不確定的特性을 고려한 應力解析에 관한 一考察

정 명 채*

1. 序 論

구조물의 거동특성을 결정하는 요인중에는 確定的要因과 不確定的要因이 있다. 이 요인들이 確定的이라고 간주하여 거동을 파악할 때 이것을 確定論的 Approach, 不確定的이라고 간주하여 파악할때를 不確定論的 Approach로 구분한다.

本稿에서는 不確定的 Approach에 의한 구조물 거동파악의 一例를 소개한다. 이 例에서는 極値統計와 엔트로피 최대원리를 이용하여, 부동침하를 받은 쉘구조물의 응력을 추정하는 이론을 취급한다. 부동침하는 不確定的특성을 비교적 많이 지니고 있으며, 특히 구조물을 지지하고있는 지반의 경우는 그 물리적 정수와 침하특성이 確定論적으로는 취급이 곤란한 경우가 많다고 생각된다. 구체적으로 극치통계법에서는 부동침하를 기초 Ring의 원주방향으로의 Fourier 級數로 가정하여, 位相角과 침하의 2乘平均値가 確定値로 주어졌을 때, 振幅 Spectrum을 不確定變數로 간주하여 추정하는 방법을 소개한다.

일단 진폭 Spectrum이 구해지면 응력은 간단히 구해지므로 여기서는 Specturm에 관해서만 언급하기로 한다.

2. 基本式

부동침하를 (1)식으로 가정한다. 이 식에서 U는 침하량을, U_0는 침하량의 평균치를, 그리고 U_i, θ_i는 각각 i번째항의 진폭Spectrum과 位相角을 나타낸다. Fourier 次數는 응력의 수렴을 검증한 후 6차로 정하였다.

$$U=U_0+\sum_{i=1}^{n} U_i \cdot \cos(i\theta-\theta_i) \tag{1}$$

(1)식의 U_0의 값은 Boring Data의 값으로부터 허용 오차내에서는 추정 가능하다고 보면, 침하량을 계산하기 위해서는 θ_i 및 U_i의 값을 추정하여야 한다. 이들 값은 지반의 특성치와 관련이 있는데 이 값이 不確定的이므로 이들을 확률변수로 간주함이 합리적이다. 그러나 本稿의 경우, θ_i값은 確定値로 가정한다($[-\pi, \pi]$의 균등분포한다고 가정 ; R[1].Ciesielski는 원자력 발전소에 건설된 4基의 Cooling Tower에 대한 침하량을 측정한 결과 위상각이 모두 균등분포하고 있음을 발표하였다). 따라서 여기서 추정하여야 할 Random Variable은 U_i만이다. 本稿에서는 엔트로피 최대원리에 의해 U_i를 추정하는 이론을 소개한다.

한편, 統計論에서는 확률변수의 표준편차와 극치와의 관계에는 다음과 같은 관계가 있음을 밝히고 있다.

$$\mathrm{Max}(x)=+\eta\cdot\sigma(x),\ \mathrm{Min}(x)=-\eta\cdot\sigma(x) \tag{2}$$

(2)식에서 Max(x), Min(x)는 각각 확률변수 x의 최대치와 최소치를, $\sigma(x)$는 표준편차를 나타낸다. A.G.Davenport[2]는 (2)식의 η의 概略値를 다

* 삼성중공업(주) 건설기술연구소, 선임연구원

음식으로 계산할 수 있음을 증명하였다.

$$\eta_{apr}=\sqrt{2 \cdot \ln(2\beta)}+\frac{\gamma}{\sqrt{2\ln(2\beta)}} \quad (3)$$

이 식에서 γ는 Euler 정수를, 그리고 β값은 확률변수의 값이 양에서 음으로 바뀌는 回數인데 회전쉘의 경우는 $\beta=m/2\pi$로 계산할수있다(여기서 m은 Predominant Harmonic Number).

또 (1)식으로 표시된 침하량의 평균 및 표준편차는 그 정의에 의해 다음과 같이 할 수 있다.

$$E[U]=E[U_0+\sum_{i=1}^{n} \cos(i\theta-\theta_i)]=U_0,\ \sigma(U)=\sqrt{0.5\sum_{i=1}^{n} U_i^2} \quad (4)$$

(1)－(4)의 관계식에서 침하량의 極値는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$U_{max}=U_0+\eta_{apr}(U)\cdot\sqrt{0.5\sum_{i=1}^{n} U_i^2},$$

$$U_{min}=U_0-\eta_{apr}(U)\cdot\sqrt{0.5\sum_{i=1}^{n} U_i^2} \quad (5)$$

따라서 부동침하는 다음식으로 표시할 수 있다.

$$\Delta U=\eta_{apr}(U)\cdot\sqrt{2.0\sum_{i=1}^{n} U_i^2} \quad (6)$$

여기서 ΔU와 U_{max}와의 比를 $k(k=\Delta U/U_{max})$로 정의하여 두자. (5), (6)식과 k와의 관계로부터 다음의 식을 얻을수 있다.

$$\sigma(U)=\sqrt{0.5\sum_{i=1}^{n} U_i^2}=\frac{k \cdot U_0}{(2-k)\cdot\eta_{apr}(U)}=\alpha \quad (7)$$

(7)식에서 알수있듯이 침하량의 표준편차는 침하량의 평균치 U_0, 부동침하에 대한 최대침하의 比 k 및 침하의 최대치와 표준편차의 比의 개략치 η_{apr}의 함수임을 알수 있다. 이들중, U_0는 既知로 가정하였고, η_{apr}의 값도 (3)식으로 추정가능하다. 또한, k의 값도 종래의 기술적 축적과 문헌자료에서부터 알수있는 既知의 값이다. 예를들면, Lamb & Whiteman[3)]의 연구에 의하면 점토상에 지지된 大直徑의 석유탱크의 경우는 값이 0.3임을 밝히고 있다. 따라서 (7)식은 既知의 값으로 취급하여도 무방하다.

한편, 쉘 내부의 Strain Energy는 다음 식으로 계산된다.

$$\phi=\sum_{i=1}^{n} E_i \cdot U_i^2 \quad (8)$$

(8)식의 E_i는 부동침하에 의해 구조물 내부에 축적된 각 mode별 Strain Energy이다. 이 식은 本稿에서 소개하는 이론의 타당성을 검증하는데에 사용된다.

3. Entropy最大原理에 의한 振幅 Spectrum의 推定

계산의 편의상 새로운 변수 p_i를 다음과 같이 정의하자.

$$p_i=U_i^2/2\alpha^2\ ;\ \alpha\geq 1 \quad (9)$$

(9)식을 (7)식에 대입하면 p_i의 조건식이 다음과 같이 구해진다.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i=1\ :\ p_i\geq 0 \quad (10)$$

(9), (10)식에서 알 수 있듯이 구하고자하는 U_i는 [0, 1]사이에 분포하는 Random Variable p_i를 구하면 (9)식의 관계로부터 자동적으로 구해진다. 이러한 의미에서 本稿에서는 p_i를 "발생자"라고 정의한다. 本稿에서는 발생자를 엔트로피 최대원리를 이용하여 구하는 방법을 소개한다. 이 이론의 타당성을 검증하기 위해 Monte-Carlo법으로 구한 결과와 비교검토한다.

(1) Monte-Carlo

발생자에 관한 정보가 전혀 없을 경우에는 p_i를 [0, 1]에 분포하고 합이 1이 되는 Uniform Random Variable로 가정하여 구하는 방법이 있다.

本稿에서는 100 Sample의 p_i를 구하여 각 값에 대응하는 진폭 Specturum을 구한 후 Strain Energy를 계산하여 100Sample에 대한 통계치를 구한다. 이 값은 다음 절에서 소개하는 엔트로피 최대원리법에 의한 결과치와의 비교하는 값으로 사용된다.

(2) 엔트로피 최대원리에 의한 추정법

엔트로피 최대원리에 의하면 어떤 확률변수가 자연조건하에서 자연스럽게 분포할 확률이 가장 높은 분포는 다음 식으로 정의되는 엔트로피 함수를 최대로 하는 p_i의 분포와 동일하다.

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i \; ; \; p_i \geq 0.0 \qquad (11)$$

本稿에서는 (10)식의 조건을 만족시켜주어야 하므로 엔트로피 함수를 다음식으로 쓸수 있다.

$$H_0 = \sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1.0\right) \qquad (12)$$

이 식에서 λ는 Lagrange乘數이다. 따라서 $\partial H_0 / \partial p_i = 0$, $\partial H_0 / \partial \lambda = 0$를 만족시켜주는 p_i의 분포가 바로 우리가 구하고자 하는 분포이며 이것은 다음 식으로 얻어진다.

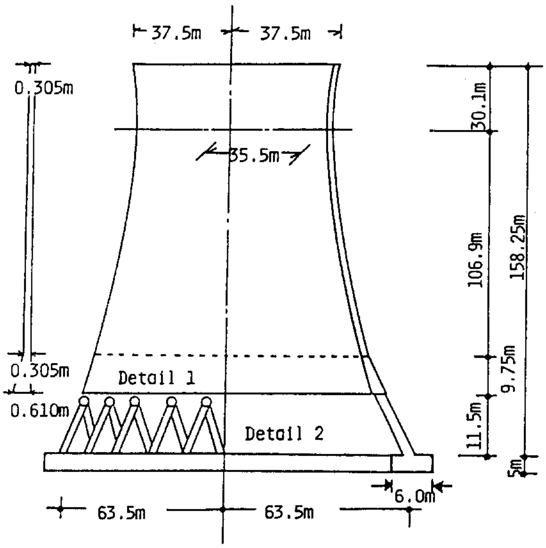
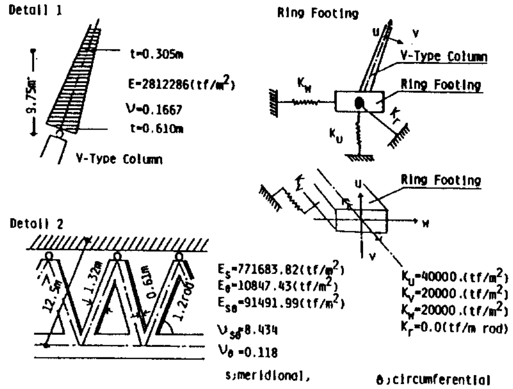


Fig. 1 해석모델



$$p_i = \frac{1}{n} \qquad (13)$$

즉, 자연조건하에서는 균등분포할 확률이 가장 크다.

(3) 해석모델

本稿의 이론을 검증하기위해 원자력 발전소에 건설된 자연통풍식 Cooling Tower를 해석모델로 채택하였다(Fig. 1). Cooling Tower를 모델로 정한 이유는 대형의 회전 쉘 구조물이고, 앞에서 예로들었던 k, η_{apr}의 값을 그대로 적용할 수 있기 때문이며 또한 부동침하가 응력에 주는 영향이 민감하기 때문이다. 해석시 k값은 0.3으로 η_{apr}의 값은 2.19로 하였다.

(4) Starin Energy의 比較

Fig.2는 本稿에서 소개한 두 경우의 振幅 Spec-

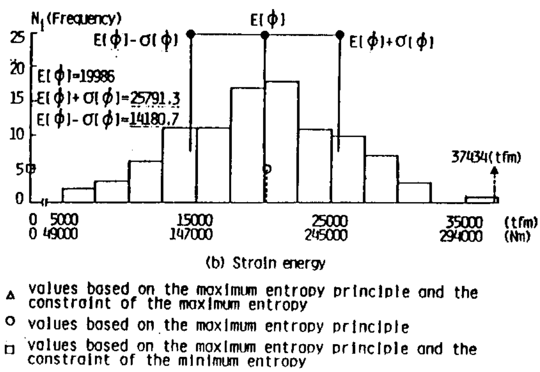


Fig. 2 Shell 하단부의 Strain Energy

trum을 이용하여 구한 Strin Energy의 값을 비교한 그림이다. 이들 값은 모델의 V-型 Column과 쉘의 境界部서 계산한 값이다. 그림에서 ○表는 본 이론에 의해 구한 값을, E[ϕ]는 Monte-Carlo 법으로 구한 값 100Case의 평균을 각각 나타내고 있다. 즉, Monte-Carlo법으로 구한 100Case의 스펙트럼을 이용하여 구한 에너지값의 평균치가 本稿에서 소개한 이론으로 한 번에 구한 값으로 계산한 에너지와 거의 일치함을 확인할 수 있다.

4. 맺음말

엔트로피는 "애매함"을 나타내는 확률변수로 그 값이 1일때 애매함의 정도가 최대이며, 0일때는 確定値이다. 엔트로피 최대원리는 자연상태에서의 발생자의 분포는 그 애매함의 정도가 가장 큰 상태에서의 분포이라는데에 착안한 방법이다. 上述한 바와 같이 그 분포는 균등분포(Uniform Distribution)이며 이것은 상식적인 직관과 일치한다.

참 고 문 헌

1. Ciesielski, R., Guminski, A. and Zak, M., 'Large settlement of hyperboloidal cooling towers', Proc. Conf. on Large Ground Movements and Structures, UWIST, Cardiff, July 1977, pp. 672-686.
2. Davenport, A.G., 'Notes on the distribution of the largest values of random function with application to gust loading', Proc. Instn, Civ. Engrs., 1964, 28, pp.187-196.
3. Lambe, T.W. and Whiteman, R.V., Soil Mechanics, SI Version, John Wiley and Sons, New York, 1979, p.375.