

유연 로봇팔의 동특성 해석에 관한 연구

김창부\*, 유영선\*\*

A Study on the Dynamic Analysis for Flexible Robotic Arms

Chang-Boo Kim\*, Young-Sun You\*\*

ABSTRACT

In the design and operation of robotic arm with flexible links, the equations of motion are required to exactly model the interaction between rigid body motion and elastic motion and to be formulated efficiently. In this paper, the flexible link is represented by applying the D-H rigid link representation method to measure the elastic deformation. And the equations of motion of robotic arm, which are configured by the generalized coordinates of elastic and rigid degrees of freedom, are formulated from the principle of virtual power. Dynamic characteristics due to elastic deformation of each link are obtained by using F. E. M to model complex shaped link accurately and by eliminating elastic modes of higher order that do not largely affect motion to reduce the number of elastic degrees of freedom. Also presented is the result of simulation of flexible robotic arms whose joints are controlled by direct or PD control.

**Key Words** : flexible link(유연 링크), rigid motion(강체운동), elastic motion(탄성운동), D-H rigid link representation(D-H 강체 링크 표시법), elastic deformation(탄성변형), F. E. M. (유한 요소법), virtual power(가상일률)

1. 서론

일반적으로 로봇들은 빠르면서 정확한 동작을 필요로 하고 있지만 실제로 로봇을 구성하고 있는 링크의 유연성으로 인한 영향을 줄이기 위해서는 강성을 증가시켜야 함으로서 중량이 증가하게 되어 속도가 감소하게 된다. 따라서 신속한 동작을 필요로 하는 로봇에서는 가벼운 링크의 사용이 필연적으로 요구되어 유연성으로 인한 링크의 변형때문에 로봇의 동작은 강체운동으로 해석할 경우와 실제의 경우와는 큰 차이를 나타내게 된다.

이와같은 차이를 줄이기 위하여 링크의 유연성을 고려한 로봇의 동특성해석이 필요하게되어 많은 연구가 수행되어 왔다. 예를 들면 Mirro<sup>(1)</sup>는 팔유형의 기구에서 링크의 유연성과 제어에 대해서 연구하였으며, Book<sup>(2)</sup>는 변환 행렬을 이용하여 집중질량과 스프링 성분으로 표현되는 유연한 팔의 선형 진동을 연구하였으며, Book<sup>(3)</sup>는 Lagrange 방정식을 사용하여 유연링크 매니퓰레이터의 운동방정식의 모델링 방법을 제시하였다. Sunada와 Dubowsky<sup>(4)</sup>는 공간 폐연쇄기구와 로봇팔과 같은 공간 개연쇄기구 모두에 적용할 수 있는

\* 인하대학교 공과대학 자동화공학과(정회원)

\*\* 대우중공업 중앙연구소 기계기술부

모델링 기법을 연구하였다.

본 논문에서는 유연성을 갖고 있는 다수의 링크로 구성된 공간 개연쇄기구인 로봇트팔의 설계 및 운용시 링크의 유연성으로 인한 탄성운동과 강체운동을 정확하게 고려할 수 있고 효과적으로 해를 구할 수 있는 형태의 운동방정식을 정식화하였다.

논문의 전체적인 구성은 다음과 같다. 2장에서는 유연링크에 관한 변형과 링크표시법, 동차변환행렬, 운동 및 작용력을 명시하고 가상일일의 원리 및 D'Alembert 원리로부터 운동방정식을 유도하였다. 3장에서는 유한요소법 및 모달축소법을 이용하여 연속제인 링크를 이산화함으로써 2장에서 구한 여러형태의 식들을 행렬식으로 유도하여 표현하였다. 4장에서는 로봇트팔의 한 링크에서 인접한 다른 링크로 순차적으로 전달되는 힘 및 운동에 대한 구속관계를 고려하여, 독립된 자유도변수로 표현되는 로봇트팔의 운동방정식을 유도하였다. 5장에서는 운동방정식의 전산화 알고리즘에 관하여 서술하였고, 6장에서는 모의실험의 결과를 제시하였다.

## 2. 유연링크의 운동방정식

### 2.1 유연링크 표시법

Denavit-Hartenberg의 강체링크표시법<sup>(5)</sup>을 응용하여 유연링크를 표시하면 다음과 같다.  $i$ 번째 링크 ( $i$ )는 그림 1에서와 같이 그 자신의 강체형상을 기준으로 하여

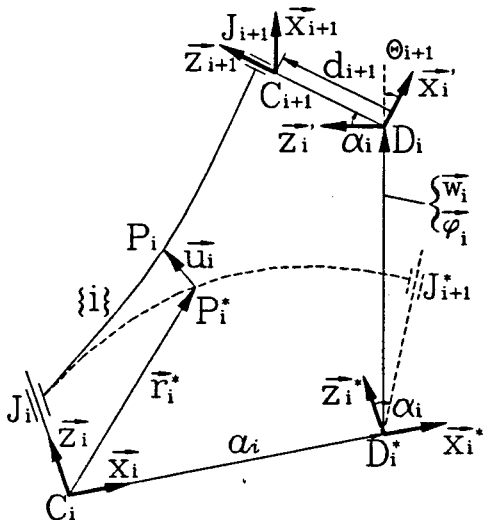


Fig. 1 Flexible Link

변형되며 기저링크쪽의 관절부  $J_i$ 가 고정되어 있고 링크의 변형전상태는 \*표로 표시되며  $u(P_i)$ 는 링크상의 임의의 질점  $P_i$ 의 변위벡터이다.

벡터  $u_i, w_i, \phi_i, c_i, b_{i+1}$  및  $r_i$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \vec{u}_i &\triangleq \vec{u}(P_i), \vec{w}_i \triangleq \vec{u}(D_i), \phi_i \triangleq \frac{1}{2} \text{curl } \vec{u}(D_i), \\ \vec{c}_i &\triangleq \vec{C}_0 \vec{C}_i^*, \vec{b}_{i+1} \triangleq \vec{C}_i \vec{C}_{i+1}^*, \vec{r}_i \triangleq \vec{r}_i^* + \vec{u}_i \quad (1) \end{aligned}$$

원점  $C_i$  축방향 단위 길이 벡터  $\vec{X}_i, \vec{Y}_i, \vec{Z}_i$ 로 구성되는 좌표계  $\{C_i\} \triangleq (C_i, \vec{X}_i, \vec{Y}_i, \vec{Z}_i)$ 는  $i$ 번째 링크의 기준좌표계이며  $\{D_i^*\} \triangleq (D_i^*, \vec{X}_i^*, \vec{Y}_i^*, \vec{Z}_i^*)$ 는 좌표계  $\{C_i\}$ 가  $X_i$ 방향으로 링크길이  $a_i$ 만큼 병진이동한 좌표계이며, 좌표계  $\{D_i^*\} \triangleq (D_i^*, \vec{X}_i^*, \vec{Y}_i^*, \vec{Z}_i^*)$ 는 좌표계  $\{D_i^*\}$ 가 링크의 변형으로 인한 점  $D_i^*$ 의 병진변위  $w_i$  및 회전변위  $\phi_i$ 만큼 이동된 좌표계이며,  $\{C_{i+1}\} \triangleq (C_{i+1}, \vec{X}_{i+1}, \vec{Y}_{i+1}, \vec{Z}_{i+1})$ 는 좌표계  $\{D_i\}$ 가  $X_i$ 방향으로 링크 비틀림각  $\alpha_i$ 만큼 회전과  $Z_{i+1}$ 방향으로 관절각  $\theta_{i+1}$ 만큼 회전 및 관절거리  $d_{i+1}$ 만큼 병진이 순차로 수행된 좌표계로서  $i+1$ 번째 링크의 기준좌표계이다.

또한, 기저링크의 기준좌표계인 기저좌표계  $\{C_0\}$ 를  $\theta_0$  및  $d_0$ 가 영이 되도록 설정하고 마지막 링크인  $n$ 번째 링크에 고착된 틀의 기준좌표계인 틀좌표계  $\{C_{n+1}\}$ 를  $\theta_{n+1}$  및  $d_{n+1}$ 이 영이 되도록 설정한다.

위치 및 변위 벡터들을 기준좌표계  $\{C_i\}$ 에 대한 성분으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \vec{r}_i &= {}^i r_X \vec{X}_i + {}^i r_Y \vec{Y}_i + {}^i r_Z \vec{Z}_i \\ \vec{u}_i &= {}^i u_X \vec{X}_i + {}^i u_Y \vec{Y}_i + {}^i u_Z \vec{Z}_i \\ \vec{w}_i &= {}^i w_X \vec{X}_i + {}^i w_Y \vec{Y}_i + {}^i w_Z \vec{Z}_i \\ \vec{\phi}_i &= {}^i \phi_X \vec{X}_i + {}^i \phi_Y \vec{Y}_i + {}^i \phi_Z \vec{Z}_i \end{aligned} \quad (2)$$

### 2.2 링크의 변형

링크의 변형은 미소하고 재질은 선형탄성이라고 가정하면 변형도텐서  $E(P_i)$ 와 응력텐서  $\Sigma(P_i)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$E(P_i) = \frac{1}{2} (\text{grad } \vec{u}_i + (\text{grad } \vec{u}_i)^T) \quad (3)$$

$$\text{혹은 } {}^i \varepsilon_{pq} = \frac{1}{2} ({}^i u_{p,q} + {}^i u_{q,p}), \quad p, q = X, Y, Z$$

$$\Sigma(P_i) = C(P_i)E(P_i) \quad (4)$$

$$\text{혹은 } {}^i\sigma_{pq} = \sum_r \sum_s {}^iC_{pqrs} {}^i\varepsilon_{rs} \quad , \quad p, q = X, Y, Z$$

여기서, 등은 등방성의 재질인 경우에는  ${}^iC_{pqrs} = {}^i\lambda\delta_{pq}\delta_{rs} + {}^i\mu(\delta_{pr}\delta_{qs} + \delta_{ps}\delta_{qr})$ 이며,  ${}^i\lambda$ 와  ${}^i\mu$ 는 Lamé 상수,  $\delta_{pq}$ 는 Kronecker delta이다.

또한 관절부에서는 변형이 없다고 가정하면 다음과 같은 식이 성립된다.

$$\vec{u}(C_i) = \vec{0} \tag{5}$$

$$\frac{1}{2} \text{curl } \vec{u}(C_i) = \vec{0} \tag{6}$$

### 2.3 동차변환행렬

좌표계  $\{C_i\}$ 에서부터 좌표계  $\{C_{i+1}\}$ 까지의 순차적인 변환은 다음과 같은 4x4 동차변환행렬로 표현된다.

$${}^C_r T_{D_i} = \text{Trans}(X_i, a_i) \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$${}^{D_i} T_{D_i} = T_{\text{elastic}}({}^i w_i, {}^i \varphi_i) \cong \begin{bmatrix} I_3 + {}^i \varphi_i & {}^i w_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$${}^{D_r} T_{C_{i+1}} = \text{Rot}(X_i, \alpha_i) \text{Trans}(Z_i, d_{i+1}) \text{Rot}(Z_{i+1}, \theta_{i+1})$$

$$\cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta_{i+1} & -S\theta_{i+1} & 0 & 0 \\ S\theta_{i+1} & C\theta_{i+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

여기서  ${}^i w_i$ 는 벡터  $\vec{w}_i$ 의 좌표계  $\{C_i\}$ 에 대한 성분의 열행렬이고  ${}^i \varphi_i$ 는 벡터  $\vec{\varphi}_i$ 의 좌표계  $\{C_i\}$ 에 대한 성분의 교대행렬로서 다음과 같이 정의되며

$${}^i w_i \cong \begin{pmatrix} {}^i w_X \\ {}^i w_Y \\ {}^i w_Z \end{pmatrix}, \quad {}^i \varphi_i \cong \begin{bmatrix} 0 & -{}^i \varphi_Z & {}^i \varphi_Y \\ {}^i \varphi_Z & 0 & -{}^i \varphi_X \\ -{}^i \varphi_Y & {}^i \varphi_X & 0 \end{bmatrix}$$

$I_3$ 은 3x3 단위행렬이다.

따라서, 좌표계  $\{C_{i+1}\}$ 의 좌표계  $\{C_i\}$ 에 대한 동차변환행렬  ${}^i T_{i+1}$ 는 다음과 같다.

$${}^i T_{i+1} \cong {}^C_r T_{C_{i+1}} = {}^C_r T_{D_i} {}^{D_i} T_{D_i} {}^{D_r} T_{C_{i+1}} \cong \begin{bmatrix} {}^i R_{i+1} & {}^i b_{i+1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

여기서  ${}^i R_{i+1}$ 은 좌표계  $\{C_{i+1}\}$ 의 좌표계  $\{C_i\}$ 에 대한 회전행렬이며,  ${}^i b_{i+1}$ 은 점  $C_{i+1}$ 의 좌표계  $\{C_i\}$ 에 대한 위치열행렬이다.

### 2.4 속도와 가속도

좌표계  $\{C_i\}$ 의 속도, 각속도, 가속도 및 각가속도를 다음과 같이 정의하면,

$$\vec{v}(C_i) \cong \vec{v}_i, \quad \vec{\omega}(C_i) \cong \vec{\omega}_i, \quad \vec{v}(C_i) \cong \vec{v}_i, \quad \vec{\dot{\omega}}(C_i) \cong \vec{\dot{\omega}}_i \tag{11}$$

점  $P_i$  및 좌표계  $\{C_{i+1}\}$ 의 속도 및 가속도항들은 다음과 같이 표현된다.

$$\vec{v}(P_i) = \vec{v}_i + \vec{\omega}_i \times \vec{r}_i + \vec{u}_i \tag{12}$$

$$\vec{\dot{v}}(P_i) = \vec{\dot{v}}_i + \vec{\dot{\omega}}_i \times \vec{r}_i + \vec{\omega}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i) + 2\vec{\omega}_i \times \vec{u}_i + \vec{\dot{u}}_i \tag{13}$$

$$\vec{v}(C_{i+1}) = \vec{v}_{i+1} = \vec{v}_i + \vec{\omega}_i \times \vec{b}_{i+1} + \vec{w}_i + \vec{\varphi}_i \times d_{i+1} \vec{Z}_{i+1} + s_{i+1} \dot{q}_{i+1} \vec{Z}_{i+1} \tag{14}$$

$$\vec{\omega}(C_{i+1}) = \vec{\omega}_{i+1} = \vec{\omega}_i + \vec{\varphi}_i + \bar{s}_{i+1} \dot{q}_{i+1} \vec{Z}_{i+1} \tag{15}$$

$$\vec{\dot{v}}(C_{i+1}) = \vec{\dot{v}}_{i+1} = \vec{\dot{v}}_i + \vec{\dot{\omega}}_i \times \vec{b}_{i+1} + \vec{\omega}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{b}_{i+1}) + 2\vec{\omega}_i \times (\vec{w}_i + \vec{\varphi}_i \times d_{i+1} \vec{Z}_{i+1} + s_{i+1} \dot{q}_{i+1} \vec{Z}_{i+1}) + \vec{w}_i + \vec{\varphi}_i \times d_{i+1} \vec{Z}_{i+1} + \vec{\varphi}_i \times (\vec{\varphi}_i \times d_{i+1} \vec{Z}_{i+1}) + 2\vec{\varphi}_i \times s_{i+1} \dot{q}_{i+1} \vec{Z}_{i+1} + s_{i+1} \dot{q}_{i+1} \vec{Z}_{i+1} \tag{16}$$

$$\vec{\dot{\omega}}(C_{i+1}) = \vec{\dot{\omega}}_{i+1} = \vec{\dot{\omega}}_i + \vec{\dot{\omega}}_i \times (\vec{\varphi}_i + \bar{s}_{i+1} \dot{q}_{i+1} \vec{Z}_{i+1}) + \vec{\varphi}_i \times \bar{s}_{i+1} \dot{q}_{i+1} \vec{Z}_{i+1} + \vec{\varphi}_i + \bar{s}_{i+1} \dot{q}_{i+1} \vec{Z}_{i+1} \tag{17}$$

여기서  $q_i$  및  $s_i$ 는  $i$ 번째 관절  $J_i$ 의 관절변수 및 관절지표로서 미끄럼관절인 경우에는  $q_i = d_i$ ,  $s_i = 1$ 이고 회전관절인 경우에는  $q_i = \theta_i$ ,  $s_i = 0$ 이며  $\bar{s}_i = 1 - s_i$ 이다.

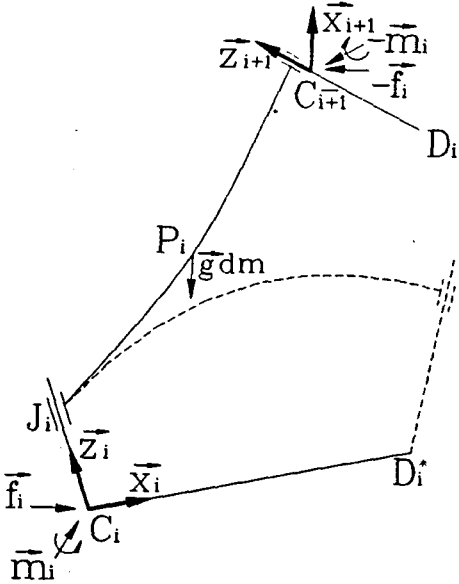


Fig. 2 Free Body Diagram

2.5 작용력

그림 2에서  $\vec{f}_i$ 와  $\vec{m}_i$ 는  $i-1$ 번째 링크가 관절  $J_i$ 에 작용하는 힘의 합력과 점  $C_i$ 에 대한 합모멘트를 나타내며,  $\vec{g}$ 는 중력가속도이며 점  $\bar{C}_{i+1}$ 은 좌표계  $\{C_{i+1}\}$ 의 원점과 일치하는  $i$ 번째 링크상의 점이다. 관절에 작용하는 작용력 또는 작용모멘트를  $\tau_i$ 로 표시하고, 반발력과 반발모멘트는  $\vec{f}_i^R$ ,  $\vec{m}_i^R$ 로 표시하면 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$\vec{f}_i = s_i \tau_i \vec{Z}_i + \vec{f}_i^R \quad (18)$$

$$\vec{m}_i = \bar{s}_i \tau_i \vec{Z}_i + \vec{m}_i^R \quad (19)$$

2.6 운동방정식

$i$ 번째 링크의 가상외력일률  $\delta P_i$ 은 D'Alembert원리를 사용하여 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \delta P_i &= \int_{D_i} \delta \vec{v}(P_i) \cdot (\vec{g} - \vec{v}(P_i)) dm + \delta \vec{v}(C_i) \\ &\quad \cdot \vec{f}_i + \delta \vec{\omega}(C_i) \cdot \vec{m}_i - \delta \vec{v}(C_{i+1}) \cdot \\ &\quad \vec{f}_{i+1} - \delta \vec{\omega}(C_{i+1}) \cdot \vec{m}_{i+1} \\ &= \delta \vec{v}_i \cdot (\vec{f}_i - \vec{f}_{i+1} + \int_{D_i} (\vec{g} - \vec{v}(P_i)) dm) \\ &\quad + \delta \vec{\omega}_i \cdot (\vec{m}_i - \vec{b}_{i+1} \times \vec{f}_{i+1} - \vec{m}_{i+1} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_{D_i} \vec{r}_i \times (\vec{g} - \vec{v}(P_i)) dm) - (\delta \vec{\omega}_i + \\ &\delta \vec{\phi}_i \times d_{i+1} \vec{Z}_{i+1}) \cdot \vec{f}_{i+1} - \delta \vec{\phi}_i \cdot \vec{m}_{i+1} \\ &+ \int_{D_i} \delta \vec{u}_i \cdot (\vec{g} - \vec{v}(P_i)) dm \quad (20) \end{aligned}$$

또한, 가상변형에너지를  $\delta \dot{E}_d^i$ 은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \delta \dot{E}_d^i &= \int_{D_i} \delta \dot{E}(P_i) : \Sigma(P_i) dV \\ &= (\delta \vec{\omega}_i + \delta \vec{\phi}_i \times d_{i+1} \vec{Z}_{i+1}) \cdot \int_{J_{i+1}} \Sigma \\ &\quad \cdot \vec{n} dA + \delta \vec{\phi}_i \cdot \int_{J_{i+1}} \vec{h}_{i+1} \times \Sigma \\ &\quad \cdot \vec{n} dA - \int_{D_i} \delta \vec{u}_i \cdot \vec{d}v \Sigma dV \quad (21) \end{aligned}$$

여기서

$$\vec{h}_{i+1} = \vec{C}_{i+1} J_{i+1}$$

따라서  $i$ 번째 링크의 운동방정식은 가상일률의 원리로 부터 다음과 같은 변분식으로 표현된다.

$$\delta \dot{E}_d^i = \delta P^i \quad \forall \delta \vec{v}_i, \delta \vec{\omega}_i, \delta \vec{u}_i, \delta \vec{w}_i, \delta \vec{\phi}_i \quad (22)$$

3. 링크의 이산화

3.1 탄성변위, 속도 및 가속도

연속체인 링크를 이산화하여 운동방정식을 행렬식으로 표현하기 위해서 유한요소법 및 모달축소법을 사용하여 탄성변위를 표현하면 다음과 같다.

$$\vec{u}_i = \sum_{m=1}^N \vec{U}_{im}(r_i^*) q_{em}^i(t) \triangleq [\vec{U}_i] \{q_e^i\}$$

혹은

$$\{^i u_i\} \triangleq \begin{Bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{iz} \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^N {}^i U_m q_{em}^i \triangleq [{}^i U_i] \{q_e^i\} \quad (23)$$

$$\vec{w}_i = \sum_{m=1}^N \vec{W}_{im} q_{em}^i(t) \triangleq [\vec{W}_i] \{q_e^i\}$$

혹은

$$\{^i w_i\} \triangleq \begin{Bmatrix} w_{ix} \\ w_{iy} \\ w_{iz} \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^N {}^i W_m q_{em}^i \triangleq [{}^i W_i] \{q_e^i\} \quad (24)$$

$$\vec{\phi}_i = \sum_{m=1}^N \vec{\Phi}_{im} q_{em}^i(t) \triangleq [\vec{\Phi}_i] \{q_e^i\}$$

혹은

$$\{^i\phi_i\} \cong \begin{Bmatrix} ^i\phi_x \\ ^i\phi_y \\ ^i\phi_z \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{N_i} {}^i\phi_m q_{em}^i \cong [{}^i\phi_i] \{q_e^i\} \quad (25)$$

여기서  $N_i$ 은  $i$ 번째 링크의 탄성자유도  $q_e^i$ 의 성분갯수이고  $[U_i]$ 는 유한요소법 및 모달축소법을 사용하여 계산되는 보간함수벡터의 행렬이며,

$$[\overline{W}_i] = [\overline{U}_i]_{\overline{r}_i = a_i \overline{x}_i}$$

$$[\overline{\phi}_i] = [\frac{1}{2} \text{curl } \overline{U}_i]_{\overline{r}_i = a_i \overline{x}_i}$$

식(23) ~ (25)로 부터 탄성속도항과 탄성가속도항들은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{\overline{u}}_i = [\overline{U}_i] \{\dot{q}_e^i\} \quad \text{혹은} \quad \{^i\dot{u}_i\} = [{}^iU_i] \{\dot{q}_e^i\} \quad (26)$$

$$\dot{\overline{w}}_i = [\overline{W}_i] \{\dot{q}_e^i\} \quad \text{혹은} \quad \{^i\dot{w}_i\} = [{}^iW_i] \{\dot{q}_e^i\} \quad (27)$$

$$\dot{\overline{\phi}}_i = [\overline{\phi}_i] \{\dot{q}_e^i\} \quad \text{혹은} \quad \{^i\dot{\phi}_i\} = [{}^i\phi_i] \{\dot{q}_e^i\} \quad (28)$$

$$\ddot{\overline{u}}_i = [\overline{U}_i] \{\ddot{q}_e^i\} \quad \text{혹은} \quad \{^i\ddot{u}_i\} = [{}^iU_i] \{\ddot{q}_e^i\} \quad (29)$$

$$\ddot{\overline{w}}_i = [\overline{W}_i] \{\ddot{q}_e^i\} \quad \text{혹은} \quad \{^i\ddot{w}_i\} = [{}^iW_i] \{\ddot{q}_e^i\} \quad (30)$$

$$\ddot{\overline{\phi}}_i = [\overline{\phi}_i] \{\ddot{q}_e^i\} \quad \text{혹은} \quad \{^i\ddot{\phi}_i\} = [{}^i\phi_i] \{\ddot{q}_e^i\} \quad (31)$$

### 3.2 운동방정식

변분식 (22)의 가상변형에너지를  $\delta E_d$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \delta E_d &= \int_{D_i} \delta \dot{E}(P_i) : \Sigma(P_i) dV \\ &= \int_{D_i} \{\delta \varepsilon^i\}^T \{\sigma^i\} dV \\ &= \{\delta q_e^i\}^T \left[ \int_{D_i} [B^i]^T [D^i] [B^i] dV \right] \{q_e^i\} \\ &\cong \{\delta q_e^i\}^T [K_{ee}^i] \{q_e^i\} \end{aligned} \quad (32)$$

$\alpha$ 기서

$$\begin{aligned} \{\varepsilon^i\} &\cong \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{33} & \varepsilon_{23} + \varepsilon_{32} & \varepsilon_{31} + \varepsilon_{13} & \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} \end{pmatrix}^T = [B^i] \{q_e^i\} \\ \{\sigma^i\} &\cong \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33} & \sigma_{23} & \sigma_{31} & \sigma_{12} \end{pmatrix}^T \\ &= [D^i] \{\varepsilon^i\} \end{aligned}$$

가상의외력일률  $\delta P_i$ 는 관성력, 관절력과 중력에 의한 가상의외력일률  $\delta A^i$ ,  $\delta P^i$ ,  $\delta P_g^i$ 로 구분되어 다음과 같이 표현된다.

$$\delta P^i = -\delta A^i + \delta P^i + \delta P_g^i \quad (33)$$

$$\delta A^i \cong \int_{D_i} \delta \vec{v}(P_i) \cdot \vec{v}(P_i) dm$$

$$\begin{aligned} &= \begin{Bmatrix} \delta v_i \\ \delta \omega_i \end{Bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} m_i I_3 & -m_i {}^i \overline{r}_i \\ m_i {}^i \overline{r}_i & {}^i I_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^i \dot{v}_i \\ {}^i \dot{\omega}_i \end{Bmatrix} \right\} \\ &+ \left\{ \int_{D_i} {}^i U_i dm \right\} \{\dot{q}_e^i\} + \begin{Bmatrix} m_i {}^i \overline{\omega}_i {}^i \overline{\omega}_i {}^i \overline{r}_i \\ {}^i \overline{\omega}_i {}^i I_i {}^i \overline{\omega}_i + \\ + 2 {}^i \overline{\omega}_i \left[ \int_{D_i} {}^i U_i dm \right] \{\dot{q}_e^i\} \\ + 2 \left[ \int_{D_i} {}^i \overline{r}_i {}^i \overline{\omega}_i {}^i U_i dm \right] \{\dot{q}_e^i\} \end{Bmatrix} \\ &+ \{\delta q_e^i\}^T \left\{ \left[ \int_{D_i} {}^i U_i^T dm, \int_{D_i} -{}^i U_i^T {}^i \overline{r}_i dm \right] \begin{Bmatrix} {}^i \dot{v}_i \\ {}^i \dot{\omega}_i \end{Bmatrix} + \left[ \int_{D_i} {}^i U_i^T {}^i U_i dm \right] \{\dot{q}_e^i\} \right. \\ &+ \left. \left\{ \int_{D_i} {}^i U_i^T {}^i \overline{\omega}_i {}^i \overline{\omega}_i {}^i \overline{r}_i dm + 2 \left[ \int_{D_i} {}^i U_i^T {}^i \overline{\omega}_i {}^i U_i dm \right] \{\dot{q}_e^i\} \right\} \right\} \\ &\cong \{\delta v^i\}^T \{ [M_{vv}^i] \{\dot{v}^i\} + [M_{v\omega}^i] \{\dot{\omega}^i\} + \{f_{v\omega}^i\} \} \\ &+ \{\delta q_e^i\}^T \{ [M_{\omega v}^i] \{\dot{v}^i\} + [M_{\omega\omega}^i] \{\dot{\omega}^i\} + \{f_{\omega\omega}^i\} \} \} \quad (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta P_g^i &\cong \delta \vec{v}(C_i) \cdot \vec{r}_i + \delta \vec{\omega}(C_i) \cdot \vec{m}_i - \delta \vec{v}(C_{i+1}) \\ &\cdot \vec{r}_{i+1} - \delta \vec{\omega}(C_{i+1}) \cdot \vec{m}_{i+1} \\ &= \begin{Bmatrix} \delta v_i \\ \delta \omega_i \end{Bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} {}^i f_i - {}^i f_{i+1} \\ {}^i m_i - {}^i b_{i+1} {}^i f_{i+1} - {}^i m_{i+1} \end{bmatrix} \right\} \\ &+ \{\delta q_e^i\} \{ -{}^i W_i^T {}^i f_{i+1} - {}^i \phi_i^T \{d_{i+1} \\ &\quad \dot{Z}_{i+1} {}^i f_{i+1} + {}^i m_{i+1}\} \} \\ &\cong \{\delta v^i\}^T \{f_{vg}^i\} + \{\delta q_e^i\}^T \{f_{\omega g}^i\} \quad (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta P_g^i &\cong \int_{d_i} \delta \vec{v}(P_i) \cdot \vec{g} dm \\ &= \begin{Bmatrix} \delta v_i \\ \delta \omega_i \end{Bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} m_i {}^i g \\ m_i {}^i \overline{r}_i {}^i g - {}^i \overline{g} \left[ \int_{D_i} {}^i U_i dm \right] \{q_e^i\} \end{bmatrix} \right\} \\ &+ \{\delta q_e^i\}^T \left\{ \left[ \int_{D_i} {}^i U_i^T dm \right] \{^i g\} \right\} \\ &\cong \{\delta v^i\}^T \{f_{vg}^i\} + \{\delta q_e^i\}^T \{f_{\omega g}^i\} \quad (36) \end{aligned}$$

여기서  $m_i$ 는 링크의 질량이며  ${}^i r_i$ ,  ${}^i i_i$  및  ${}^i g$ 는 좌표계  $(C_i)$ 에 대한 링크의 질량중심 위치열행렬, 질량 관성행렬 및 중력 가속도열행렬이다.

따라서 변분식 (22)로 부터 다음과 같은  $i$ 번째 링크의 운동방정식이 유도된다.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} [M_{vv}^i]\{\dot{v}^i\} + [M_{ve}^i]\{\dot{q}_e^i\} + \{f_{ve}^i\} \\ [M_{ev}^i]\{\dot{v}^i\} + [M_{ee}^i]\{\dot{q}_e^i\} + \{f_{ee}^i\} \end{cases} \\ & = \{f_{vj}^i\} + \{f_{vg}^i\} \\ & + [B_{ee}^i]\{\dot{q}_e^i\} + [K_{ee}^i]\{q_e^i\} = \{f_{ej}^i\} + \{f_{eg}^i\} \quad (37) \end{aligned}$$

여기서  $[B_{ee}^i]\{\dot{q}_e^i\}$ 는 식(32)의 탄성력  $[K_{ee}^i]\{q_e^i\}$ 에 추가된 구조감쇠력이다.

#### 4. 로봇트팔의 운동방정식

##### 4.1 관절력

관절  $J_i (i=1, \dots, n)$ 에 작용하는 합력과 합모멘트는 식(18)~(19)로 부터 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \bar{f}_i \\ \bar{m}_i \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} s_i \bar{Z}_i \\ -s_i \bar{Z}_i \end{Bmatrix} \tau_i \\ &+ \begin{bmatrix} \bar{X}_i & \bar{Y}_i & \bar{0} & \bar{0} & -s_i \bar{Z}_i \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{X}_i & \bar{Y}_i & s_i \bar{Z}_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i f_X^R \\ i f_Y^R \\ i m_X^R \\ i m_Y^R \\ -s_i i f_Z^R + s_i i m_Z^R \end{Bmatrix} \\ &\triangleq \{P_i\} \tau_i + \{Q_i\} \{f_k^i\} \end{aligned}$$

혹은

$$\begin{aligned} \{f_j^i\} &\triangleq \begin{Bmatrix} i f_i \\ i m_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_i i Z_i \\ -s_i i Z_i \end{Bmatrix} \tau_i \\ &+ \begin{bmatrix} i X_i & i Y_i & 0 & 0 & -s_i i Z_i \\ 0 & 0 & i X_i & i Y_i & s_i i Z_i \end{bmatrix} \{f_k^i\} \\ &\triangleq \{P\} \tau_i + \{Q\} \{f_k^i\} \quad (38) \end{aligned}$$

여기서  $\{P\}$ 와  $\{Q\}$ 는 다음식을 만족하는 관절사영행렬과 관절사영여행렬이다.

$$\begin{aligned} \{Q\}^T \{P\} &= \{0\} \\ \{P\}^T \{P\} &= 1 \quad (39) \end{aligned}$$

또한 식(35)의 강제운동에 대한 관절력행렬  $f_{vj}^i (i=1, \dots, n)$ 와 탄성운동에 대한 관절력행렬  $f_{ej}^i (i=0, \dots, n)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \{f_{vj}^i\} &= \begin{Bmatrix} i f_i \\ i m_i \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \cdot i R_{i+1} & 0 \\ i \bar{b}_{i+1} i R_{i+1} & i R_{i+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i+1 f_{i+1} \\ i+1 m_{i+1} \end{Bmatrix} \\ &\triangleq \{f_j^i\} - [{}^{i+1}S_v]^T \{f_j^{i+1}\} \quad (40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{f_{ej}^i\} &= -[{}^i W_i^T i R_{i+1} + {}^i \phi_i^T d_{i+1} i \dot{Z}_{i+1} i R_{i+1}, \\ & \quad {}^i \phi_i^T i R_{i+1}] \begin{Bmatrix} i+1 f_{i+1} \\ i+1 m_{i+1} \end{Bmatrix} \\ &\triangleq -[{}^{i+1}S_e]^T \{f_j^{i+1}\} \quad (41) \end{aligned}$$

$$\text{단, } \{f_j^{n+1}\} = \begin{Bmatrix} n+1 f_{n+1} \\ n+1 m_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -{}^{tool}f_{tool} \\ -{}^{tool}m_{tool} \end{Bmatrix} \triangleq -\{f^{tool}\}$$

여기서  ${}^{tool}f_{tool}$ 와  ${}^{tool}m_{tool}$ 은 로봇트팔의 외부에서 톨에 작용하는 힘의 합력과 점  $C_{i+1}$ 에 대한 합모멘트의 좌표계  $\{C_{i+1}\}$ 에 대한 성분의 열행렬이다.

##### 4.2 속도와 가속도

좌표계  $\{C_{i+1}\} (i=0, \dots, n)$ 의 속도행렬  $v^{i+1}$ 과 가속도행렬  $\dot{v}^{i+1}$ 은 식(14)~(17)로 부터 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \{v^{i+1}\} &\triangleq \begin{Bmatrix} i+1 v_{i+1} \\ i+1 \omega_{i+1} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} i+1 R_i & -i+1 R_i i \bar{b}_{i+1} \\ 0 & i+1 R_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i v_i \\ i \omega_i \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} i+1 R_i [{}^i W_i - d_{i+1} i \dot{Z}_{i+1} i \phi_i] \\ i+1 R_i i \phi_i \end{bmatrix} \{q_e^i\} \\ &+ \begin{Bmatrix} s_{i+1} i+1 Z_{i+1} \\ -s_{i+1} i+1 Z_{i+1} \end{Bmatrix} \dot{q}_{i+1} \\ &\triangleq [{}^{i+1}S_v]\{v^i\} + [{}^{i+1}S_e]\{q_e^i\} \\ &+ \{i+1P\} \dot{q}_{i+1} \quad (42) \end{aligned}$$

$$\text{단, } \{v^{n+1}\} = [{}^{n+1}S_v]\{v^n\} + [{}^{n+1}S_e]\{q_e^n\}$$

$$\{\dot{v}^{i+1}\} \triangleq \begin{Bmatrix} i+1 \dot{v}_{i+1} \\ i+1 \dot{\omega}_{i+1} \end{Bmatrix} = [{}^{i+1}S_v]\{\dot{v}^i\} + [{}^{i+1}S_e]\{\dot{q}_e^i\} + \{i+1P\} \ddot{q}_{i+1} + \{i+1\gamma\}$$

$$\{\dot{v}^{n+1}\} = [{}^{n+1}S_v]\{\dot{v}^n\} + [{}^{n+1}S_e]\{\dot{q}_e^n\} \quad (43)$$

여기서

$$\{i+1\gamma\} \triangleq \begin{Bmatrix} i+1 R_i \{ i \bar{\omega}_i i \bar{\omega}_i i \bar{b}_{i+1} + i \dot{\phi}_i i \dot{\phi}_i d_{i+1} i Z_{i+1} \\ + 2 i \bar{\omega}_i (i \dot{w}_i + i \dot{\phi}_i d_{i+1} i Z_{i+1} \\ + s_{i+1} \dot{q}_{i+1} i Z_{i+1}) \\ + 2 i \dot{\phi}_i s_{i+1} \dot{q}_{i+1} i Z_{i+1} \} \\ i+1 R_i \{ i \bar{\omega}_i (i \dot{\phi}_i + s_{i+1} \dot{q}_{i+1} i Z_{i+1}) \\ + i \dot{\phi}_i s_{i+1} \dot{q}_{i+1} i Z_{i+1} \} \end{Bmatrix}$$

4.3 기구학적 관계

좌표계 {C<sub>i</sub>} (i=1, ..., n+1)의 속도 v<sup>i</sup>와 가속도 v<sup>i</sup>는 식(42)과 식(43)로부터 로봇트팔의 강체자유도 q<sub>r</sub> ≡(q<sub>1</sub>, ..., q<sub>n</sub>)<sup>T</sup>과 탄성자유도 q<sub>e</sub> ≡(q<sub>e</sub><sup>1</sup>, ..., q<sub>e</sub><sup>n</sup>)<sup>T</sup> 및 기저링크의 속도 v<sup>0</sup>와 가속도 v<sup>0</sup>의 함수로 다음과 같이 표현된다.

$$v^i = D_e^i \dot{q}_e + D_r^i \dot{q}_r + b^i \quad (44)$$

$$\dot{v}^i = D_e^i \ddot{q}_e + D_r^i \ddot{q}_r + c^i \quad (45)$$

여기서

$$D_r^i = \left[ \prod_{k=2}^i {}^k S_v^1 P, \dots, \prod_{k=i}^i {}^k S_v^{i-1} P, P, 0, \dots, 0 \right]$$

$$D_e^i = \left[ \prod_{k=2}^i {}^k S_v^1 S_e, \dots, \prod_{k=i}^i {}^k S_v^{i-1} S_e, S_e, 0, \dots, 0 \right]$$

$$b^i = \left\{ \prod_{k=1}^i {}^k S_v^0 \right\}$$

$$c^i = \left\{ \prod_{k=1}^i {}^k S_v^1 \dot{v}^0 + \prod_{k=2}^i {}^k S_v^1 \gamma + \dots + \prod_{d=i}^i {}^k S_v^{i-1} \gamma + \dot{\gamma} \right\}$$

상기 표현식에서  $\prod_{k=i}^i {}^k S_v$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\prod_{k=i}^i {}^k S_v \triangleq {}^i S^{i-1} S \dots S$$

또한 링크 (i) (i=0, ..., n)의 탄성 변위, 속도 및 가속도를 로봇트팔의 탄성자유도로 표현하면 다음과 같다.

$$q_e^i = E^i q_e, \quad \dot{q}_e^i = E^i \dot{q}_e, \quad \ddot{q}_e^i = E^i \ddot{q}_e \quad (46)$$

여기서

$$E^i = [0, \dots, I_{N_i}, \dots, 0]$$

4.4 운동방정식

로봇트팔의 전체자유도 q<sub>r</sub>과 q<sub>e</sub>에 대한 가상일률의 편분식은 다음과 같다.

$$\delta \dot{A} + \delta \dot{E}_d = \delta P_g + \delta P_j \quad \forall \delta q_r, \delta q_e \quad (47)$$

여기서

$$\delta \dot{A} \triangleq \sum_{i=0}^n \dot{A}^i$$

$$= \sum_{i=0}^n \left\{ \delta v^i T (M_{vv}^i \dot{v}^i + M_{ve}^i \dot{q}_e^i + f_{vc}^i) + \delta q_e^{i T} (M_{ev}^i \dot{v}^i + M_{ee}^i \dot{q}_e^i + f_{ec}^i) \right\}$$

$$= \delta q_e^T \left( [ E^{0 T} M_{ee}^0 E^0 ] \dot{q}_e + \left\{ E^{0 T} (M_{ev}^0 \dot{v}^0 + f_{ec}^0) \right\} \right) + \sum_{i=1}^n \left\{ \delta q_r^T \left( [ D_r^i T M_{vv}^i D_r^i ] \dot{q}_r \right. \right.$$

$$+ \left. [ D_r^i T M_{vv}^i D_e^i + D_r^i T M_{ve}^i E^i ] \dot{q}_e \right. \\ \left. + \left\{ D_r^i T (M_{vc}^i \dot{v}^i + f_{vc}^i) \right\} \right) + \delta q_e^T \left( [ D_e^i T M_{ev}^i D_r^i + E^i T M_{ev}^i D_r^i ] \dot{q}_r + [ D_e^i T M_{ev}^i D_e^i \right. \\ \left. + D_e^i T M_{ve}^i E^i + E^i T M_{ev}^i D_e^i + E^i T M_{ee}^i E^i \right] \dot{q}_e \\ \left. + \left\{ D_e^i T (M_{vc}^i \dot{v}^i + f_{vc}^i) + E^i T (M_{ec}^i \dot{v}^i + f_{ec}^i) \right\} \right) \\ \triangleq \delta q_e^T (M_{ee}^{(0)} \dot{q}_e + f_{ec}^{(0)}) \\ + \sum_{i=1}^n \left\{ \delta q_r^T (M_{rr}^{(i)} \dot{q}_r + M_{re}^{(i)} \dot{q}_e + f_{rc}^{(i)}) + \delta q_e^T \right. \\ \left. (M_{er}^{(i)} \dot{q}_r + M_{ee}^{(i)} \dot{q}_e + f_{ec}^{(i)}) \right\} \\ = \delta q_r^T \left( \left[ \sum_{i=1}^n M_{rr}^{(i)} \right] \dot{q}_r + \left[ \sum_{i=1}^n M_{re}^{(i)} \right] \dot{q}_e + \left\{ \sum_{i=1}^n f_{rc}^{(i)} \right\} \right) \\ + \delta q_e^T \left( \left[ \sum_{i=1}^n M_{er}^{(i)} \right] \dot{q}_r + \left[ \sum_{i=0}^n M_{ee}^{(i)} \right] \dot{q}_e + \left\{ \sum_{i=0}^n f_{ec}^{(i)} \right\} \right) \\ \triangleq \delta q_r^T (M_{rr}^* \dot{q}_r + M_{re}^* \dot{q}_e + f_{rc}^*) \\ + \delta q_e^T (M_{er}^* \dot{q}_r + M_{ee}^* \dot{q}_e + f_{ec}^*) \quad (48)$$

$$\delta \dot{E}_d \triangleq \sum_{i=0}^n \delta \dot{E}_d^i = \sum_{i=0}^n \left\{ \delta q_e^{i T} (B_{ee}^i \dot{q}_e + K_{ee}^i q_e) \right\} \\ = \delta q_e^T \left( \left[ \sum_{i=0}^n (E^i T B_{ee}^i E^i) \right] \dot{q}_e + \left[ \sum_{i=0}^n (E^i T K_{ee}^i E^i) \right] q_e \right) \\ \triangleq \delta q_e^T \left( \left[ \sum_{i=0}^n B_{ee}^{(i)} \right] \dot{q}_e + \left[ \sum_{i=0}^n K_{ee}^{(i)} \right] q_e \right) \\ \triangleq \delta q_e^T (B_{ee}^* \dot{q}_e + K_{ee}^* q_e) \quad (49)$$

$$\delta P_g \triangleq \sum_{i=0}^n \delta P_g^i = \sum_{i=0}^n \left\{ \delta v^i T f_{vg}^i + \delta q_e^{i T} f_{eg}^i \right\} \\ = \delta q_e^T ( E^{0 T} f_{eg}^0 ) + \sum_{i=1}^n \left\{ \delta q_r^T ( D_r^i T f_{vg}^i ) + \delta q_e^T \right. \\ \left. ( D_e^i T f_{vg}^i + E^i T f_{eg}^i ) \right\} \\ \triangleq \delta q_e^T f_{eg}^{(0)} + \sum_{i=1}^n \left\{ \delta q_r^T f_{rg}^{(i)} + \delta q_e^T f_{eg}^{(i)} \right\} \\ = \delta q_r^T \left( \sum_{i=1}^n f_{rg}^{(i)} \right) + \delta q_e^T \left( \sum_{i=0}^n f_{eg}^{(i)} \right) \\ \triangleq \delta q_r^T f_{rg}^* + \delta q_e^T f_{eg}^* \quad (50)$$

$$\delta P_j \triangleq \sum_{i=0}^n \delta P_j^i = \sum_{i=0}^n \left\{ \delta v^i T f_{vj}^i + \delta q_e^{i T} f_{ej}^i \right\} \\ = \delta q_r^T \left( \sum_{i=1}^n D_r^i T f_{vj}^i \right) + \delta q_e^T \left( \sum_{i=1}^n D_e^i T f_{vj}^i + \sum_{i=0}^n E^i T f_{ej}^i \right) \\ = \delta q_r^T \left( ( {}^1 P^T f_{j1}, \dots, {}^n P^T f_{jn} )^T - D_r^T {}^{n+1} S_V^T f_j^{n+1} \right) \\ + \delta q_e^T \left( - D_e^T {}^{n+1} S_V^T f_j^{n+1} - E^{n T} {}^{n+1} S_e^T f_j^{n+1} \right) \\ = \delta q_r^T \left( (\tau_1, \dots, \tau_n)^T + D_r^{n T} {}^{n+1} S_V^T f^{tool} \right) \\ + \delta q_e^T \left( D_e^{n T} {}^{n+1} S_V^T f^{tool} + E^{n T} {}^{n+1} S_e^T f^{tool} \right) \\ = \delta q_r^T (\tau + D_r^{n+1 T} f^{tool}) + \delta q_e^T ( D_e^{n+1 T} f^{tool} ) \\ \triangleq \delta q_r^T (\tau + f_{rs}^*) + \delta q_e^T f_{es}^* \quad (51)$$

여기서  $\tau$ 는 관절에 작용하는 작용력 또는 작용모멘트의 열행렬이다.

따라서 식(48)~(51)를 (47)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 로봇트팔의 운동방정식이 구해진다.

$$\begin{cases} M_{rr}^0 \ddot{q}_r + M_{re}^0 \ddot{q}_e + f_{rc}^0 = \tau + f_{rg}^0 + f_{rs}^0 \\ M_{er}^0 \ddot{q}_r + M_{ee}^0 \ddot{q}_e + f_{ec}^0 + B_{ee}^0 \dot{q}_e + K_{ee}^0 q_e = f_{eg}^0 + f_{es}^0 \end{cases} \quad (52)$$

### 5. 전산 알고리즘

운동방정식의 전산화 전처리부에서는 로봇트팔의 운동방정식(52)에서 탄성변위에 관련된 항을 구하기 위하여, 모든 유연링크를 각각 여러개의 Timoshenko 보요소<sup>(6)</sup>로 분할하고 유한요소법을 사용해서 고유진동해석을 수행하여 링크의 탄성변형에 큰 영향을 주지않는 고차의 탄성모드를 제거한 후, 식(32)~(36)의 탄성변형에 관련된 적분항들을 운동에 종속되는 변수들과 구분하여 따로 계산하였다.

이와같이 계산된 항들은 유연링크의 운동과 무관한 고유특성치로서 그 외의 기구학 및 동역학 특성치와 함께 운동방정식의 전산화 프로그램에서 유연링크의 매개 변수로 입력되어진다. 질량, 감쇠 및 강성행렬과 관성력, 중력 및 관절작용력 행렬의 각 항은 기저링크 {0}에서부터 최종링크 (n)까지 순서대로 첨부되는 링크의 관련항을 계산하여 이를 순차적으로 결합해서 구해지도록 함으로서 운동방정식의 전산화를 효율적으로 할 수 있도록 하였다. 운동방정식의 전산화 프로그램의 순서도는 그림 3과 같다.

모의실험시, 로봇트팔의 관절에 작용하는 작용력 또는 작용모멘트는 시간의 함수로 직접 입력되거나, 혹은 관절이 원하는 궤적을 추적하도록 하고자 할 경우에는 관절의 위치가 비례미분제어에 의해서 보정되도록 또는 강제링크 모델에 대한 역동력학을 사용하여 프로그램내에서 계산되도록 하였다. 운동방정식의 시간에 대한 수치적분은 Runge-Kutta 4차식을 사용하여 수행되도록 하였다.

### 6. 모의실험

개발된 전산프로그램의 정확성과 효율성을 검증하기

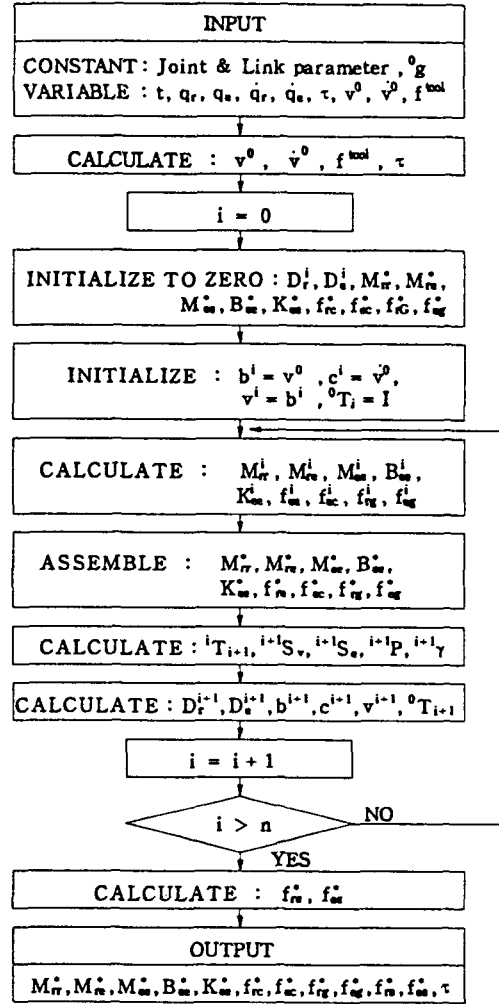


Fig. 3 Flow Chart

위하여 다음과 같은 모의실험을 수행하였다.

첫번째 모의실험에서는 참고문헌<sup>(7)</sup>에서 사용된 모델인 길이가 1m인 두개의 유연링크가 회전관절로 연결된 2축 평면로봇 팔을 일직선으로 펼친 상태에서 출발하여 끝점이 횡방향으로 0.15m만큼 이동하도록 하고자 하였다. 각각의 관절에 작용하는 작용모멘트는 관절의 위치가 비례미분제어에 의해서 보정되도록 계산되었으며, 회전각에 대한 이득값으로는 각각 5와 4(Nm/rad)를 사용하였고 회전각속도에 대한 이득값으로는 각각 10과 2(Nm/rad/sec)를 사용하였다. 각각의 유연링크를 5개의 균일한 보요소로 분할하여 처음 4개의 횡방향 고유진동모드에 대한 모달변수를 탄성자유도로 취하였다. 수



치적분에 필요한 시간증분을 1ms로 하여 모의실험을 수행하였다. 그림 4에는 관절각의 시간응답을 나타내었고, 그림 5에는 끝점에서의 횡방향변위의 시간응답을 참고문헌의 결과와 함께 나타내었다.

두번째 모의실험에서는 참고문헌(8)에서 사용된 모델인 그림 6과 같이 처음 두개의 유연링크와 마지막 한개의 강체링크가 어깨에서는 pitch와 yaw방향, 팔꿈치에서는 y-z방향, 손목에서는 yaw 및 pitch방향의 회전관절로 연결된 5축 공간 로봇 팔을 그림 6과 같은 상태에서 출발하여 다음과 같이 정의되는 관절각의 궤적에 따라서 움직이도록 하고자 하였다.

$$\theta_i^{p,y} = 0.05 \left( t - \frac{5}{\pi} \sin \frac{\pi t}{5} \right), \begin{cases} p, i = 1, 3 \\ y, i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (53)$$

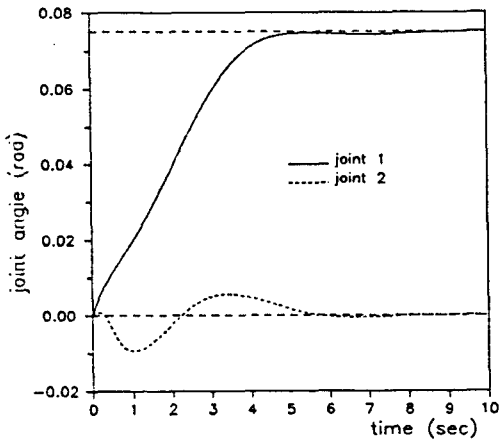


Fig. 4 Time Response of Joint Angles

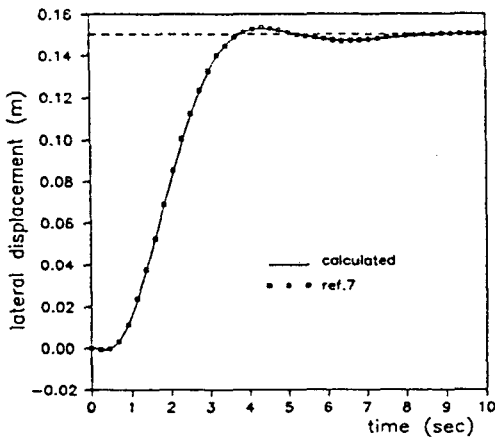


Fig. 5 Time Response at End Point

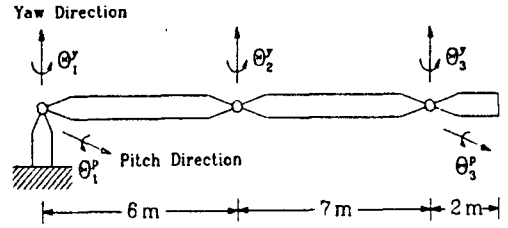


Fig. 6 Spatial Robotic Arm Model

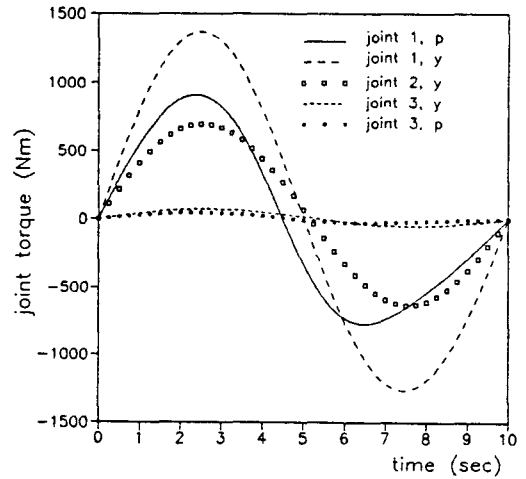


Fig. 7 Active Torque at Joints

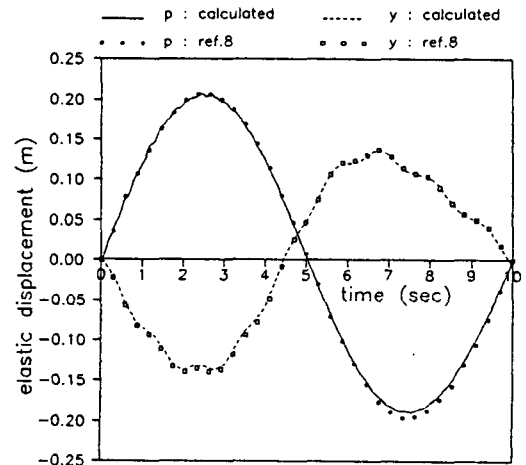


Fig. 8 Elastic Displacements at First Link Tip

참고문헌

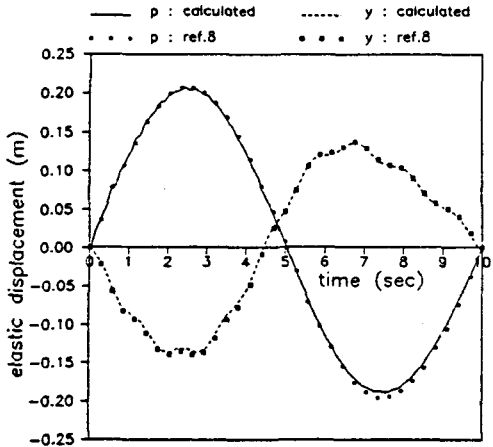


Fig. 9 Elastic Displacements at Second Link Tip

각각의 관절에 작용하는 작용모멘트는 링크의 유연성을 고려하지 않는 강체링크 모델에 대한 역동역학을 사용하여 계산되었다. 각각의 유연링크를 2개의 균일한 보요소로 분할하여, pitch 및 yaw방향 각각 4개의 고유진동 모드에 대한 모달변수를 탄성자유도로 취하였다. 수치적분에 필요한 시간중분을 1.25ms로 하여 모의실험을 수행하였다. 그림 7에는 관절작용모멘트를 나타내었고, 그림 8과 그림 9에는 유연링크 끝단에서의 탄성변위를 참고문헌의 결과와 함께 각각 나타내었다.

7. 결 론

본 논문에서는 유연링크로 구성된 로봇트팔의 운동방정식을 유한요소법 및 모달축소법과 가상일률의 원리를 사용하여 체계적으로 정식화하였다.

복잡한 형상의 구조물을 모델링할 수 있는 유한요소법을 이용하여 보조구조물인 유연링크의 동적특성치를 정밀하게 계산할 수 있도록 하였다. 그리고 탄성운동에 큰 영향을 주지않는 고차의 탄성모드를 소거하는 모달축소법을 이용하여 탄성자유도를 줄일 수 있게 함은 물론, 운동방정식의 수치적분에 필요한 시간중분을 다소 크게 취할 수 있게 함으로서 모의실험의 계산시간을 줄일 수 있도록 하였다.

또한, 운동방정식의 질량, 감쇠, 강성, 관성력, 중력 및 관절작용력행렬 등의 각 항이 순서대로 첨부되는 링크의 관련항을 계산하여 순차적으로 결합해서 구해지도록 함으로서 운동방정식의 전산화를 효율적으로 할 수 있도록 하였다.

1. Mirro, J., "Automatic Feedback Control of a Vibrating Beam", Master's thesis Massachusetts Institute of Technology, Department of Mechanical Engineering, Rept T-571. Cambridge, Mass : C. S. Draper Lab, 1972.
2. Book, W., "Study of Design and Control of Remote Manipulators. Part II : Vibration Considerations in Manipulator Design", Contract rept. NAS8-28055. Cambridge, Mass. : Massachusetts Institute of Technology Department of Mechanical Engineering, Feb. 1973.
3. Book, W., "Recursive Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulator Arms", The International Journal of Robotics Research, Vol. 3, No. 3, pp.87~100, Fall 1984.
4. Sunada, W. and Dubowsky, S., "The Application of Finite Element Methods to the Dynamic Analysis of Spatial and Coplanar Linkage System", ASME J. Mechanical Design, Vol. 103, pp.643~651, July 1981.
5. Craig, J., "Introduction to Robotics Mechanics & Control" Addison Wesley, 1989.
6. Przemieniecki, J., "Theory of matrix structural analysis", McGRAW-HALL, 1968.
7. Schmitz, E., "Dynamics and Control of a planar manipulator with elastic links", Proceedings of 25th Conference on Design and Control, Athen, Greece, Dec. 1986.
8. Sharf, I. & D'Eleuterio, G., "Parallel Simulation Dynamics for Elastic Multibody Chains", Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp.740~746, 1990.