응용통계연구 제 6권 2호
1993년 9월 pp.435-442

일반화 감마분포의 백분위수에 대한 근사신뢰구간

나 종 화1)

요 약

일반화 감마분포 모형에서 지표모수(κ)가 알려진 경우에는 백분위 수에 대한 정확한 추론이 가능하다. 이 방법은 정확한 결과를 제공하지만 복잡한식의 수치적 계산이 요구된다. 본 논문에서는 이러한 계산상의 어려움을 극복함과 동시에 거의 대등한 정확도를 유지하는 근사신뢰구간을 구하였다. 또한, 로그정규모형에 대해서도 그 결과를 적용시켜 보았다.

1. 모 형

Stacy(1962)에 의해 제안된 일반화 감마 분포의 확률밀도함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\frac{\beta}{\Gamma(\kappa)} \frac{t^{\beta\kappa-1}}{\alpha^{\beta\kappa}} \exp\{-(t/\alpha)^{\beta}\}, \qquad t>0 \tag{1. 1}$$

여기서, $\beta>0$, $\alpha>0$ 이고 $\kappa>0$ 이다. 이 모형은 모수들의 값이 변화함에 따라 여러종류의 수명분포모형으로 귀결되는데, 예를들어, $\kappa=1$ 이고 $\beta=1$ 인 경우에는 지수분포, $\kappa=1$ 인 경우에는 와이블분포, $\beta=1$ 인 경우에는 감마분포의 모형으로 바뀌게 된다. 또한, κ의 값이 무한이 커질 때는 로그정규분포로 수렴함을 Lawless(1980)가 보인 바 있다.

Prentice(1974),Farewell과 Prentice(1977)는 이 분포와 동등한 여러가지 대체모형에 대해 연구하였다. 이러한 대체모형들은 모수들에 대한 추론에 많은 편리함을 제공하는데 본 논문에서는 다음과 같은 대체모형을 제시하고, 이로부터 백분위수에 대한 추론을 실시하였다.

$$\frac{1}{b} \frac{1}{\Gamma(\kappa)} \exp\{\kappa \frac{y-u}{b} - e^{\frac{y-u}{b}}\}, \qquad -\infty<y<\infty \tag{1. 2}$$

여기서, $u=\log\alpha$, $b=1/\beta$ 이고 $y=\log t$ 이다. 특히, κ의 값이 알려진 경우에 이 모형은 위치-척도모수 모형에 속하므로 Hinkley(1978)등이 제안한 보조통계량(ancillary statistic)에 대한 조건부적 추론이 가능하다. 또한, 최우추정량에 기초한 추론에서는 반드시 이러한 추론이 필요하다고 Fisher(1934)가 주장한 바 있다. 한편, κ의 값이 미지인 경우에는 모수들에 대한 정확한 추론이 지금까지는 알려져 있지 않다. 이 경우 최우추정량의 점근분포에 기초한 근사신뢰구간 역시 정규분포로의 수렴속도가 대단히 느리기 때문에 잘 이용되지 않고 있다. 그런데, 주어진 대체모형에서 κ가 무한이 커지면 $V=(Y-u)/b$ 의 기대치와 분산도 무한히 커지기 때문에 다음과 같은 변환을 생각하자.

$$W=\sqrt{\kappa}(V-\log\kappa)=(Y-\mu)/\sigma \tag{1. 3}$$

1) (151-742) 서울시 관악구 신림동 서울대학교 계산통계학과

여기서, 새로운 모수 μ 와 σ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\mu = u + b\log\kappa, \qquad \sigma = b/\sqrt{\kappa}\ . \tag{1. 4}$$

W의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$\frac{\kappa^{\kappa-1/2}}{\Gamma(\kappa)}\exp\{\sqrt{\kappa}w - \kappa e^{w/\sqrt{\kappa}}\}, \qquad -\infty < w < \infty \tag{1. 5}$$

이 분포는 κ의 값이 커짐에 따라 크게 변하지 않을 뿐 아니라 표준정규분포로 수렴함을 Lawless(1980)가 보인 바 있다.

본 논문에서는 위의 대체모형에서 최우추정량에 기초한 백분위수에 대한 조건부적 추론에 대해 다루었다. 2장에서는 기존의 방법과 새로운 방법이 설명되었다. 3장에서는 실제의 자료에대하여 일반화 감마분포와 로그정규분포 모형에 대해 적용한 결과를 소개하였다.

2. 백분위수에 대한 신뢰구간

2.1 기존의 방법

Lawless(1980)가 제안한 이 방법을 소개하면 다음과 같다. 먼저, 신뢰구간의 형성을 쉽게 하기 위하여 다음과 같은 pivotal 양들을 정의한다.

$$Z_1 = \frac{\hat{\mu}-\mu}{\hat{\sigma}}, \quad Z_2 = \frac{\sigma}{\hat{\sigma}}, \quad Z_p = \frac{\hat{\mu}-y_p}{\hat{\sigma}} = Z_1 - \frac{w_p}{Z_2} \tag{2. 1}$$

여기서, $\hat{\mu}$와 $\hat{\sigma}$은 각각 μ와 σ에대한 최우추정량이고, $y_p = \mu + \sigma w_p$ 이다. 또한, W의 p차 백분위 수 w_p는 (1.5)식으로부터 다음과 같이 주어짐을 쉽게 확인할 수 있다.

$$w_p = w_p(\kappa) = \sqrt{\kappa}\log(\chi_{2\kappa,p}/2\kappa), \quad \chi_{2\kappa,p}\ ;\ \chi_{2\kappa}\ \text{분포의}\ p\text{차 백분위 수}. \tag{2. 2}$$

위치-척도모수 모형에서 보조통계량(ancillary statistic)은 다음과 같이 구해진다.

$$A_i = \frac{y_i - \mu}{\hat{\sigma}} \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{2. 3}$$

한편, 보조통계량(ancillay statistic)이 주어진 경우 Z_p의 꼬리확률로부터 y_p에 대한 신뢰구간을 계산하기 위해 다음과 같은 절차를 밟는다. 먼저, Z_1과 Z_2의 조건부 확률밀도함수를 구하면 다음과 같다.

$$g(z_1, z_2 \mid A\ ;\kappa) = c_1(A, n, \kappa)\, z_2^{n-1}\exp\{\sqrt{\kappa}\sum_{i=1}^{n}(A_i + z_1)z_2 - \kappa\sum_{i=1}^{n}e^{(A_i+z_1)z_2/\sqrt{\kappa}}\} \tag{2. 4}$$

여기서, $c_1(A, n, \kappa)$는 z_1과 z_2에 무관한 상수이고 $A = (A_1, \cdots, A_n)$ 이다. 식 (2.1)과 (2.4)로부터 Z_p에 대한 꼬리확률을 구하면 다음과 같다.

$$P_r(Z_p \le t \mid A\ ;\kappa) = \int_0^{\infty} g_2(z_2 \mid A\ ;\kappa)\cdot I[n\kappa,\ \kappa e^{(tz_2+w_p)/\sqrt{\kappa}}\sum_{i=1}^{n}e^{A_i z_2/\sqrt{\kappa}}]\, dz_2 \tag{2. 5}$$

여기서, $I[\kappa, n]$는 불완전 감마함수이고 $g_2(z_2 \mid A\ ;\kappa)$는 Z_2의 주변밀도함수로서 각각 다음과 같다.

$$I[k, x]=\int_0^x \frac{1}{\Gamma(k)} u^{k-1} e^{-u}\, du \tag{2. 6}$$

$$g_{2(z_2} \mid A\ ;\kappa)=c(A,n,\kappa) z_2^{n-2} \exp[\sqrt{\kappa}(z_2-1) \sum_{i=1}^{n} A_i] / \ [\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \exp(A_i z_2/\sqrt{\kappa})]^n \tag{2. 7}$$

여기서, $c(A,n,\kappa)=[\int_0^\infty g_2(z_2 \mid A\ ;\kappa)]^{-1}$ 이다. (2.5)식으로부터 다음의 식을 만족하는 ℓ_1과 ℓ_2의 값을 찾고 $(\hat{\mu}-\ell_2\hat{\sigma},\ \hat{\mu}-\ell_1\hat{\sigma})$을 y_p에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간으로 정한다.

$$P_r(\ell_1 \le Z_p \le \ell_2 \mid A\ ;\kappa)=1-\alpha \tag{2. 8}$$

이 방법을 이용하여 백분위수에 대한 신뢰구간을 구하면 정확한 값을 구할 수 있다는 장점이 있는 반면 (2.5)와 (2.7)식의 계산에서 복잡한 수치적분이 요구되는 단점을 가지고 있다. 2절에서는 이와 같은 단점을 극복하면서 정확성도 크게 잃지 않는 안부점근사를 이용한 근사신뢰구간을 소개하였다.

2.2 제안된 근사 신뢰구간

일반적으로, 모수적 모형에서 장애모수(nuisance parameter)가 존재하는 경우 단일모수(scalar parameter)에 대한 추론은 적당히 정의된 pivotal의 주변분포함수에 기초한다. 그러나, 장애모수(nuisance parameter)의 차원이 커질 때 주변분포함수의 계산은 다중적분의 형태로 표현되므로 계산상 많은 어려움이 따르게 된다. 이러한 계산상의 어려움을 피하기 위해 DiCiccio 등(1990)은 주변분포함수에 대한 새로운 근사식을 제안하였다. 이들은 p-차원 통계량 $X=(X^1, \cdots, X^p)$의 분포를 정확히 알거나 근사적으로 아는 경우에 그들 중 하나의 원소에 해당하는 통계량 X^i의 주변분포함수에 대한 근사식을 유도하였다.

이 절에서는 위치-척도모수 모형에 대해 DiCiccio등(1990)이 제안한 근사식을 소개하고 이를 이용하여 일반화 감마모형의 백분위 수에 대한 신뢰구간을 형성하는 방법을 다루었다. 안부점근사를 이용한 이들의 결과는 소표본인 경우에도 대단히 정확한 결과를 제공하는 것으로 알려져 있다.

다음과 같이 정의되는 위치-척도모수 모형을 생각하자.

$$Y_i \sim \mu+\sigma W_i \quad (i=1, \cdots, n) \tag{2. 9}$$

여기서, $W_1, \cdots, W_n$ 은 확률밀도함수 f와 분포함수 F를 가지는 확률변수이다. 이 모형으로부터 제 2종 중도절단이 발생한 경우 관측된 자료를 $y_{(1)} \le \cdots \le y_{(m)}$ 이라하자. 이들에 기초한 우도함수는 다음과 같다.

$$L(\mu,\sigma; y_{(1)}, \cdots, y_{(m)})=\frac{1}{\sigma^m} \prod_{i=1}^{m} f(\frac{y_{(i)}-\mu}{\sigma}) \ [1-F(\frac{y_{(m)}-\mu}{\sigma})]^{n-m} \tag{2. 10}$$

이러한 위치-척도모수 모형에서 모수들에 대한 우도추정량에 기초한 추론은 보조통계량(ancillary statistic)에 대한 조건부적 추론이 합리적이라 알려져있다. (Fisher(1934), Hinkley(1978)등). 여기서 보조통계량은 다음과 같다.

$$A_i=\frac{y_{(i)}-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \quad (i=1, \cdots, n) \tag{2. 11}$$

Y의 백분위 수 y_p에 대한 신뢰구간을 구하기 위해 다음과 같이 정의되는 pivotal 양들

$$X^1 = \frac{y_p - \hat{y}_p}{\hat{\sigma}} = \frac{\{(\mu-\hat{\mu})+(\sigma-\hat{\sigma})w_p\}}{\hat{\sigma}}, \quad X^2 = \log\left(\frac{\hat{\sigma}}{\sigma}\right) \tag{2. 12}$$

에 대하여 보조통계량의 조건부 밀도함수를 구하면 다음과 같다.

$$f_{x^1,x^2|A}(x^1,x^2) \propto \exp\{l(x^1,x^2)\} \tag{2. 13}$$

여기서,

$$\begin{aligned} l(x^1,x^2) &= \log L(x^1,x^2\ ;A) \\ &= \log L(\hat{\sigma}(x^1+w_p-w_p e^{x^2})+\hat{\mu},\ \log\hat{\sigma}+x^2\ ;\ y_{(1)},y_{(2)},\cdots,y_{(m)})+m\log\hat{\sigma} \\ &= \{mx^2+\sum_{i=1}^{m}g(P_i+w_p)+G(P_m+w_p)\} \end{aligned} \tag{2. 14}$$

이고 $g(w)$, $G(w)$와 P_i들은 다음과 같이 정의된다.

$$g(w) = -\log f(w), \quad G(w) = -(n-m)\log(1-F(w)) \tag{2. 15}$$

$$P_i = \{A_i-(x^1+w_p)\}/e^{x^2} \quad (i=1,\cdots,m) \tag{2. 16}$$

위의 (2.14)식에 DiCiccio등(1990)의 결과를 적용하면 다음의 근사식을 얻을 수 있다. 주어진 x^1값에 대해,

$$P_r(X^1 \le x^1 | A) \simeq \Phi(r)+\phi(r)\left[\frac{1}{r}+\frac{(I_{11}I_{22}-I_{12}^2)^{\frac{1}{2}}}{l_1(x^1,\tilde{x}^2)\{-l_{22}(x^1,\tilde{x}^2)\}^{\frac{1}{2}}}\right]. \tag{2. 17}$$

여기서, $\tilde{x}^2 = \tilde{x}^2(x^1)$은 주어진 x^1에 대해 $l(x^1,x^2)$를 최대화 시키는 x^2의 값으로 다음식

$$\sum_{i=1}^{m}g^{(1)}(\tilde{P}_i+w_p)\tilde{P}_i+G^{(1)}(\tilde{P}_m+w_p)\tilde{P}_m=m, \tag{2. 18}$$

$$\tilde{P}_i = \{A_i-(x^1+w_p)\}/e^{\tilde{x}^2}, \quad (i=1,\cdots,m) \tag{2. 19}$$

을 만족하는 값이고 r, l_1, $-l_{22}$, I_{11}, I_{12}, I_{22} 들은 다음의 식들

$$r=r(x^1)=sgn(x^1)\{2[m\tilde{x}^2+\sum_{i=1}^{m}\{g(\tilde{P}_i+w_p)\}+\{G(\tilde{P}_m+w_p)-G(A_m)\}\}^{\frac{1}{2}} \tag{2. 20}$$

$$l_1(x^1,\tilde{x}^2) = \{\sum_{i=1}^{m}g^{(1)}(\tilde{P}_i+w_p)+G^{(1)}(\tilde{P}_i+w_p)\}/e^{\tilde{x}^2} \tag{2. 21}$$

$$-l_{22}(x^1,\tilde{x}^2) = m+\sum_{i=1}^{m}g^{(2)}(\tilde{P}_i+w_p)\tilde{P}_i^2+G^{(2)}(\tilde{P}_m+w_p)\tilde{P}_i^2 \tag{2. 22}$$

$$I_{11} = \sum_{i=1}^{m}g^{(2)}(A_i)+G^{(2)}(A_m) \tag{2. 23}$$

$$I_{12} = \sum_{i=1}^{m}g^{(2)}(A_i)+G^{(2)}(A_m)A_m \tag{2. 24}$$

$$I_{22} = m+\sum_{i=1}^{m}g^{(2)}(A_i)A_i^2+G^{(2)}(A_m)A_m^2 \tag{2. 25}$$

로 부터 구해지며, 위의 식에서 정의된 $g^{(r)}(\cdot)$, $G^{(r)}(\cdot)$은 각각 $g(\cdot)$와 $G(\cdot)$의 r차 미분값이다.

위의 식(2.17)로부터 y_p에 대한 신뢰구간을 형성하기 위하여 다음 식

$$P_r(m_1 \le X^1 \le m_2 \mid A) = 1-\alpha \tag{2. 26}$$

을 만족하는 m_1과 m_2를 구하고 $(\hat{y}_p + m_1\hat{\sigma},\ \hat{y}_p + m_2\hat{\sigma})$을 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간으로 정한다.

위의 식에서 흥미로운 사항은 근사식에 절대적 영향을 미치는 r의 값이 통계적인 의미를 가지는 부호우도비 검정통계량(signed likelihood ratio statistic)과 동일하다는 것과 근사식 형태가 장애 모수(nuisance parameter)가 없는 1차원 모수에 대한 추론에 사용되는 근사식으로 잘 알려진 Lugannani-Rice(1980) 공식의 형태를 그대로 유지한다는 사실이다. 또한, 이 식이 가지는 장점 중의 하나는 제 2종 중도절단이 발생한 자료에 대해서도 변형없이 바로 적용할 수 있다는 점인데 중도절단된 자료가 없는 경우에는 $m=n$ 이고 $G(z)=G^{(1)}(z)=G^{(2)}(z)=0$ 이 되어 위의 근사식의 계산이 더욱 간단하다. 3장에서는 실제의 자료를 통해 이 근사식의 정도를 알아보았다.

3. 예제를 통한 비교

아래의 자료는 Lieblein과 Zelen(1956)이 처음 제시한 것으로 Lawless(1980, 1982)로부터 인용한 것이다. 23개의 볼 베어링에 대한 내구력 시험의 결과로 얻은 회전수(단위:million)에 대한 이 자료는 그 동안 와이블모형을 설명하는 자료로 많이 이용되어 왔다.

17.88,	28.92,	33.00,	41.52,	42.12,	45.60,
48.40,	51.84,	51.96,	54.12,	55.56,	67.80,
68.64,	68.64,	68.88,	84.12,	93.12,	98.64,
105.12,	105.84,	127.92,	128.04,	173.40	

이 자료에 대한 확률도표(probability plot)를 그려보면 로그 정규분포모형에도 잘 적합됨을 알 수 있다. 가능한 여러 신뢰수명모형에 대해 꼬리확률의 변화를 조사해보는 것은 모형간의 비교에 많은 정보를 제공한다. 이러한 목적에 따라 본 논문에서는 위의 자료에 대해 일반화 감마모형을 적합시키고 지표모수(κ)의 값이 변함에따라 백분위 수 y_p에 대한 신뢰구간이 어떻게 변하는지에 대하여 살펴보았다. 이 과정에서 근사식을 통한 y_p에 대한 신뢰구간의 정도(precision)를 알아보기위해 2.1절에서 구한 정확한 신뢰구간과 비교하였다. 선택된 몇개의 지표모수 $\kappa=0.5,\ 1.0,\ 10.0$ 에 대하여 백분위 수 $y_{0.50}$, $y_{0.1}$, $y_{0.01}$ 에대한 근사신뢰구간을 구하고 정확한 신뢰구간과 비교한 결과를 <표3-1>에 수록하였다. 이 경우 근사식에의한 신뢰구간이 대단히 정확함을 알 수 있었다. 정확한 신뢰구간의 결과는 Lawless(1980, 1982)로 부터 인용한 것이다.

<표3-1> 일반화 감마분포의 백분위 수에대한 90% 신뢰구간

y_p \ κ		$\kappa=0.5$		$\kappa=1.0$		$\kappa=10.0$	
		Exact	Approx.	Exact	Approx.	Exact	Approx.
$y_{0.50}$	u.b.	4.45	4.453	4.42	4.417	4.36	4.362
	l.b.	4.01	4.009	4.01	4.009	3.98	3.983
$y_{0.10}$	u.b.	3.56	3.552	3.63	3.632	3.69	3.688
	l.b.	2.56	2.569	2.83	2.831	3.10	3.099
$y_{0.01}$	u.b.	2.36	2.366	2.71	2.707	3.12	3.120
	l.b.	0.54	0.538	1.29	1.303	2.21	2.222

(u.b. 는 신뢰상한, l.b. 는 신뢰하한을 뜻한다.)

<표3-1>에서 구한 근사신뢰구간은 다음의 식을 (2.17)식의 결과에 적용함으로서 쉽게 구할 수 있다.

$$m=n, \quad G(w)=G^{(1)}(w)=G^{(2)}(w)=0 \tag{3. 1}$$

$$g(w)=\log\Gamma(\kappa)-(\kappa-\frac{1}{2})\log\kappa+\kappa e^{\frac{w}{\sqrt{(\kappa)}}}-\sqrt{\kappa}w \tag{3. 2}$$

$$g^{(1)}(w)=\sqrt{\kappa}(e^{\frac{w}{\sqrt{\kappa}}}-1), \quad g^{(2)}(w)=e^{\frac{w}{\sqrt{\kappa}}} \tag{3. 3}$$

일반화감마모형에서 $k=\infty$인 경우에 해당하는 로그정규분포에 대해서 생각해보자. T가 로그정규분포를 따를 때 Y=logT는 다음의 위치-척도모수 모형으로 표현된다.

$$Y \sim \mu+\sigma W, \quad W \sim N(0,1) \tag{3. 4}$$

W의 분포함수를 $\Phi(\cdot)$라하고 p차 백분위 수를 w_p라할 때 $y_p=\mu+\sigma w_p$이다. 여기서, $w_p=\Phi^{-1}(\cdot)$이다. p차 백분위 수 y_p에 대한 근사신뢰구간은 (2.17)식으로 주어지고, 여기에 사용되는 식들은 다음과 같다.

$$g(w)=\frac{1}{2}\log 2\pi+\frac{w^2}{2} \tag{3. 5}$$

$$g^{(1)}(w)=w, \quad g^{(2)}(w)=0 \tag{3. 6}$$

한편, y_p에 대한 정확한 신뢰구간은 다음과 같이 구할 수 있다. 이 경우 X^1에 대한 조건부적 꼬리확률은 정규분포의 성질로 부터 비조건부적 꼬리확률과 같으며 다음과 같이 주어진다.

$$P_r(X^1 \le x^1 \mid A)=P_r(X^1 \le x^1)=P_r\{t_{(n-1)}(\delta) \le \sqrt{n-1}(x^1+z_p)\} \tag{3. 7}$$

이 경우 $t_{(n-1)}(\delta)$는 비심모수(noncentral parameter)가 δ인 비심 t-분포(noncentral t distribution)를 나타낸다. 여기서 $\delta=\sqrt{n}w_p=\sqrt{n}\Phi^{-1}(p)$이다. 위의 자료에 대하여 로그정규모형을 적합시킬 때 백분위 수의 신뢰구간을 구하여 <표3-2>에 수록하였다. 정확한 신뢰구간의 결과는 Lawless(1980, 1882)로 부터 인용한 것이다.

<표3-2> 로그정규분포의 백분위 수에대한 90% 신뢰구간

	$y_{0.5}$		$y_{0.1}$		$y_{0.01}$	
	u.b.	l.b.	u.b.	l.b.	u.b.	l.b.
Exact	4.34	3.96	3.68	3.15	3.20	2.44
Approx.	4.341	3.959	3.679	3.154	3.200	2.441

(u.b.는 신뢰상한, l.b.는 신뢰하한을 뜻한다.)

4. 결 론

수명분포모형에서 꼬리확률에 대한 추론은 중요하다. 모형의 변화에따른 꼬리확률의 변화에 대한 정보를 얻기위하여 여러가지 수명분포모형을 포함하는 형태인 일반화 감마분포 모형을 적합시키고 다양한 지표모수의 변화에따라 백분위 수의 신뢰구간을 구하였다. 기존의 정확한 방법은 복잡한 수치적 적분이 필요한 반면 제안된 근사적 방법은 계산이 간단할 뿐만아니라 뛰어난 정확도를 유지한다는 것을 본 논문에서 확인하였다. 로그정규분포에 대해서도 같은 결과를 얻을 수 있었다.

참 고 문 헌

[1] DiCiccio, T. J., Field, C. A. and Fraser, D. A. S. (1990), "Approximations of marginal tail probabilities and inference for scalar parameters," *Biometrika*, **77**, 77-95.

[2] Farewell, V. T. and Prentice, R. L. (1977), "A study of distributional shape in life testing," *Technometrics*, **19**, 69-75.

[3] Fisher, R. A. (1934), "Two new properties of mathmatical likelihood", *Proceedings of the Royal Society of London, Series A.*, **144**, 285-307.

[4] Hinkley, D. V. (1978), "Likelihood inference about location and scale parameters," *Biometrika*, **65**,253-261.

[5] Lawless, J. F. (1980), "Inference in the generalized gamma and log gamma distributions," *Technometrics*, **22**, 409-419.

[6] Lawless, J. F. (1982), *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, New York: Wiley.

[7] Lieblein, J. and Zelen, M. (1956), "Statistical investigation of the fatigue life of deep groove ball bearings," *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, **57**, 273-316.

[8] Lugannani, R. and Rice, S. O. (1980), "Saddlepoint approximation for the distribution of the sum of independent random variables," *Advances in applied Probability*, **12**, 475-90.

[9] Prentice, R. L. (1974), "A log-gamma model and its maximum likelihood estimation," *Biometrika*, **61**, 539-544.

[10] Stacy, E. W. (1962), "A generalization of the gamma distribution," *Annals of mathematical statistics*, **33**, 1187-1192.

Approximate Confidence Intervals about Quantiles in the Generalized Gamma distribution

Jong Hwa Na[1)]

Abstract

For the generalized gamma distribution, exact inferences about quantiles need many computations involving complicated numerical integrations. This paper suggests approximate confidence intervals which are easily obtained by considering the alternative location-scale model. Also, these intervals are very accurate even for small sample size. Approximate confidence intervals about quantiles in the lognormal distribution are also considered. With type 2 censoring data, approximate confidence intervals can also be obtained directly by the suggested methods.

1) Department of Computer Science and Statistics, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea.