特輯

혼돈이론(Chaos Theory)의 비선형 시스템에의 응용

李 柱 張
韓國科學技術院 電氣및電子工學科

I. 머릿말

뉴튼의 Principia가 출판된지 약 300년, 최근 약 20 여년 사이 비선형 동역학(nonlinear dynamics) 분야에서 새로운 발견이 이루어지고 있다. "chaotic vibration" 혹은 "chaotic oscillation" 이라고 불리우는 이러한 현상들은 결정론적(deterministic) 시스템에서 랜덤한 응답(randomlike motion)이 일어남을 말한다. 이러한 현상들은 유체 역학 분야에서 먼저 발견 된 이래, 거의 모든 시스템에서, 더구나 자유도가 1인 시스템에서도 발견되고 있다. 즉, 비선형 미분방정식 또는 차분방정식(difference equation)에서 랜덤한 요소가 전혀 없음에도 불구하고, 제한(bound)되고 비주기적인 해가 존재한다는 사실이 발견되었다. 따라서, 동역학의 해를 구하는데에 있어서, 새로운 방법이나 새로운 수학적 착상이 필요하게 되었다. 이전에는 이러한 현상들은 우리가 알지 못하는 어떠한 잡음이라고 생각해 왔으나 이제는 이를 설명할 수 있는 도구가 생긴 것이다. 흔히 "Chaos"라고 말하는 이 학문은 이러한 바탕위에서 연구되기 시작한 것이고, 이제 수학자들이나 이론 물리학자들의 손에서 벗어나, 실험자들과 공학자들에게도 중요한 관심사로서 자리잡게 되었다.

혼돈(chaos)이라고 불리우는 학문이 무엇이냐고 하는 질문에 답하기 이전에, 공학자에게 왜 이러한 학문을 연구할 필요가 있는지를 먼저 생각해보도록 하겠다. 기계학에서의 한 예를 들자면, chaotic혹은 noisy한 시스템에서 수명예측(life predicton)이나, 피로도 분석(fatigue analysis)은 그 시스템의 각 부분에 주어지는 응력이 시간의 변화에 따른 변동을 정확히 알 수 없기 때문에 매우 어렵다. 그리고, 아주 간단한 비선형성만 존재해도 chaotic vibration이 일어난다는 사실은 기존의 동역학에 있어서의 예측성(predictability)이나, 수치해석의 유용성에 의문을 제기하게 한다. 이는 컴퓨터의 발전으로 복잡한 시스템이라도 빠른시간내에 시뮬레이션을 행하여 답을 구할 수 있다는 안일한 생각에 경종을 울리는 것이 아닐 수 없다. 즉, 시뮬레이션을 행함에 있어서, 컴퓨터 word의 길이가 무한대가 아닌 이상 오랜 시간 후의 예측은 불가능하다. 다시 말해서, 비선형 동역학에서의 혼돈 동역학(chaotic dynamics)은 초기 조건에 매우 민감하고, 응답이 주기적이라고 하더라도 예측(prediction)이 언제나 가능하다고는 말할 수 없기 때문에 새로운 방법과 착상을 가지고 문제를 해결하려는 노력이 공학자들에게도 필요하다.

그러면, Chaos란 과연 무엇인가? 대략적으로 말해서, 그것은 정상상태 응답의 괴이한 형태라고 말할 수 있겠다. 대부분의 공학자들은 선형 시스템의 해는 과도응답과 정상상태 응답으로 구분된다고 배웠고, 과도 응답이 사라진 후에는 정상상태 응답으로서, 일정한 값이나, 주기적인 해가 나타난다고 알고 있다. 이렇게 길들여진 상태에서 공학자들은 비선형 시스템도 마찬가지 일거라고 간과해 버린 것이다. 그러나, 간단한 비선형성에도, 그 응답은 제한되고, 또한 주기적이지 않은 경우가 있다. 주기적인 응답의 Fourier spectrum이 이산적인데 반해, chaos일 때에는 넓고도 연속적이다.

Chaotic vibration이 일어날 수 있는 환경은 매우 다양하며, 그 발생 또한 특별하게 생각될 수 있는 것은 아니다. 앞서 언급한 바와 같이, chaotic vibration은 비선형이고, 결정론적인 시스템에서만

발견될 수 있는 현상으로 "Random Process"라는 분야에서의 비결정론(stochastic)이나 통계적인 것과는 확연히 구분되어야 한다. 초기조건 공간(initial condition space)이나 파라메터 공간(parameter space)에서 살펴볼 때에, chaotic 응답이 일어날 수 있는 부분들은 매우 넓으며, 우리는 그러한 예들을 우리주위에서 흔히 발견할 수 있다. 공기의 변동이 거의 없는 방안에서 담배연기가 올라가는 것을 관찰해보면, 처음에는 똑바로 위로 향하여 올라가는 듯 하다가, 갑자기 이전의 균형이 깨어지면서 그 움직임이 제멋대로인 것을 발견할 수 있다. 유체역학에서 "Turbulence"라고 부르는 현상의 한 예가 이것이며, 이러한 현상은 수학적인 모델은 이미 오래전에 정립이 되었으나, 정확한 해를 풀어낼 수가 없기 때문에 수치해석에만 의존해 왔다. 고전 역학에서 단 하나 풀리지 않은 문제가 있다면, 바로 이 "Turbulence"이다. 전기회로나 자기회로에서도 이러한 현상들은 쉽게 접할 수 있다. Van der Pol의 방정식과 그의 실험에서도 chaotic vibration이 관찰되고, 소위 구조관계(constitutive relationship)에서, $D=\epsilon E$(혹은 $B=\mu H$) 라고 할 때 ϵ(혹은 μ)이 상수가 아니라 tensor로 주어진다면, 이 또한 chaotic vibration의 원인이 된다.

여기서, 그렇다면 chaos라는 것이 무슨 소용이 있고, 과연 어떤 식으로든 그 안에 질서라는 것이 존재하느냐는 물음이 있음직하다. 소산(dissipative) 시스템에 있어서, 그 대답은 "Yes"이다. 이러한 질서는 출력을 시간에 따라 살펴본다거나, 단순히 Fourier spectrum을 본다고 해서는 알아낼 수 없다. 위상공간(phase space)에서의 고찰이 가장 일반적이며, 그 속에서 "Fractal Structure"를 발견할 수 있고, "Lyapunov Exponent"라는 값을 측정할 수 있다.

다음장에서는 고전적인 비선형 동역학을 간단히 살펴보고, 이를 바탕으로 Chaos라는 새로운 분야로 좀 더 접근해보겠다.

Ⅱ. 이론적 배경[1]~[5]

1. 고전 비선형 동역학 및 기본 용어 설명

이 절에서는 chaos와 관련된 문헌을 접하는데 있어서, 자주 나오게 될 여러 용어를 설명하고자 한다.

• Map : n차원의 공간에서의 몇개의 점(point)들을 다른 점들의 집합과 연관시켜주는 수학적 법칙(mathematical rule). 만약에 이러한 법칙이 iteration이 가능하게 되어있다면, 차분방정식과 같게 된다.

• Flow : map이 이산성을 갖는다면, 그에 상응하는 연속시간에 대한 정의로서, 미분 방정식을 말하는 것이다.

• Bifurcation : 동역학 시스템의 하나 또는 몇 개의 파라메터 변화에 따라 시스템의 특성이 원래와는 다르게 변하는 현상이다. 예를들면 평형상태(equilibrium state)가 하나 뿐이었다가, 두개의 평형상태가 존재하게 변화하는 것을 말한다.

• Limit cycle : 공학의 견지에서 볼때에는, 자여기(self-excited) 또는 자율적 (autonomous)인 시스템에서의 주기적인 응답. 동역학의 견지에서는 여기에 강제항 (forced term)이 있을 때에 보여지는 주기적인 응답도 포함한다.

• Attractor : 과도 응답이 사라진 후에 수렴하게 되는, 위상공간의 subspace 또는 몇 개의 점들의 집합. 다음과 같은 종류가 있다. 좀 더 정확한 수학적인 정의는 참고문헌을 살펴보기 바란다.

• Equilibrium : 평형 상태

• Periodic motion or a limit cycle : 주기적 운동 또는 리미트 사이클

• Quasi-periodic motion : 준주기 운동 진동(oscillation)이 일어나는데, 그 주파수가 둘이 상이 있어서, 주파수의 비가 무리수가 되는 경우를 말한다. 위상공간에서 보 면, 결코 그 궤적은 닫혀지지 않는다.

• Strange attractor : 고전적인 비선형 동역학에서는 모든 시스템은 attractor에 포함된다. 그러나, 여기서 다루고자하는 chaotic 운동을 나타내는 시스템은 attractor에 속하지 않으므로, 구분하여 strange attractor라고 부른다.

• Intermittency : 오랜시간을 두고 시간에 따른 변화를 살펴볼때에, 보통의 attractor의 특성을 보이다가, 문득 랜덤한 움직임이 나타났다 사라지곤 하는 현상을 말한다. 이러한 랜덤한 움직임간의 시간 구간은 예측이 불가능하다.

2. Chaotic vibration을 나타내는 시스템의 예

chaotic 운동을 보이는 시스템의 예는 무수히 많다. 시스템 자체가 chaotic하다고 말하는 것이 아니

라, 어떤 파라메터나, 초기조건의 범위 내에서 시스템이 보통의 attractor에서 strange attractor로 변함을 말한다. Bernoulli map을 예로 들어보면,

$$x_{n+1} = 2\, x_n \ (\bmod 1)$$

여기서 mod 1 이라는 함수는 다음과 같이 정의된다.

$$x\ (\bmod 1) = x - \mathrm{integer}(x)$$

이 시스템은 초기조건 x_0가 유리수 일때는 보통의 attractor에 속한다. 그러나, 초기조건이 무리수로 주어진 경우 이 시스템은 제한되어 있으므로, globally 안정하지만, 평형점(equilibrium point)은 불안정하고, chaotic 운동을 나타낸다고 알려져 있다. Logistic 방정식 또는 인구증가 모델이라고 불리우는 문제를 생각해보면,

$$x_{n+1} = 4\mu x_n\ (1 - x_n)$$

우변에서 x_n의 차수가 1인 항은 출생(birth) 혹은 성장(growth)효과를 나타내며, 차수가 2인 항은 음식 또는 에너지의 제약을 나타낸다. 파라메터는 하나뿐이며, x_n 의 범위는 [0 1] 로 제한되어 있다. 따라서, μ는 1보다 큰 값을 가질 수 없다. 평형점은 $x_e = 0,\ (4\mu-1)/4\mu$ 이고, $\mu = \mu_1$ 에서 처음으로 period doubling현상이 일어난다(그림 2 참조). 즉, 두번의 iteration후에 처음의 자기 위치로 돌아오게 되는 것이다. 일반적으로, 이를 "m-cycle" 또는 "m-periodic orbit"라고 부르며, 식으로는 다음과 같다.

$$x_0 = f^{(m)}\ (x_0)$$

μ를 계속해서 증가시키면, 다음에는 4-cycle, 8-cycle, 16-cycle등이 계속해서 나타나고, 마침내 chaotic vibration이 일어난다. 즉, 위의 식을 만족시키는 m 값이 존재 하지 않게 되는 것이다. 안정한 평형점에서 2-cycle로, 여기서 다시 4-cycle, 8-cycle로 변화하는 것을 bifurcation이라고 부른다. 이는 μ를 한 값으로 고정시켜놓고, 과도기가 끝나고, 정상상태에 다다랐을 때의 x_n의 값들을 그리고, 다시 μ의 값을 변화시키고 정상상태의 값을 그리고, 하는 과정을 무수히 많이 반복한 것이다. 위상공간(phase space)에서 살펴보면, m-cycle은 m개의 점으로 나타나지만, chaos 상태가 되었을 때에는, 특정한 규칙성이 없이 2차원 평면의 한 부분을 다 뒤덮어 버리는 듯한 모습을 볼 수가 있다.

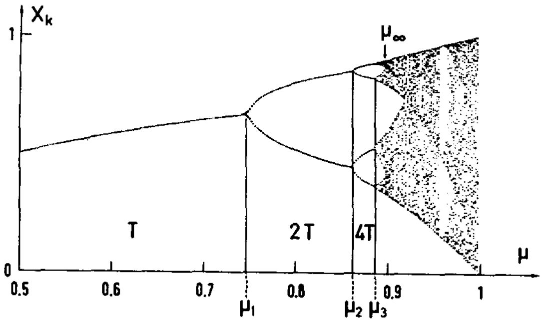

그림 1. 인구증가 모델에 대한 Bifurcation Diagram

Lorenz 방정식도 chaotic 시스템의 유명한 예이다. 이는 기상학에서 공기의 흐름들을 수학적으로 모델링한 것을 3개의 미분방정식으로 간략화한 것이다.

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$
$$\dot{y} = \rho x - y - xz$$
$$\dot{z} = xy - \beta z$$

$\sigma = 10,\ \rho > 25,\ \beta = 8/3$ 일때에, 이 시스템의 평형점은 세 개가 존재하는데, 원점이 saddle point, 다른 두 개의 점은 불안정한 spiral이다. 이들의 해를 위상공간에서 나타내려면, 3차원의 그림을 그려야한다. 3차원으로 그리는 것은 그리 어려운 일은 아니지만, 때에 따라서는 4차 혹은 그 이상의 그림을 그려야 할 필요가 생긴다. 이를 위하여 제안된 방법이 "Poincaré map(section)"이다.

Quasi-periodicity를 위상공간에서 그리면, 그 궤적은 결코 닫히지 않는다. 그렇다면, 이 경우에 있어서, 위상공간에서의 그림은 아무런 의미가 없다. 두 개의 주파수 성분이 존재한다고 할때, quasi-periodic이라면, ω_1/ω_2는 무리수라는 얘기가 된다. 이 때 위상공간에서의 그림을 $T = 2\pi/\omega_1$ 또는 $2\pi/\omega_2$로 sampling을 해서 보면, 그 모양은 각 주파수 성분의 진폭에 따라, 원 또는 타원의 모양을 나타내게 된

다. Poincar map에 대한 설명은 Ⅱ.4.2)에 있다.

3. Chaotic vibration의 특성

첫째, 초기조건에 민감하다. 위상공간에서, 서로 다른 그러나 아주 가까운 두 개의 초기조건에 대하여 궤적을 그렸을 때, 두 궤적이 시간이 흐름에 따라 전혀 다른 모습을 보인다. 따라서, 선형 시스템에서는 초기조건을 알면, 그 시스템의 미래의 출력을 예측할 수 있는 반면, Chaotic 시스템에 있어서는 예측(prediction)이 항상 가능한 것은 아니다.

둘째, 불확실성이 시간에 따라 증가한다. 위상공간에서 ϵ 만큼 차이가 나는 두 초기 조건에 대하여, 시간에 따른 두 궤적의 거리는 지수함수적으로 증가한다.

$$d(t) = d_0 e^{lt} ,\ d_0 =$$

여기서 l을 Lyapunov exponent라고 부르며, chaotic 시스템에 대한 판단기준(criterion)으로 사용된다.

세째, 주파수 spectrum이 넓은 영역에 걸쳐 퍼진다. 외부 입력이 harmonic 함수로서 단일 주파수로 주어진다고 하더라도, 출력의 fourier spectrum은 넓은 주파수 대역에 걸쳐있는 것을 확인할 수가 있다.

네째, Poincaré map을 그려보았을 때에 몇 개의 점으로 나타내지지도 않고, 궤적이 닫혀 있지도 않다.

다섯째, Poincaré map의 모양이 구름과 같은 형상을 하며, 계속 확대하여 보아도 원래의 모습이 계속 반복되어 보이는 "자기복제(self-similarity)"의 특성이 있다. 특히, 이런 구조적인 특성을 "fractal structure"라고 부른다.

4. Chaotic 운동을 판별하는 법 : Criterion

3절에서 논의한 특성을 구별해 내는 것이 chaotic 운동을 판별해 내는 중요한 수단이 된다. 다음의 방법을 이용하기 전에 먼저 대상 시스템이 비선형인가를 확인하고, 비선형적인 요소가 어디에 존재하는 지를 알아보아야 한다. 그리고, 실험에 의한 측정이라면, 실험 세트나 측정기구 요소에서의 랜덤 노이즈가 너무 심하지 않은가도 확인해 보아야 한다. 위상공간에 궤적을 그려보는 것도 한 가지 방법이 될 수가 있다. 이상의 것이 확인이 된 후에, 다음의 방법들을 이용하여 점검해 본다. 어느 한 가지 방법으로만 점검해보지 말고 여러가지 가능한 방법들을 동원하는 것이 실수를 줄일 수 있다는 것도 염두에 두어야 한다.

1) Fourier Spectrum

외부 입력이 단일 또는 한정된 갯수의 주파수를 갖는다고 하더라도, 출력은 입력 주파수의 선형결합(linear combination)이 아닌 부분에도 넓은 영역에 걸쳐 주파수 성분이 존재한다는 특성을 이용하는 방법이다. Fourier transform 또는 FFT를 통하여 power spectral density를 그려보고, 이러한 특성이 나타나는가를 점검해본다.

2) Poincaré map

연속시간 동적 시스템의 flow를 이산시간의 map으로 바꾸어주는 방법이다. autonomous 시스템과 nonautonomous 시스템에서의 정의가 다소 차이가 있긴하지만, 일반적으로 위상공간이 n 차원이라면, Poincaré map은 n-1 차원이다. 그림 3 에서 궤적이 평면 S를 같은 방향으로 그리고 일정한 시간간격으로 뚫고 지나가는 점들이 점선으로 표시되어 있다. 즉, 여기에서의 Poincaré map은 평면 S위에서 두 개의 선분으로 이루어져 있다. 특별한 경우에는 double Poincaré map이라고 하여, 차원을 2이상 줄이는 방법도 있다. Poincaré map을 살펴보면 위상공간에서는 알지 못했던 사실들을 알게 되는데, 보통의 attractor인 경우는 몇 개의 점들의 집합이나, 또는 원과 같은 도형의 형태로 나타나고, chaotic 운동일 경우에는 궤적이 닫히지 않으면서 자기 복제의 성질이 나타난다.

3) Lyapunov Exponent

초기조건에 민감하며, 불확실성이 증대되는 점을 이용하는 방법이다. 위상공간에서 초기조건이 서로 매우 근접한 두 개의 궤적을 그리고, 각 시간에 따라 두 궤적이 멀어지는 정도를 측정한다. 두 초기 조건간의 거리가 d_0 라면, 시간 t인 점에서의 거리는 다음과 같다.

$$d(t) = d_0 2^{lt}$$

이산 시스템에 대해서는

$$d_n = d_0 2^{ln}$$

와 같이 나타내진다. l을 Lyapunov exponent라

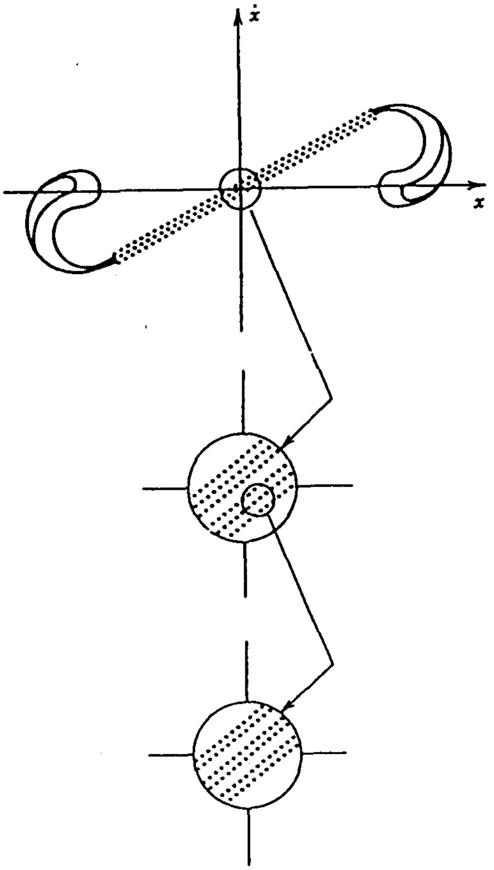

그림 2. Poincar map에서의 자기복제 현상

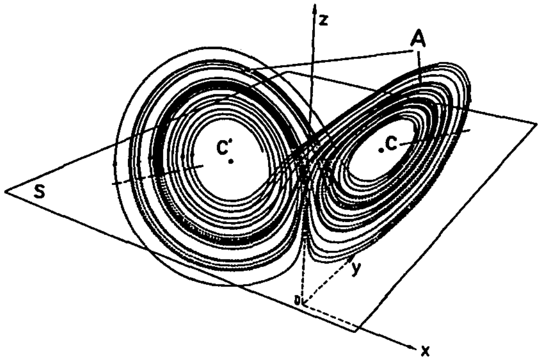

그림 3. Lorenz 방정식의 위상공간에서의 모습

고 부른다. 여기에서 베이스(base)로 2를 선택한 것은 크나큰 의미는 없다. 때에 따라서는 다른 값을 선택할 수도 있고, 어떤 베이스를 가지고 측정을 했느냐 하는 것을 밝히면 된다. 앞의 많은 예에서 보았듯

이 평형점은 불안정하지만, 전체적으로 시스템은 제한(bound)되어 있으므로, 위와 같은 관계식은 단지 일부분에서만 성립된다. l를 계산해내면, 다음의 규칙을 적용하여, 시스템이 chaos인지 아닌지를 판별한다.

$l > 0$: Chaos
$l \leq 0$: Regular motion

Lyapunov exponent, l을 구하는데 쓰일 수 있는 하나의 식은 다음과 같다.

$$l = \frac{1}{t_N - t_0} \sum_{k=1}^{N} \log_2 \frac{d(t_k)}{d(t_{k-1})}$$

여기에서, $d(t_{k-1})$는 기준궤적과 아주 가까운 초기조건으로부터 출발한 궤적간의 시간 $t = t_{k-1}$ 에서의 거리이고, $d(t_k)$는 $t = t_k$ 에서의 거리이다. 보통 위의 경우에 N은 2000 20000 정도로 해야 하며, 아무리 좋은 알고리즘으로 한다고 해도 500 이상의 측정 횟수가 필요하다. 따라서, 수치 해석적인 방법이 불가피하며, 많은 계산 시간이 소모된다. 그러나, 시스템에 따라서는 손으로 계산해서 풀 수 있는 경우도 있다.

다음의 경우를 생각해보자.

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

f(x)가 미분 가능한 함수라면, 두 궤적 간의 거리는 df/dt 로 근사가 가능하다. 즉,

$$d_0 = \varepsilon$$
$$d_1 = f(x_0 + \varepsilon) - f(x) = df/dx \Big|_{x=x_0} \bullet \varepsilon$$

이므로, 따라서

$$l = \lim_{N \to 0} \sum_{k=1}^{N} \log_2 \left| \frac{df}{dx} \right|_{x=x_k}$$

가 된다.

Variational 방정식을 이용하여 구할 수도 있는데, 결국 Lyapunov exponent는 고유값(eigenvalue)의 일반화라는 것을 알 수 있다.

앞서 살펴 보았던 Bernoulli map을 예로 들면,

$$x_{n+1} = 2\, x_n \ (\bmod 1)$$

$f(x) = 2x$ 이므로, $df/dx = 2$ 이다. 이 값을 윗식에 대입하면, $l = 1$을 얻는다. 다시 말해서, 가까운 거리에 있는 점들은 평균적으로 다음의 율로서 발산한다고 말할 수 있다.

$$d_n = d_0 2^{ln}$$

l의 단위는 bits/iteration 이다. 이는 한 iteration이 지나면, 이전 정보량에서 l bits 만큼의 정보를 잃어버린다는 것을 의미한다. Bernoulli map을 이진수로 계산해보면, 이는 명확해진다.

$$x_n = 1/2 + 1/4 + 1/16 + 1/128$$
$$= (0.1101001)_2$$

$$x_{n+1} = 2\ x_n \pmod 1$$
$$= (1.101001)_2 \pmod 1$$
$$= (0.101001)_2$$

즉, 원래 가지고 있던 정보량 중에서 1 bit 만큼을 잃어버린 것이다.

3) Fractal Dimension

Lyapunov exponent는 보전(conservative) 시스템에도 적용할 수 있는 반면, fractal demension은 소산(dissipative) 시스템에서만, 측정이 가능하다. 보전(conservative) 시스템에서는 fractal structure를 발견할 수 없기 때문이다. fractal dimension은 그 재는 방법에 따라 대략 4가지가 있다.

capacity dimension : d_C
pointwise dimension : d_P
correlation dimension : d_G
information dimension : d_I

이들은 서로 다음과 같은 관계를 가지고 있으나, 그 크기에 있어서 별차이는 없다.

$$d_G < d_I < d_C$$

Capacity dimension이 가장 개념적으로 이해하기가 쉬우므로, 여기서는 간단히 이에 대해서만 알아보기로 한다.

삼차원 공간에서 선을 하나 생각해 보자. N_0개의 점들이 일정하게 분포되어 있다고 하면, 한 변의 길이가 ϵ인 입방체로 이 선을 덮는다고 할때, 필요한 입방체의 갯수, $N(\epsilon)$는 대략

$$N(\epsilon) \approx 1 / \epsilon$$

이 된다.

마찬가지로, 2차원의 면에 N_0개의 점을 균일하게 분포시키고, 이를 같은 크기의 입방체로 덮는다고 하면, 그 갯수는

$$N(\epsilon) \approx 1 / \epsilon^2$$

이 될 것이다. 그렇다면, 좀 더 확장시켜서 생각해 볼때, 차수(dimension), d는 다음과 같은 법칙을 따른다.

$$N(\epsilon) \approx 1 / \epsilon^d$$

양변에 log를 취하고, capacity를 나타내는 subscript, c를 붙이면, capacity dimension, d_C는

$$d_c = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$$

와 같이 구해진다.

Fractal curve 또는 fractal set의 한 예로서 Koch curve와 Cantor set에 대해 알아보고, 이들의 차수를 재보겠다.

Koch curve는 다음의 그림 4 와 같이 길이가 1인 선분의 가운데 1/3을 늘려 세워서 길이가 1/3인 선분 4개를 만드는 과정을 무한히 되풀이하여 만들어진다. 즉, 새롭게 만들어진 4^n개의 선분에 대해서도 같은 과정을 무한히 계속한다. 이렇게 만들어진 곡선은 2차원의 일부분을 완전히 덮고 있는 것처럼 보인다. 즉, capacity dimension이 1과 2사이 일 것이 예상된다. 과정의 반복에 따라 선분의 갯수는 4^n개로 늘어나고 각 선분의 크기는 $(1/3)^n$으로 줄어든다. 즉,

$$N(\epsilon) = 4^n$$
$$\epsilon^n = (1/3)^n$$

따라서,

$$d_c = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26185\cdots\cdots$$

이 된다.

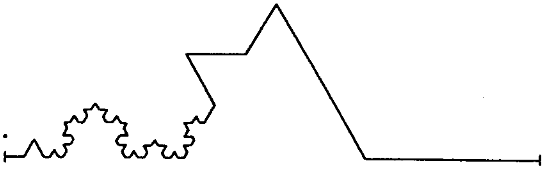

그림 4. Koch curve를 만드는 과정의 한 단계

Cantor set은 길이가 1인 선분의 가운데 1/3을 잘라서 버리는 것을 무한히 반복하여 만들어 진다. 그러면, 선분은 2^n개가 되고, 그것의 길이는 $(1/3)^n$이 되므로, 마찬가지 방법으로,

$$d_c = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.63092\cdots\cdots$$

가 된다.

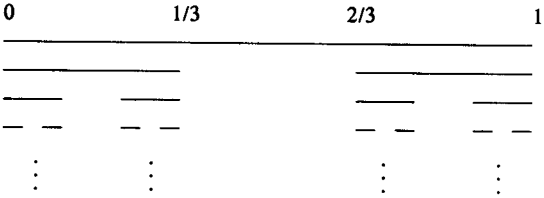

그림 5. Cantor set을 그리는 과정

Information 차수는 information entropy를 측정하여 차수를 재는 방법인데, 이것은 차수가 커질수록 정보량이 많아진다는 의미이므로, 결국 큰 차수를 갖는 시스템일수록, 예측이 어려워진다는 말이 된다. Correlation 차수는 information 차수와 마찬가지로, 시스템의 시간에 따른 변화를 확률론적으로 나타낸 것이다. Lyapunov 차수라 하여, Lyapunov exponent를 fractal 차수에 적용시키는 방법도 있다.

Ⅲ. 전자공학에의 응용 [6] ~ [16]

비선형 동역학이 Van der Pol Oscillator에서 시작되었기 때문인지, 회로분야에서는 꾸준한 연구가 이루어지고 있다. 비선형 저항이나, 비선형 인덕터등이 고전적인 예라면, varactor diode나 pn 접합, 트랜지스터에서도 많은 연구가 이루어지고 있다. PLL에서의 chaos도 다각적인 면에서 많은 연구가 이루어져 왔다. 하지만, 현재의 "Chaos"의 위상이 그러하듯이 아직은 분석에 그치는 경우가 많다. 실제 응용도 특수한 경우나 간략화된 모델에 적용시킨다. 분석이라는 측면에서 좀 더 깊은 이해를 위하여, chaos를 전제로한 비선형 동역학의 이론적인 연구도 활발히 이루어지고 있다.

이산 시스템에서의 chaos도 연구되고 있는데, 덧셈기에 overflow 비선형성이 존재하는 2차의 디지탈 필터에서 나타나는 fractal 구조를 분석하였다. 또한, 간단한 디지탈 필터에서 입력이 없음에도 많은 운동정보를 가지고 있다는 점에 중시하여, low-pass나 high-pass 필터와 같이 전형적인 사용외에, 다른 부분에 있어서의 사용도 큰 유용성이 있을 것이라는 가능성을 제시하였다. 그러나, 양자화(quantization)에 따른 영향을 고려하지 않은 문제점이 있다. 영점(zero), 극점(pole) 그리고 전달함수라는 고전적인 시스템에의 접근방식을 통하여, 비선형 시스템의 bifurcation현상에 대한 고찰도 있다. 컴퓨터 word 길이의 유한함에 대한 민감성(sensitivity)과 견실성(robustness)에 대한 연구가 진행중이나, 하드웨어 모델링 오차에 대한 실험적 고찰은 아직 이루어지지 않고 있다.

두개의 cell만을 가지는 세포식 신경회로망(cellular neural network)에서도 주기함수 입력에 대하여 strange attractor가 발견되었고, 여기에서도 fractal 구조를 볼 수 있다. 인구증가 모델에 대하여, 아날로그 IC 형태의 회로를 구성하여 실시간 동작을 시킨 예도 있다. 이 경우 디지탈 모델보다 속도는 빠르지만, 정확도가 떨어지는 문제점이 있다. 디지탈 back propagation 학습 알고리즘은 회로구성이 어려우므로, 대신 servomechanism을 사용하였다. 이러한 접근 방식은 실제 응용 가능성을 보여주는 단적인 예이다. 이외에도, 난수를 발생시키는 알고리즘이나 colored noise를 만들어내는데에도 chaos이론이 사용된다.

일반적인 되먹임 시스템(feedback system)에 대한 고찰도 무시할 수가 없는데, 1980년을 전후하여 이에 대한 논문들이 나오고 있으며, 최근에는 적응제어 시스템에서의 chaotic behavior가 활발히 연구되

고 있다. 적응제어 시스템은 적응기계장치와 같이 느리게 변화하는 부분과 제어공정과 같이 빠르게 변화하는 부분이 있다.

적응제어 시스템에서는 파라메터 추정이 확실히 이루어져야만 하는 경우가 많다. 일반적으로, 추정하고자 하는 파라메터 숫자의 반보다 많은 수의 주파수 정보가 입력되어야만 파라메터 수렴을 보장할 수 있다고 알려져 있다. 이를 충분한 여기 조건(persistency of excitation)이라고 하며, 이는 파라메터 추정에 있어서, 견실성을 보증하는 충분조건이다. 출력 오차 알고리즘, 설정치 추적, 그리고 adaptive pole placement등 거의 모든 적응제어 알고리즘에 있어서 충분한 여기조건이 만족되지 않았을 경우에는 파라메터가 참값으로 수렴되지 않으며, 버스팅(bursting) 현상을 나타내기도 하고, 이것이 단속(intermittency)을 야기하기도 한다. 또한, 단속은 시스템 내부의 진동 모드와도 직접적인 관련이 있음이 밝혀졌다. 그러나, 외부 강제항의 충분한 여기조건이 이러한 모든 경우에 있어서의 해독제가 될 수는 없다.

적응제어 시스템에서의 비선형성은 주기적이고도 복잡한 응답이나, chaos를 야기하기도 하지만, 근본적으로는 그러한 비선형성으로 인하여, 그 응용범위가 넓고, 견실성을 보강해주기도 한다. 이러한 측면에서의 분석 또한 최근의 동향이며, 파라메터 추정에 있어서의 ergodicity를 포함하는 방향으로의 연구도 이루어지고 있다.

Chaos이론의 실제 응용사례도 매우 광범위한데, Chaos computing, 복잡한 플랜트의 모델링, 패턴인식, 정보압축과 부호화, 대용량의 메모리, 레이저, 신경회로망, 로봇의 경로 계획 등이 이에 속한다. Fractal이라든가, chaos라든가 하는 용어가 이제는 그리 낯설지 않음인지, "Fractal system" 이라 하여 전달함수의 차수가 정수가 아닌 시스템에 대한 연구가 이루어지는 것도 흥미롭다.

Ⅳ. 맺음말

이상으로 혼돈이론에 대한 전반적인 소개와 아울러 전자공학에서 응용되고 있는 분야에 대하여 알아보았다. 대략적으로, 혼돈이론의 응용은 비선형 시스템에서의 원하지 않는 결과를 피하려고 하는 노력과 간단한 시스템에서도 많은 정보량을 가지고 있다는 긍정적인 효과를 이용하려는 노력으로 구분될 수 있다. 제어 시스템에서의 응용은 전자에 속하는 부분이 많으나, 전산에서의 응용은 오히려 후자를 강조하는 경향이다.

국내의 혼돈이론에 관한 연구동향을 알아볼 수 있는 객관적인 정보는 거의 없는 실정이므로, 일본전자협회 바이오정보응용시스템 조사위원회에서 행한 설

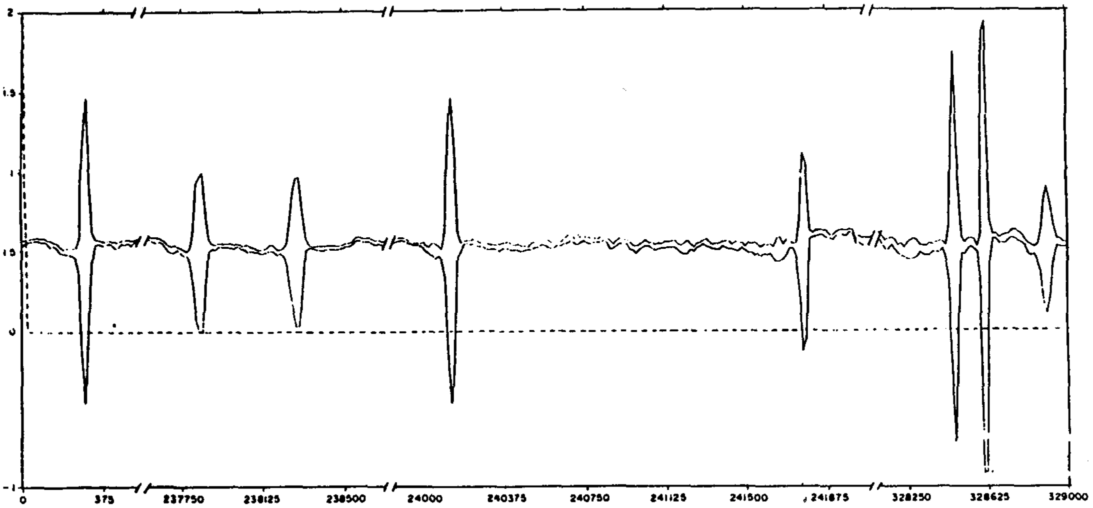

그림 6. 적응제어 시스템에 있어서의 intermittency 현상

문 조사결과(1991년 1월)를 인용함으로써 전반적인 혼돈이론에 대한 인식도를 알아보는 것으로서 맺음말을 대신하고자 한다. 이 설문조사는 일정수준 이상의 전문가를 대상으로 행하여 졌다. 전체적으로 보건대, 혼돈이론은 학문적인 가치가 충분히 있다는 인식과 함께 지금 현재로서도 기초연구 이상의 수준이라는 응답이 대부분이었다. 그러나, 아직은 일반인들에게 생소한 분야라는 점, 그리고 전문가가 많지 않다는 점과 아울러 비선형 동역학이나, 진동분야의 학문과 함께 발전해야 한다는 분위기를 느낄 수가 있었다.

우리나라에서도 인공지능에 대한 관심과 연구열의가 고조된 만큼, 혼돈이론 분야에서도 많은 관심과 노력을 경주하여, 예측 가능한 부분으로서만 이해했던 세계관으로서의 과학에서 벗어나 혼돈 그 자체를 하나의 질서로 인식하고 느끼는 세계관으로서의 과학 발전의 대열에 합류하여야겠다. 이렇게 함으로서, 앞으로 우리도 광통신, 가전기기, 반도체, 전산기 등의 모든 시스템의 응용에 중요한 역할을 할 수 있을 것이다.

參考文獻

[1] Proceedings of the IEEE , Aug. 1987

[2] Francis C. Moon, Chaotic Vibrations, John Wiley & Sons, 1987

[3] Pierre Berg , Yves Pomeau and Chistian Vidal, Order within Chaos, John Wiley & Sons, 1984

[4] James Gleick, Chaos : Making a New Science, Penguin Books, 1987

[5] Hans Lauwerier, Fractals : Endlessly Repeated Geometrical Figures, Princeton Univercity Press, 1991

[6] 배 영철, 카오스의 응용, 전자저널 1993. 1. 20 일자

[7] Leon O. Chua and Tao Lin, "Chaos in Digital Filters," *IEEE Transactions on circuits and Systems.* vol.35, no.6, pp648 658, 1988

[8] J. A. Gibson, "Pole-Zero Analysis and Synthesis of Discrete System Bifurcation," Chaos, Solitons and Fractals, Vol.2, No.6, pp651 660, 1992

[9] Fan Zou and Josef A. Nossek, "A Chaotic Attractor with Cellular Neural Networks," IEEE Transactions on circuits and Systems, vol.38, no.7, pp811 812, 1991

[10] M. J. Smith, "An Analog Integrated Neural Network Capable of Learning the Feigenbaum Logistic Map," *IEEE Transactions on circuits and Systems,* vol.37, no.6, pp841 ~ 844, 1990

[11] Alison A. Dingle, John H. Andreae and Richard D. Jones, "A Chaotic Neural Unit," *Proc. of IEEE* Conf. on Neural Networks, San Francisco, March 28 April 1, 1993

[12] Briand D. O. Anderson, "Adaptive Systems, Lack of Persistency of Excitation and Bursting Phenomena," Automatica, vol.21, no.3, pp247 ~ 258, 1985

[13] M. D. Espana, "Intermittent Phenemena in Adaptive Systems: A Case Study," Automatica, vol.27, no.4, pp717 720, 1991

[14] Iven M. Y. Mareels and Robert R. Bitmead, "Nonlinear Dynamics in Adaptive Control: Chaotic and Periodic Stabilization," Automatica, vol.22, no. 6, pp641 655, 1986

[15] Iven M. Y. Mareels and Robert R. Bitmead, "Nonlinear Dynamics in Adaptive Control : Periodic and Chaotic Stabilization — .Analysis ," Automatica, Vol.24, No.4, pp485 497, 1988

[16] Melinda P. Golden and B. Erik Ydtie, "Small Amplitude Chaos and Ergocity in Adaptive Control," Automatica, vol. 28, no.1, pp11 ~ 25, 1992

筆 者 紹 介

李 柱 張
1948年 11月 14日生
1973年 서울대학교 공과대학 전기공학과 (공학사)
1977年 서울대학교 대학원 전기공학과 (공학석사)
1984年 미국 Univ. of Wisconsin 전기공학과 (공학박사)

1977年 ~ 1978年 한국전기기기 시험연구소 연구원
1978年 ~ 1980年 미국 GTE Automatic Electric Co. (Processing Engineer)
1983年 미국 Wisconsin Electric Power Co. (Project Engineer)
1987年 영국 Imperial 대학 Robotic Lab. (Visiting Professor)
1991年 ~ 1992年 미국 Carnegie-Mellon대학 Robotics Institute (Visiting Scientist)
1984年 9月 ~ 현재 한국과학기술원 전기및전자공학과 부교수

주관심분야 : Control of Flexible Manipulators, High Level Control of Space Robot, Intelligent Control of Autonomous Land Vehicle System, Variable Structure Control, Chaos Theory in Control System