

공진을 통과하는 일자유도계의 과도진동 특성

정 태 진*, 홍 등 표**, 태 신 호***

Transitional Vibration Characteristics of Single Degree of Freedom System through the Resonance

Tae-Jin Chung*, Dong-Pyo Hong**, Sin-Ho Tae***

ABSTRACT

The transitional characteristics of oscillations and rotational speeds from the starting to the stationary states in damped single degree of freedom systems acted upon the rotor unbalance forces are studied. Angular travel is assumed to vary with time. The theoretical analysis is obtained by using Laplace transform method. Integration involved in the theoretical results is carried out by the numerical analysis program of continuous-time linear systems to arbitrary inputs. It is evident that the transitional characteristics of a machine are affected remarkably by damping ratios, stationary angular velocity time and frequency ratios.

Key Words : Rotor Unbalance Forces (회전체 편심하중), Transitional Vibration Characteristics (과도 진동특성), Stationary Angular Velocity (정상 각속도), Continuous Time Linear System (연속시 선형계)

기 호 설 명

- | | | | |
|------------------|------------------------|-------------------|--------------------------------------|
| M | : 기계전체의 질량 | $\omega_n, (f_n)$ | : 계의 고유진동수 ($f_n = \omega_n/2\pi$) |
| K | : 스프링 정수 | C | : 계의 감쇠계수 |
| ρ | : 기계 중심으로부터 편심질량까지의 거리 | y | : 기계의 진동 변위 |
| m | : 편심질량 | τ | : 무차원 시간 |
| (τ_1) | : 무차원 정상상태 도달시간 | θ | : 회전체의 회전각 변위 |
| $\zeta (= C/2M)$ | : 계의 감쇠인자 | ξ | : 무차원 진동 변위 |
| | | $\omega_r, (f_r)$ | : 계의 고유진동수 ($f_r = \omega_r/2\pi$) |

* 군산대학교 공과대학 기계설계학과 (정회원)

** 전북대학교 공과대학 정밀기계공학과

*** 전북대학교 공과대학 정밀기계공학과 대학원

1. 서 론

일반적으로 고속 회전체가 장착된 기계는 회전체의 운전속도가 변함에 따라 계의 고유진동수를 지나치게 된다. 이 영역을 통과할 때 계에 진동이 심하게 발생되어 기계 자체는 물론 기계 부품에도 악영향을 미치게 된다. 그러므로 계의 고유진동수 부근에서 발생하는 과도특성을 파악하고 이를 기계의 설계시 고려하는 것이 중요하다고 할 수 있다.

F. M. Lewis⁽¹⁾와 Ellington⁽²⁾은 일자유도계에서 시간에 따라 변화하는 주파수를 갖는 외부 기진력이 계의 고유진동수를 지날 때 계의 진동의 동적특성을 연구하였다. 또한 Lewis는 공진영역에서의 최대진폭이 그 영역을 통과하는 가속도의 크기에 반비례함을 보여 주었다. Lewis 이후로 1959년에 A. Dornig⁽³⁾는 관성력을 받는 일자유도계에서 속도의 변화에 의한 계의 과도진동을 연구하여 공진상태에서 최대진폭이 계의 고유진동수에 비례하고 각가속도에 반비례 함을 보여 주었다. 김찬목과 김광식⁽⁴⁾은 일자유도 회전체를 변가속도를 주어 위험속도 영역을 통과 시켰을 때 발생하는 과도진동의 특성을 Runge-Kutta 방법을 이용하여 가속도의 방식이 시간의 제곱근에 반비례하는 경우가 가장 좋은 통과방식이라는 것을 구하였다. K. Matsuura⁽⁵⁾은 회전체가 공진을 통과하여 정상상태에 도달할 때까지의 과도특성을 Runge-Kutta-Gill 방법을 이용하여 수치적으로 계산하고 이후에 실험을 수행한 연구 결과를 보고한 바 있다. V. O. Kononenko⁽⁶⁾는 Bogoliubov's perturbation 이론을 이용하여 Power supply가 부착된 회전체를 여러가지로 변가속 했을 때 회전체의 운동을 체계적으로 연구 하였다.

계의 진동에 작용하는 기진력은 회전체의 운전속도의 함수이다. 본 연구에서 일자유도계의 회전체의 편심질량에 의해 발생하는 기진력 $m\rho \text{Im}(\dot{\theta}^2 e^{j\theta} - j\dot{\theta} e^{j\theta})$ 은 김찬목과 김광식에 의해서 증명된 가장 안정한 운전속도 경로부터 가정하였다. 이와 같은 기진력의 가정 아래 감쇠기와 스프링으로 지지되는 일자유도 회전체가 고유진동수를 통과한 후에 정상상태에 도달할 때까지의 회전체의 과도응답 특성을 Laplace Transform 방법을 이용하여 이론해석을 하고, 수치해석을 통하여 감쇠의 변화에 따른 계의 과도응답 특성을 연구하고, 또한 회전체의 각속도가 일정하게 되는 시간과 진동수비가 계의 과도응답 특성에 어떠한 영향을 미치는 가에 대한 연구

를 수행한다. 이러한 연구로부터 최대진폭을 효과적으로 줄일 수 있는 회전체의 고유 파라메타 범위가 있음을 알 수 있었다.

2. 이론해석

회전기계 장치에서의 편심질량의 회전에 의한 가진은 계의 진동의 주요 원인중의 하나이다. 전체질량 M을 갖는 기계는 단지 y방향만으로 자유롭게 움직인다고 가정한다. 그리고 질량이 없는 속도비례형 선형감쇠기와 스프링으로 기계가 지지된다고 하면 이 계에 대한 단순한 모델은 Fig.1와 같고 진동방정식은 다음과 같다.

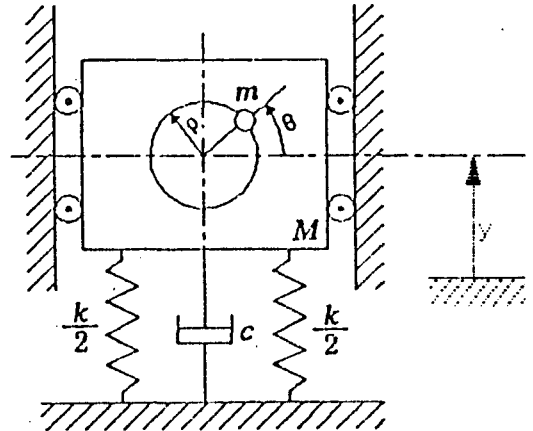


Fig.1 Simple oscillator excited by an eccentric mass

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = F(t) \quad (1)$$

여기서 기진력 F(t)는 회전기계가 시간에 따라 변화하는 각 가속도를 가지고 회전할 때 회전자의 회전각을 지수적으로 나타내면 다음과 같다.

$$F(t) = -m\rho \frac{d^2}{dt^2} (e^{j\theta}) \quad (2)$$

식(2)에서 m는 편심질량이고 rho는 이 질량까지의 편심거리이다.

여기서 계의 진동원은 y방향으로 작용하는 편심질량의 관성력이다. 이 기진력은 회전각의 각속도와 각가속도의 함수로 표시된다. 그리고 이것의 허수부분만을 고려한다.

$$F(t) = m\rho \text{Im}(\dot{\theta}^2 e^{j\theta} - j\dot{\theta} e^{j\theta}) \quad (3)$$

따라서 진동방정식은 아래와 같다.

$$M \ddot{y} + C \dot{y} + K y = m\rho \operatorname{Im}(\dot{\theta}^2 e^{j\theta} - j\dot{\theta} e^{j\theta}) \quad (4)$$

이 회전체의 회전각 변위는 정지상태로부터 시간에 따라 점차 감소하는 각속도로 회전하기 시작하여 정상 상태에 도달할 때 일정한 각속도로 회전한다고 가정하면 이때의 각변위는 다음과 같다.

$$\theta = \begin{cases} \omega_r T_1 \left(\frac{t^2}{T_1^2} - \frac{t^3}{3 T_1^3} \right) & 0 \leq t \leq T_1 \\ \omega_r \left(t - \frac{T_1}{3} \right) & t > T_1 \end{cases} \quad (5)$$

이 방정식을 무차원화 하기 위하여 $\tau = \omega_n t$ 라 하면 운동 방정식은 무차원 시간 τ 의 함수로서 표시된다.

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2\zeta \frac{dy}{d\tau} + y = \frac{m\rho}{M} \operatorname{Im}(\dot{\theta}_1^2 e^{j\theta_1} - j\dot{\theta}_1 e^{j\theta_1}) \quad (6)$$

여기서 $e = m\rho/M$, $r = \omega_r/\omega_n$ 그리고 $\tau_1 = \omega_n T_1$ 라 하면 무차원 회전각 변위 θ_1 은 계의 고유진동수에 대한 정상 상태 주파수 비 r 와 회전체의 무차원 각속도 일정시간 τ_1 으로 표시된다.

$$\theta_1 = \begin{cases} r \tau_1 \left(\frac{\tau^2}{\tau_1^2} - \frac{\tau^3}{3 \tau_1^3} \right) & 0 \leq \tau \leq \tau_1 \\ r \left(\tau - \frac{\tau_1}{3} \right) & \tau > \tau_1 \end{cases} \quad (7)$$

선형 미분방정식의 해를 구하는 방법으로서 Laplace transform method를 이용한다. 초기조건은 회전체가 정지한 상태에서부터 회전이 시작된다고 하면 $\tau=0$ 일때 $y(0) = \dot{y}(0) = 0$

$$Y(S) = \frac{e F(S)}{S^2 + 2\zeta S + 1} \quad (8)$$

여기서 s 영역에서의 기진력 $F(S)$ 는 식(9)와 같다.

$$F(S) = L \{ \operatorname{Im}(\dot{\theta}_1^2 e^{j\theta_1} - j\dot{\theta}_1 e^{j\theta_1}) \} \quad (9)$$

Convolution theorem을 이용하여 식(8)을 역변환

하면 회전체가 정지상태에서 정상상태에 도달하는 동안 과도기간에서 일어나는 계의 동특성에 대한 이론 적분식은 다음과 같다.

$$y(t) = \frac{e}{\sqrt{1-\zeta^2}} \int_0^t e^{-\zeta(\tau-t)} \sin \{ \sqrt{1-\zeta^2} (\tau-t') \} F(\tau') d\tau' \quad (10)$$

$\xi = y/e$ 라 하면 무차원 진폭변위 ξ 는 아래식과 같다.

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \int_0^t e^{-\zeta(\tau-t)} \sin \{ \sqrt{1-\zeta^2} (\tau-t') \} \cdot \operatorname{Im}(\dot{\theta}_1^2 e^{j\theta_1} - j\dot{\theta}_1 e^{j\theta_1}) d\tau' \quad (11)$$

3. 수치해석 및 결과

시간에 따라 변하는 각 변위를 받는 회전체의 각속도는 Fig. 2와 같다. 그리고 기계는 정지상태로부터 시작하여 무차원 시간 τ 의 함수인 아래와 같은 각속도와 각가속도를 가지고 회전하기 시작하여 위험속도 영역을 통과한다. 이 계의 기진력은 각속도와 각가속도의 함수가 된다. 이 함수는 김찬목과 김광식(4)이 이미 증명하였던 것으로 위험속도를 가장 원만하게 통과할 수 있는 변가속법에 근거를 두고 가정한 함수이다.

$$\dot{\theta}_1 = \begin{cases} r \left(2 \frac{\tau}{\tau_1} - \frac{\tau^2}{\tau_1^2} \right) & 0 \leq \tau \leq \tau_1 \\ r & \tau > \tau_1 \end{cases} \quad (12)$$

$$\ddot{\theta}_1 = \begin{cases} 2r \left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{\tau}{\tau_1^2} \right) & 0 \leq \tau \leq \tau_1 \\ 0 & \tau_1 \leq \tau \end{cases} \quad (13)$$

그리고 회전체의 운전속도는 ω_r 에 도달하여 일정하게 된다. 일자유도계의 과도진동의 수치해석을 위하여 입력되는 인자들은 계의 비감쇠 고유진동수 f_n 와 회전주파수 f_r , 진동수비 $r=f_n/f_r$, 계의 감쇠계수 ζ 그리고 무차원 각속도 일정시간 τ_1 이다. 이 인자들의 수치값은 $f_n = 10, 20(\text{Hz})$, $f_r = 8, 12, 15, 20, 24, 40(\text{Hz})$, $r = 0.8, 0.9, 1.1, 1.3, 1.5$, $\zeta = 0.02, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5$, $\tau_1 = 1, 1.5, 2, 2.5, 3$ 이고 계의 과도진동을 연구하기 위하여 위의 각 인자들의 변화에 따라 수

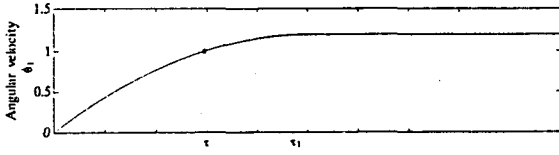


Fig. 2 Dimensionless angular velocity versus time

치해석이 수행되었다. 운전속도 ω_r 이 위험속도 보다 적을 경우 변위포락선은 순간정상상태 응답포락선 주위에서 진동한다. 또한 회전체의 운전속도가 계의 위험속도에 접근할 때 진동진폭은 증가한다.

Fig. 2에서 "0"으로 표시된 부분은 회전체의 운전속도가 계의 위험속도와 같은 곳이다. 회전체가 정지상태로부터 회전하기 시작하여 기체의 위험속도까지 걸리는 시간은 주파수 비와 각속도 일정시간(τ_1)에 따라 변한다. 이 시간은 아래식으로부터 구할 수 있다.

$$\tau = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{r}} \right) \tau_1 \quad (14)$$

회전체의 운전속도가 기체의 위험속도 영역을 지날 때 진폭은 급속하게 증가하여 공진점을 통과한 후 최대값에 도달한다. 따라서 이 위험속도 영역에서 오래 운전되면 기체의 피로파괴가 초래될 수 있다. 또한 기체는 진폭이 최대값에 도달한 후에는 감소하여 일정한 크기의 진폭을 가지고 회전한다.

Fig. 3과 Fig. 4는 계의 고유진동수가 10, 20(Hz) 이고 가진진동수가 12, 24(Hz)인 경우의 τ 에 대한 기진력 $F(\tau)$ 와 무차원 진폭 ξ 를 보여주고 있다. 두 그림에서 주파수 비가 1.2로 일정하다고 하여도 계의 가진진동수가 크면 계가 정상상태에 도달되기 전에 발생하는 사이클수가 증가 함으로써 계에 발생하는 최대진폭은 약간 증가한다. 그러나 공진점으로부터 최대진폭이 발생하는

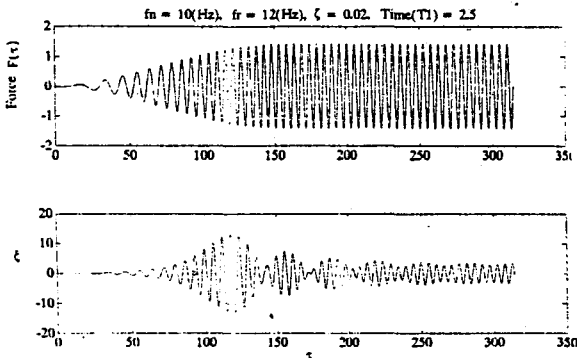


Fig. 3 Force and displacement versus time

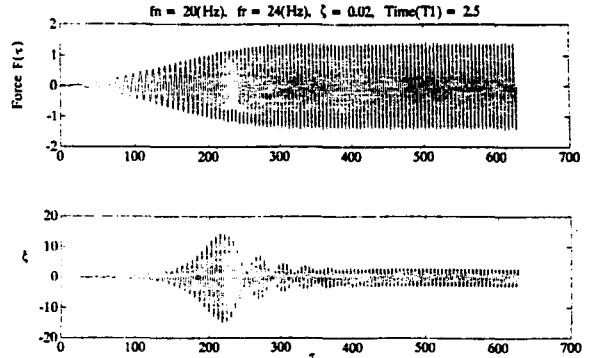


Fig. 4 Force and displacement versus time

곳까지 걸리는 시간은 작아진다. 계에 최대진폭이 발생한 후에는 맥노리 현상이 발생하는데 이것은 계의 운전속도가 일정해지면 없어진다.

Fig. 3과 Fig. 4에서 처럼 주파수 비가 작으면 계의 가진진동수가 증가하더라도 기체의 최대진폭의 증가량은 작은데 비해서 진폭이 정상상태에 도달하는 시간이 짧아짐으로써 가진진동수를 증가하는 것이 기체에 유리하다. 반면에 Fig. 5와 Fig. 6에서 처럼 주파수 비가 2.0인 경우에는 진폭이 정상상태에 도달하는 시간이 짧아져도 계의 고유진동수를 통과한 후 초래되는 최대진폭이 증가함으로써 계의 가진진동수를 낮추는 것이 기체의 안전에 유리하다.

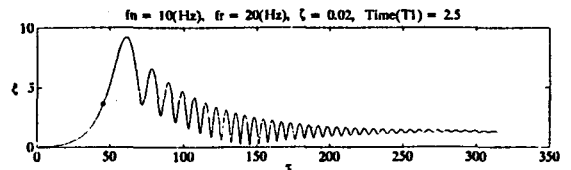


Fig. 5 Relationship between dimensionless envelope and time

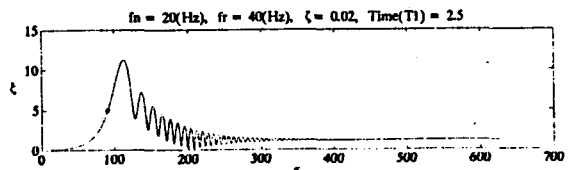


Fig. 6 Relationship between dimensionless envelope and time

Fig. 7은 감쇠계수의 변화에 따른 계의 과도진동 특성을 보여주고 있다. 전반적으로 감쇠계수가 증가하면 계의 최대진폭의 크기는 감소한다. 한편 회전체의 정상

각속도가 기계의 고유진동수에 접근 할수록 감쇠효과는 크게 작용한다. 또한 계의 고유진동수를 통과한 후에 발생하는 최대진폭이 크면 클수록 감쇠가 계의 진동에 미치는 영향은 더욱 더 커진다. 감쇠계수가 작으면 ($\zeta = 0.2$) 최대진폭 후의 진폭의 변동이 심해 계가 불안정하게 된다. 그러나 감쇠계수가 크면 클수록 최대진폭 후의 진폭의 변동을 감소시켜 곧 바로 일정한 크기의 진폭을 갖는 정상상태 진동이 되어 계가 안정한 상태에서 운전하게 된다.

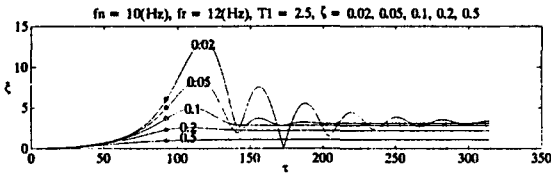


Fig. 7 Relationship between dimensionless envelope and time for various values of ζ

Fig. 8에서 처럼 감쇠계수가 작은 경우 ($\zeta = 0.1$)에는 주파수 비가 $r = 0.9, 1.1$ 일 때 정상상태에 도달한 진폭은 $r = 1.3, 1.5$ 일 때의 정상상태에 도달한 진폭보다 크게 나타난다. 그러나 Fig. 9에서 처럼 감쇠계수가 증가한 경우 ($\zeta = 0.3$)에는 정상상태에 도달한 진폭은 후자가 전자보다 크게 나타난다. 따라서 감쇠가 증가하면 계의 최대진폭은 감소시키지만 정상상태에 도달해서는 계의 진동진폭을 감소시키지 못한다.

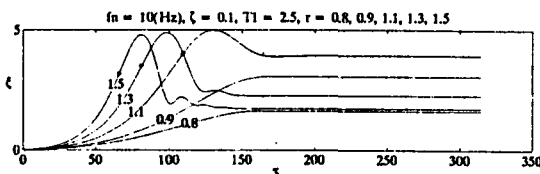


Fig. 8 Relationship between dimensionless envelope and time for various values of r

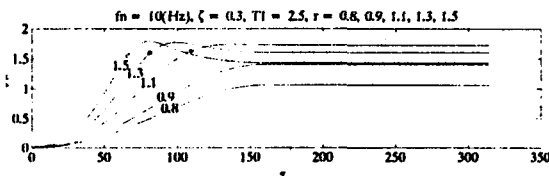


Fig. 9 Relationship between dimensionless envelope and time for various values of r

주파수 비가 1보다 작을 때는 1에 가까워지면서 최대진폭이 커진다. 그러나 1보다 클 때에는 주파수 비가 클수록 최대진폭이 감소하고 최대진폭이 발생하는 시간이 빨라짐을 알 수 있다. 그러나 주파수 비가 1보다 작은 경우는 1보다 큰 경우 보다 정상상태에 도달하여 커다란 진폭을 가지고 진동한다. 물론 위험속도영역 보다 아주 작은 영역에서 기계가 회전하면 안전하겠지만 대부분의 기계들은 공진을 통과해서 운전하게 된다. 그러므로 위험속도 부근보다는 이 부근으로부터 상당히 떨어진 부근에서 기계의 정상운전을 하는게 기계의 수명이나 피로파괴 등 어떤 악영향으로부터 기계를 보호할 수 있다.

각속도가 일정하게 되는 시간 T_1 은 계의 공진이 발생하는 시간에 영향을 미치고 있다. Fig. 10에서 보는 것처럼 주파수 비가 1보다 큰 경우에는 T_1 이 작아지면 계의 최대진폭이 작아지고 기계에 이 진폭이 발생하는 시간도 짧아진다. 또한 공진점으로부터 최대진폭이 발생하는 시간도 작아진다. 반면에 T_1 이 크면 최대진폭이 약간 증가하고 이 진폭이 발생하는 시간도 길어진다. 그러나 진폭이 정상상태에 도달해서는 T_1 에 무관하게 일정한 진폭을 갖는다. Fig. 11에서 보는 것처럼 주파수 비가 1보다 작은 경우에는 계에 과도특성이 발생하지 않으므로 진폭이 완만하게 증가하여 일정하게 되며 이 정상상태의 진폭에 도달하는 시간은 T_1 에 비례하여 커진다.

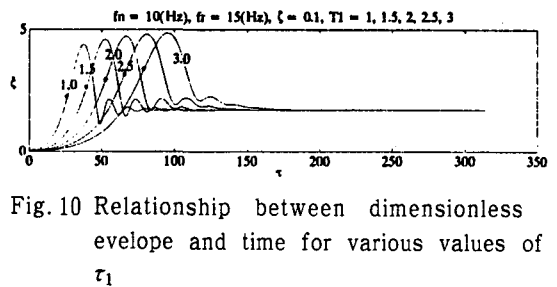


Fig. 10 Relationship between dimensionless envelope and time for various values of T_1

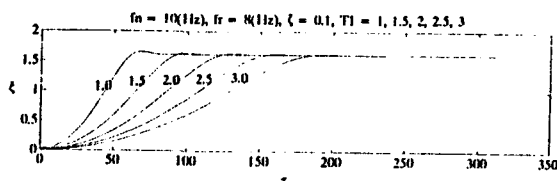


Fig. 11 Relationship between dimensionless envelope and time for various values of T_1

4. 결 론

감쇠기와 스프링으로 지지되는 일자유도 회전체를 가속시켜 계의 고유진동수를 통과한 후에 정상상태에 도달할 때까지의 과도특성을 Laplace Transform 방법을 이용하여 이론해석을 하고, 수치해석을 수행한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 회전체의 가진 진동수가 증가하면 최대진폭은 증가하지만 위험속도 영역을 빠르게 통과하므로 계의 과도상태의 기간이 짧아져 기계는 쉽게 안정한 상태로 된다.
- 2) 감쇠계수가 증가하면 계의 최대진폭은 감소하고 회전체의 각속도가 기계의 고유진동수에 접근할수록 감쇠효과는 크게 작용한다. 또한 최대진폭이 크면 클수록 감쇠가 계의 진동에 미치는 영향은 더욱 더 커진다.
- 3) 주파수 비가 1보다 큰 구간에서는 T_1 이 작아지면 계의 최대진폭이 작아지고 공진점으로부터 최대진폭이 발생하는 시간도 작아진다.

참고문헌

1. F. M. Lewis, "Vibration during Acceleration

through a Critical Speed", Journal of applied Mechanics, Trans. of the ASME, Vol. 54, APM-54-24, pp.253~257, 1932.

2. J. Ellington and H. Mccallion, "On Running a Machine through its Resonant Frequency", J. of the Royal Aeronautical Society, Vol. 60, pp.620~621, 1956.
3. A. Doring, "Transients "Transients in Simple Undamped Oscillators under Inertial Disturbances", Journal of Applied Mechanics, Trans. of the ASME, Vol. 26-2, pp.217~223, 1959.
4. 김찬목, 김광식, "JERK가 있는 회전체의 과도진동 특성", 기계학회지, 13권 2호, pp.145~156, 1973.
5. K. Matsuura, "A Study of Vibration and Velocity Characteristics of an Accelerated Unbalanced Rotor", Bulletin of the JEME, Vol. 18, No. 125, pp.1226~1235, 1975.
6. V. O. Kononenko, "Vibrating Systems with a limited Power Supply", London Iliffe Books, Ltd, 1969.