自己回歸 模型에 대한 Kalman Filter 適用에 관한 研究

-A Study on the Kalman Filter ; AR Model-

辛 容 伯*
尹 尙 元**
尹 錫 煥***
邊 華 星***

ABSTRACT

Box-Jenkins models have some important limitations to the procedure : (a) They require a great deal of time, efforts and expertise for the model identification. (b) They require an extensive amount of past observations to identify an acceptable model. (c) The model selected is a constant model in time. Therefore, the Kalman Filter is recommended as a technique to overcome the three problems mentioned above.

The research reported here uses the Kalman Filter algorithm to propose Kalman-AR(p) model. The data analysis shows that the Kalman-AR(p) model proposed can be used to resolve the problems of Box-Jenkins AR(p)model. It is seen that the Kalman Filter has great potentials for real-time industrial applications.

1. 序 論

1-1 研究의 目的

칼만필터는 랜덤변수에 관한 데이터 프로세싱(Data processing)이 1800년 가우스(Gauss)에 의해 시작되어 發展을 계속한 이후 1900년대 초에 칼만의 研究에 의해 時間領域을 基準으로하여 만들어진 최적 반복필터 方式이며 디지탈 컴퓨터에 사용하기에 적합하다[4][5]. 또한 칼만필터의 基本役割은 시스템의 현재 狀態에 관한 추정값들을 豫測하거나 지난 시간의 수치값들을 정확히 수정하는데 쓰이며, 특히 기존 Box-Jenkins 模型이 선형필터의 가중치 추정방법으로 최우추정법, 최소제곱법, 조건부 최소제곱부 등으로 추정되고 초기치의 자료로서 최소한 50개 이상의 基礎資料를 필요로하며 段階別 專門家의 決定이 要求된다. 또한 많은 時間과 努力이 所要되는 問題點을 포함하는 靜的模型이라 할 수 있다[2][3].

반면에 칼만필터는 칼만게인을 통해 反復的으로 誤差를 수정해주는 動的模型으로서 算出方式이 간단하며 빠른 特徵을 갖고 있다.

이런 관점에서 旣存研究로서, 지수평활모형 수행을 위해 칼만필터 적용[8], 기계파손 모니터(monitor)를 위해 27개의 모수를 갖는 AR모형에 칼만필터의 사용 [12], Adaptive AR모형 개발[13][14], 칼만필터를 이용한 ARIMA모형 개발[9], 재고추정[6] 등이 있다.

정확한 추정은 그 시스템의 效率性 및 미래의 意思決定에 有用하게 사용되는바 칼만필터를 통하여 시스템의 狀態를 정확히 추정하는것은 아주 중요한 意味를 갖게된다. 따라서 本 研究에서는 Box-Jenkins의 모형중 AR모형에 焦點을 두고 칼만필터를 응용한 AR모형을 제안하여 각각의 모형에 數値分析 및 比較를 통해 시스템 향상을 위한 각 모형의 效率性을 評價했다.

---

* 亞洲大學校 產業工學科 敎授
** 亞洲大學校 大學院 產業工學科
*** 韓國電子通信研究所 先任研究員

접수 : 1993년 9월 15일
확정 : 1993년 9월 27일

1-2 硏究의 方法 및 範圍

기존의 정적 AR모형 및 問題點을 改善하기위해 칼만필터를 適用하는 方法으로 AR모형이 충분한 Data (적어도 50개 이상)를 요구하는 것과는 달리 칼만필터의 초기 추정값으로 최악인 0 (no data)로 추정될수 있지만[3][4], 本 硏究의 數値例題는 처음 8개 데이터를 초기 추정치로 하여, 컴퓨터를 이용한 칼만게인, 예측치, 잔차를 分析하고 모형간의 效率性을 評價했다. 또한 Box-Jenkins 모형중에서 AR(1), AR(2) 모형에 국한해 칼만필터를 適用 硏究 되었으며, 전체 구성도를 보면 1장은 序論, 2장은 칼만필터 紹介, 3장은 AR(P) 모형, 칼만-AR(1) 모형, 칼만-AR(2) 모형을 제안했다. 마지막으로 4장, 5장에서는 모형의 數値分析 및 評價를 통해 結論을 맺었다.

2. 칼만필터

칼만 필터는 반복적인 최적 추정기(recursive optimal estimator)로 수행시간이 비교적 짧고 信號 대 雜音比(Signal Noise Ratio)를 향상시키는 特性을 가지고있다[10]. 칼만필터 방법은 雜音이 섞인 入力 데이터를 반복하여 처리하기 때문에 온-라인(On-Line) 디지탈 처리에 적절하며 또한 칼만필터를 모델링 하기 위해서는 초기조건에 대한 情報, 시스템이나 센서로부터 들어가는 雜音을 定義하기위한 시스템과 측정잡음모델, 시스템의 동적상태에 대한 모델링 등이 필요하다.

필터는 1 사이클 전에 저장된 데이터에 의해 계산되는 신호의 초기 추정치와 오차의 공분산(error covariance)을 가지고 시작하여, 실시간으로 얻을수 있는 각 測定値를 이용하여 필터의 이전추정치를 새 추정치로 교체한다.

온-라인으로 측정된 각 새로운 샘플 데이터는 칼만필터의 추정치를 改善시키는데 사용된다. 이러한 과정은 시스템이 관측가능한 상태에서 초기추정치를 더 이상의 향상이 불가능한 정상상태(Steady-State)에 도달할때까지, 새로운 측정데이터를 이용하여 개선된다. 칼만 필터의 應用에서 추정되어지는 信號過程의 數學的 모델은 식(1)(2)와 같이 표시된다[4][5][11].

$$X(t+1)=F(t)X(t)+W(t) \quad \text{------------} \quad (1)$$

$$Y(t)=H(t)X(t)+V(t) \quad \text{------------} \quad (2)$$

여기서 두개의 잡음벡터 $W(t)$, $V(t)$에 대한 공분산행렬(Covariance Matrix)은 식(3)(4)(5)로 주어지고

$$E[W(t)W^T(J)]=\begin{cases} Q_t, & J=t \\ 0, & J\neq t \end{cases}, \quad E[W(t)]=0 \quad \text{------------} \quad (3)$$

$$E[V(t)\,V^T(J)]=\begin{cases} R_t, & J=t \\ 0, & J\neq t \end{cases}, \quad E[V(t)]=0 \quad \text{------------} \quad (4)$$

$$E[W(t)\,V^T(J)]=0 \quad \text{------------} \quad (5)$$

그 알고리즘은 다음과 같다[4][5].

* 필터게인 :

$$K(t)=P_1(t)H(t)^T[H(t)P_1(t)H^T(t)+R(t)]^{-1} \quad \text{------------} \quad (6)$$

단, $P_1(t)=F(t)P(t-1)F(t)^T+Q(t-1)$

* 추정기 :

$$\hat{X}(t)=F(t)\hat{X}(t-1)+K(t)[Y(t)-H(t)F(t)\hat{X}(t-1)] \quad \text{------------} \quad (7)$$

* 오차공분산행렬 :

$$P(t)=[I-K(t)H(t)]P_1(t) \quad \text{------------} \quad (8)$$

3. 칼만-AR(p)模型

3-1 AR(p)模型

시계열의 현재값은 현재 관측값을 說明해주는 시계열의 이전 값들과 說明해주지 못하는 부분 ε_t의 線形結合式인 AR모형을 (9)식과 계산의 便利를 위해 평균치로부터의 편차항 즉 $Y_t = Z_t - \mu$ 를 고려해주는 (10)식으로 표현된다.

$$Z_t = \xi + \varphi_1 Z_{t-1} + \varphi_2 Z_{t-2} + \cdots + \varphi_p Z_{t-p} + \varepsilon_t \quad \text{------------------} \quad (9)$$

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \cdots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \quad \text{------------------} \quad (10)$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

여기서 식(9), (10)로 표현되는 AR(p)모형이 시계열에 적합하고, P, φ_1, $\varphi_2 \cdots \varphi_p$의 값이 어느정도 信賴할 수 있는 추정치라면 問題가 없지만 그렇지 못할 경우 實際 適用에 있어서 問題點이 提起된다.

파라메터를 추정하기 위한 기존방법[1][2][4] 으로는 理論的 자기상관 ρ대신 이것의 추정값인 r을 대입시켜 $\hat{\varphi}_{KK}$를 구하는 방법, 반복계산식을 이용한 $\hat{\varphi}_{KK}$ 를 구하는 방법, φ_p를 추정하기 위해 Marguardt 비선형 알고리즘을 이용한 방법등이 있으나 資料貯藏容量이 最小化될 수 있고, 算出方式이 간단하고 빠르며 豫測모형이 평균제곱오차(MSE:Mean Square error)를 最小化 하도록 考案된 칼만필터를 적용한 AR(p)과정의 중요한 칼만-AR(1), 칼만-AR(2)모형을 提示했다.

3-2 칼만-AR(1)模型

AR(1)모형의 一般式

$$y(t) = \varphi_1 y(t-1) + \varepsilon(t) \quad \text{------------------} \quad (11)$$

에서 N개의 觀測值 $\{ y(t) \ ; \ t=1,1,\cdots,N\}$ 가 주어졌을때, φ_1, $\sigma^2 = E(\varepsilon(t))^2$, $V(\hat{\varphi}_1)$를 다음공식에 의해 근사추정치를 구할 수 있다[1][2].

$$\hat{\varphi}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{N-1} y(t) \cdot y(t+1)}{\sum_{t=1}^{N-1} y(t)^2} \quad \text{------------------} \quad (12)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=2}^{N} \{y(t) - \hat{\varphi}_1 y(t-1)\}^2}{N} \quad \text{------------------} \quad (13)$$

$$V(\hat{\varphi}_1) = \frac{[1-(\hat{\varphi}_1)^2]}{N} \quad \text{------------------} \quad (14)$$

(11)식을 정상성이라고 가정했을때 (칼만필터의 시스템 방정식 오차 $W(t)$가 생략[7][13]) 칼만필터 모형으로 고치면,

시스템 방정식 : $x(t) = x(t-1)$ ------------------ (15)

측정방정식 : $y(t) = y(t-1)x(t) + v(t)$ ------------------ (16)

$E[v(t)] = 0$, $E[v^2(k)] = \sigma_v^2$, $x(t) = \varphi(t)$ 와 같다. 따라서 $R = \hat{\sigma}_v^2$, $\hat{x}(0) = \hat{\varphi}(0)$

$P(0) = V(\hat{\varphi}_1) = \dfrac{[1-(\hat{\varphi}_1)^2]}{N}$ 이 된다.

식(15)(16)을 식(1)(2)와 비교했을때 $F(t) = 1$, $W(t) = 0$, $H(t) = y(t-1)$이 되므로 식(6)에 의해

$P_1(t)=P(t-1)$이 된다. 따라서

$$K(t)=\frac{y(t-1)P(t-1)}{y(t-1)^2P(t-1)+\sigma_v^2} \qquad (17)$$

$$\hat{X}(t)=\hat{X}(t-1)+K(t)[y(t)-y(t-1)\hat{X}(t-1)] \qquad (18)$$

$$P(t)=[1-K(t)y(t-1)]P(t-1) \qquad (19)$$

와 같이 된다.

(17)식을 (19)식에 代入하여 다시 整理하면

$$P(t)=\frac{P(t-1)}{1+\frac{y(t-1)^2P(t-1)}{\sigma_v^2}} \qquad (20)$$

이 되고 (20)식에서

$$P(1)=\frac{P(0)}{1+\frac{y(0)^2P(0)}{\sigma_v^2}}$$

$$P(2)=\frac{P(1)}{1+\frac{y(1)^2P(1)}{\sigma_v^2}}=\frac{P(0)}{1+\frac{2y(1)^2P(0)}{\sigma_v^2}}$$

$$\vdots$$

$$P(t)=\frac{P(0)}{1+\frac{t\,y(t-1)^2P(0)}{\sigma_v^2}} \qquad (21)$$

이 된다.

(20)식에서 $P(t-1)$에 대해 정리하여 (17)식에 대입하면,

$$K(t)=\frac{P(t)}{[1-y(t-1)^2]P(t)+\sigma_v^2} \qquad (22)$$

가 되고 (21)식을 (22)식에 대입하면

$$K(t)=\frac{P(0)}{\sigma_v^2+P(0)[1-y(t-1)^2+t\,y(t-1)^2]} \qquad (23)$$

이 유도된다. 따라서 (18)식은

$$\hat{X}(t)=\hat{X}(t-1)+\frac{P(0)}{\sigma_v^2+P(0)[1-y(t-1)^2+ty(t-1)^2]}[y(t)-y(t-1)\hat{X}(t-1)] \qquad (24)$$

이 성립한다.

3-3 칼만-AR(2)模型

AR(2) 모형

$$y(t)=\varphi_1 y(t-1)+\varphi_2 y(t-2)+\varepsilon(t) \qquad (25)$$

을 칼만필터 모형으로 고치면

시스템 방정식 : $X(t)=X(t-1)$ ---------- (26)

측정방정식 : $y(t) = H(t)X(t) + v(t)$ ---------------------------- (27)

$E[v(t)] = 0$, $E[v^2(k)] = \sigma_v^2$, $X(t) = [\varphi_1(t), \varphi_2(t)]^T$, $H(t) = [y(t-1), y(t-2)]$

와 같다. 이상의 조건에서 식(21)(23)(24)를 이용해서 풀면,

$$K(t) = \frac{P(0)}{\sigma_v^2 + P(0)[I - H(t)H^T(t) + t\,H(t)H^T(t)]} \quad \text{------------------} \quad (28)$$

$$\hat{X}(t) = \hat{X}(t-1) + \frac{P(0)}{\sigma_v^2 + P(0)[I - H(t)H^T(t) + t\,H(t)H^T(t)]}[y(t) - H(t)\hat{X}(t-1)]$$

-------------- (29)

$$P(t) \doteq \frac{P(0)}{I + \frac{KH(t)P(0)H^T(t)}{\sigma_v^2}} \quad \text{--------------------------------} \quad (30)$$

이 된다.

4. 模型의 數値分析 및 比較

一定期間 동안의 會社債의 利子率과 國債의 利子率과의 差異에 관한 자료[1] 159개의 데이터에서 $y(t) - u = \varphi_1(y(t-1) - u) + \varepsilon(t)$의 정적 AR(1)모형으로 設定되었고, 그때의 파라메터에 대한 최우추정값은 $\hat{\varphi}_1$ = 0.85, $\hat{u}$ = 0.97, $\hat{\sigma}^2$ = 0.02와 같다. 本 硏究에서는 칼만필터를 適用하기 위해 초기 추정값으로 처음 8개의 데이터를 사용하여, 유도된 칼만필터 알고리즘을 適用했으며, 分析된 結果는 Table.1와 같고, 칼만-AR(1)모형, AR(1)모형에 대한 豫測結果는 Table.2에 나와 있다.

Table.1 칼만-AR(1)과 AR(1)모형 數値分析結果

No.	칼만-AR(1) 모형				AR(1) 모형			
	AES	MAE	MARE	EC	AES	MAE	MARE	EC
25	2.240	0.132	0.217	0.888	2.730	0.109	0.150	0.914
50	5.610	0.134	0.195	0.900	5.250	0.105	0.129	0.907
75	9.940	0.148	0.181	0.902	8.720	0.116	0.128	0.901
100	13.100	0.142	0.175	0.900	11.500	0.115	0.137	0.896
125	16.800	0.144	0.171	0.911	14.500	0.116	0.128	0.899
159	23.300	0.154	0.162	0.905	18.900	0.119	0.132	0.892

Table.1의 AES(Absolute Error Sum), MAE(Mean Absolute Error), MARE(Mean Absolute Relation Error), EC(Equality Coefficient)는 예측 모형의 效率을 評價하기 위해 導入 되었다. 結果를 보면 159개 데이터로 부터 $\hat{u}$, $\hat{\varphi}_1$가 추정되어 χ^2 테스트결과 AR(1)모형으로 設定되었으며, 段階 數를 25, 50, 75, 100, 125, 159로 했을때 각각 EC(접근도,효율척도)가 91.4%, 90.7%, 90.1%, 89.6%, 89.9%, 89.2%로 나타난 반면, 칼만-AR(1)모형에서는 초기 추정치로서 8개 데이터로 부터 추정한 結果의 EC가 88.8%, 90.0%, 90.2%, 90.0%, 91.1%, 90.5%로 적은 데이터를 갖고도 159개 데이터에서 추정한 AR(1)모형과 동등한 效率性을 보여주고 있다.

한편 Table.2의 豫測結果는 159개 모든 데이터의 실측치, 관측치,칼만게인 잔차를 分析한 結果表로서, 특히 칼만-AR(1)모형의 칼만게인값이 27 段階 이후부터는 거의 0.80E+00의 값으로 一定해지는 도형의 정상성을 維持하고 있으며, 똑같은 159 段階에서 칼만-AR(1)모형이 AR(1)모형보다 1.3%높은 效

率性을 나타내주고 있는데, 두 모형간에 全般的인 效率性에는 問題가 없지만 적은 데이터로 빠른時間에 정확한 추정의 次元에서는 칼만-AR(1)모형이 效率性이 높다고 할 수 있다.

Table.2 豫測結果

N	관측치	칼만 - AR(1) 모형			AR(1) 모형	
		예측치	필터게인	잔 차	예측치	잔 차
1	0.660	0.905	0.000	-0.245	0.155	0.515
2	0.700	0.744	0.497	-0.044	0.712	-0.007
3	0.740	0.674	0.595	0.066	0.740	-0.000
4	0.630	0.687	0.681	-0.057	0.770	-0.145
5	0.700	0.603	0.692	0.097	0.682	0.019
6	0.660	0.658	0.736	0.002	0.746	-0.080
7	0.610	0.645	0.751	-0.035	0.716	-0.096
8	0.520	0.592	0.754	-0.072	0.660	-0.144
9	0.600	0.486	0.748	0.114	0.590	0.013
10	0.610	0.566	0.768	0.044	0.660	-0.045
11	0.700	0.612	0.780	0.088	0.664	0.036
12	0.110	0.733	0.798	0.367	0.742	0.360
13	1.170	1.280	0.864	-0.115	1.084	0.089
14	1.230	1.360	0.846	-0.128	1.140	0.090
15	0.850	1.350	0.822	-0.503	1.193	-0.341
16	0.780	0.823	0.760	-0.043	0.873	-0.088
17	0.710	0.626	0.752	0.084	0.812	-0.099
18	0.550	0.559	0.757	-0.009	0.755	-0.199
19	0.560	0.419	0.758	0.141	0.610	-0.053
20	0.740	0.451	0.765	0.289	0.623	0.118
21	0.800	0.721	0.782	0.079	0.772	0.025
22	0.750	0.863	0.790	-0.113	0.833	-0.076
23	0.740	0.804	0.786	-0.064	0.783	-0.043
24	0.790	0.756	0.784	0.034	0.777	0.016
25	0.780	0.801	0.786	-0.021	0.822	-0.037
26	1.000	0.794	0.787	0.206	0.814	0.192
27	1.050	1.060	0.800	-0.014	1.000	0.054
28	1.090	1.150	0.802	-0.062	1.040	0.052
29	1.050	1.170	0.800	-0.123	1.070	-0.022
30	0.750	1.090	0.794	-0.339	1.044	-0.288
·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·
140	1.270	1.070	0.804	0.201	1.020	0.249
141	1.200	1.390	0.806	-0.194	1.236	-0.025
142	1.100	1.310	0.805	-0.207	1.170	-0.066
143	0.930	1.110	0.803	-0.180	1.081	-0.150
144	1.000	0.849	0.802	0.151	0.942	0.064
145	1.040	0.927	0.803	0.113	1.000	0.044
146	1.100	1.030	0.804	0.069	1.031	0.071
147	1.100	1.130	0.804	-0.034	1.080	0.020
148	1.090	1.140	0.804	-0.049	1.080	0.010
149	1.050	1.110	0.804	-0.059	1.071	-0.022
150	0.700	1.040	0.804	-0.343	1.046	-0.338
151	0.880	0.585	0.802	0.295	0.743	0.140
152	0.810	0.782	0.803	0.028	0.894	-0.083
153	1.080	0.779	0.803	0.301	0.830	0.246
154	1.390	1.140	0.805	0.247	1.060	0.326
155	1.160	1.590	0.807	-0.425	1.331	-0.167
156	0.490	1.280	0.804	-0.789	1.130	-0.641
157	0.740	0.303	0.800	0.437	0.562	0.178
158	0.900	0.518	0.801	0.382	0.771	0.125
159	0.910	0.874	0.802	0.036	0.910	-0.000

5. 結 論

制御, 豫測의 目的을 위한 시계열모형은 시스템 分析에 있어 중요하다. 그러나 기존의 Box-Jenkins의 靜的 시계열모형이 갖고 있는 短點을 해결하기 위해, 靜的模型을 動的模型化 시켜주는 칼만필터 모형은 최소의 데이터로 정도 높은 추정을 提供해 주는 方法論이 되며, 結局 이러한 接近方法은 시스템의 效率性을 向上 시켜주는 動的豫測 모형이 된다.

따라서 本 硏究의 數値分析 및 比較 에서는 動的 칼만-AR(1) 모형이 적은 데이터(8개) 를 갖고도

충분한 데이터(159개)를 갖는 AR(1)모형과 같은 정도높은 效率性을 갖게됨을 立證하였다. 旣存의 產業工學 分野에서는 칼만필터가 在庫管理, 統計的 工程管理 등에 부분적인 應用이 되고 있지만, 추정을 要求하는 시스템은 모두 適用 가능하리라 判斷되고 本 硏究의 向後課題로 시계열모형을 따르는 生產 시스템에 實際 適用可能性이 있는 動的 adaptive모형 開發에 두었다.

參 考 文 獻

1. 김연형, *시계열분석과 예측*, 자유아카데미, 1990.
2. D.C. Mongomery, L.A. Johnson, and J.S. Gaddiner, ***Forcasting & Time Series Analsis***, McGraw Hill, 1990.
3. H. Joseph Newton, ***TIMESLAB***, Wadsworth & Brooks/Cole, 1988.
4. S.M. Bozic, ***Digital and Kalman Filtering***, Edward Arnold, 1979.
5. Sureshp. Sethi, and Gerald L. Thompson, ***Optimal Control Theory***, Martinus Nijhoff, 1981.
6. D.J. Downing, D.H. Pike, and G.W. Morrison, "Application of the Kalman Filter to Inventory Control," ***Technometrics***, Vol.22, No.1, pp.17-22, 1980.
7. J.R. English, M. Krishnamurthi, and T. Sastri, "Quality Monitoring of Continuous Flow Process," ***Computer Ind.Engng***, Vol.20, No.2, pp.251-260, 1991.
8. N.J. Kirkendall, "The Relationship between Certain Kalman Filter models and Exponential Smoothing Models," ***Robotics & Computer-Integrated Manufacturing***, 4(1), pp.89-107, 1984.
9. Patrica Sholl, and R. K. Wolfe, "The Kalman Filter as an Adaptive Forcasting procedure for use with Box-jenkis ARIMA Models," ***Comput & Indus.Engng***, Vol.9, No.3, pp.247-262, 1985.
10. P.K. Rajasekaran, N. Satyanarayana, and M.D. Srinnath, "Optimum Linear Estimation of Stochastic Signals in the presence of Multiplicative Noise," ***IEEE Transation on Aerospace and Electronic Systems***, Vol. AES-7, No.3, pp.462-468, 1971.
11. R.E. Kalman and R.S. Buky, "New Results in linear Filtering and Prediction Theory," ***J. Basic Engng***, Vol.83, pp.95-108, 1961.
12. Takata, S., M. Ogawa, P. Bertok, J. Ootsuka, K. Matushima, and T.sata, "Real-time Monitoring system of tool breakage using Kalman Filter," ***Robotics & Computer-Integrated Manufacturing***, 2(1), pp.33-40, 1985.
13. T. Sastri, "An Adaptive Autogressive Model," ***Comput & Indus.Engng***, Vol.9, pp.9-27, 1985.
14. T. Sastri, "A state space Modeling Approach for Time series Forcasting," ***Management Science***, Vol.31, No.11, pp.1451-1470, 1985.