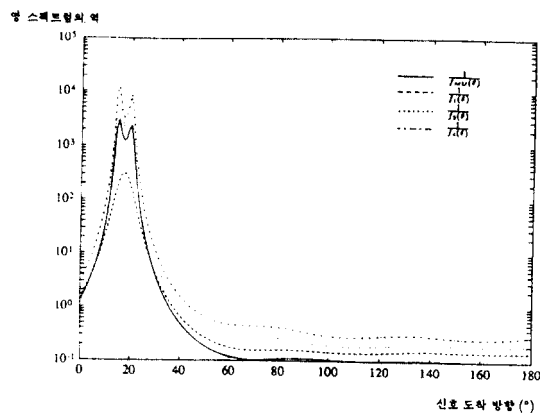
IV. 모의 실험

배열크기가 10일 때 상관관계가 없고 전력이 같은

두 신호원의 도착 방향이 15° 와 20° 라고 하자. 또한 수신기에서의 SNR은 20dB이고 관측크기 N 은 100이라 하자. 이때 영 스펙트럼 $f_{MU}(\theta)$, $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$ 와 $f_4(\theta)$ 의 역을 (inverse) 그림 1(a)에 보였다. 그림 1(b)는 이 네 영 스펙트럼의 역을 M 이 3이고 신호 도착 방향이 10° , 20° , 40° 일때를 그린 것이다. 그림 1에서 $f_2(\theta)$ 와 $f_4(\theta)$ 의 성능이 MUSIC 영 스펙트럼의 성능과 거의 같음을 알 수 있다. 그런데, 이와같은 비슷한 성능은 $f_{MU}(\theta)$ 를 쓸 때에는 신호원 수를 알고 있다고 하여 얻은 것이고, $f_2(\theta)$ 와 $f_4(\theta)$ 를 쓸 때에는 신호원 수를 모르면서도(신호원 수를 미리 알지 않고) 얻는 것이라는 점을 새겨 두어야 한다. 곧, 그림 1



(a)



(b)

그림 1. (a) $N=100$, $L=10$, $M=2$ 이고 $SNR=20dB$ 일 때 영 스펙트럼 $f_{MU}(\theta)$, $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$ 와 $f_4(\theta)$ 의 역 ($\theta_1=15^\circ$, $\theta_2=17^\circ$)
(b) $N=100$, $L=10$, $M=3$ 이고 $SNR=20dB$ 일 때 영 스펙트럼 $f_{MU}(\theta)$, $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$ 와 $f_4(\theta)$ 의 역 ($\theta_1=10^\circ$, $\theta_2=20^\circ$, $\theta_3=40^\circ$)

은 영 스펙트럼(11)을 쓰면 MUSIC 영 스펙트럼을 쓸 때보다 더 쉽게 MUSIC 영 스펙트럼을 쓸 때와 비슷한 결과를 얻을 수 있음을 말해 준다.

V. 맺음말

이 논문에서는 신호원 수를 정확히 알고 있지 않을 때, 고유구조에 바탕을 두고 신호원의 도착 방향을 추정하는 문제를 생각하였다. 그와 같은 때에 신호원 수를 모르더라도 얻을 수 있는 새로운 영 스펙트럼에 바탕을 두고 신호원의 도착 방향을 추정하는 한가지 방법을 제안하였다. 신호원 수를 알 수 없을 때 제안된 방법의 성능이 신호원 수를 알 때 MUSIC 방법의 성능과 거의 같음을 보였다.

참 고 문 헌

1. R. O. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," *IEEE Trans. Ant. Prop.*, vol. AP-34, pp.276-280, March 1986.
2. S. U. Pillai, *Array Signal Processing*, Springer Verlag, New York, 1989.
3. P. Stoica and A. Nehorai, "NUSIC, maximum likelihood and Cramer-Raobound," *IEEE Trans. Acous., Speech, Signal Proc.*, vol. ASSP 37, pp.720-740, May 1989.
4. M. Wax and T. Kailath, "Detection of signal by information theoretic criteria," *IEEE Trans. Acous., Speech, Signal Proc.*, vol. ASSP-33, pp.387-392, April 1985.
5. 최진호, 윤진선, 김형명, 송익호, 박성일, "MUSIC 영 스펙트럼의 평균과 분산," 한국통신학회 논문지, 제17권, 114-120쪽, 1992년 2월.
6. H. Akaike, "A new look at the statistical model identification," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-19, pp.716-723, December 1974.
7. G. Schwartz, "Estimating the dimension of a model," *Ann. Stat.*, vol. 6, pp.461-464, March 1978.
8. J. Capon, "High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis," *Proc. IEEE*, vol. 57, pp.1408-1418, August 1969.
9. 최진호, 고유구조에 바탕을 둔 신호 도착방향의 추정: 성결과 새로운 방법, 박사 학위 논문, 한국과학기술원 전기및 전자공학과, 1993년 6월.
10. J. E. Hudson, *Adaptive Array Principles*, Peter Peregrinus Ltd., Stevenage, U. K., 1981.

▲崔 眞 豪 (Jinho Choi) 1967년 2월 22일생
1989년 2월 : 서강대학교 전자공학과(공학사, magna cum laude)
1991년 2월 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학석사)
1991년 3월 ~ 현재 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 박사과정

▲尹 眞 鮮 (Jin Seon Yun) 1969년 2월 7일생
1991년 2월 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학사)
1993년 2월 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학박사)
1993년 3월 ~ 현재 : 현대전자 산업전자 연구소 연구원

▲宋 翊 鎬(Ickho Song) 1960년 2월 20일생



1982년 2월 : 공학사(magna cum laude), 서울대학교 전자공학과

1984년 2월 : 공학석사, 서울대학교 대학원 전자공학과

1985년 8월 : M.S.E., Dept. of EE, Univ. of Pennsylvania

1987년 5월 : Ph.D., Dept. of EE, Univ. of Pennsylvania

1987년 3월~1988년 2월 : Bell Communications Research(Morristown) 연구원

1988년 3월~1991년 8월 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 조교수

1989년 : IEEE 한국지회 재무

1990년~1992년 : 한국음향학회 편집위원

1991년 9월~현재 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 부교수

1989년 9월~1990년 8월 : URSI 신진과학자상

1991년 11월 : 한국통신학회 학술상

※주관심분야: 검파와 추정, 통계학적 신호처리, 배열신호처리, 스펙트럼 분석, 통신이론