

칼만필터를 적용한 Adaptive EWMA 관리도 - Adaptive Exponentially Weighted Moving Average Control Chart Using a Kalman Filter -

김 양 호*
정 윤 성*
김 광 섭**

ABSTRACT

In this paper, two adaptive exponentially weighted moving average control chart schemes which available for real-time are proposed. The weighting coefficient is estimated using a recursive kalman filter algorithm. Simulated average run lengths indicate the proposed schemes are sensitive to process shifts. And their performance is comparable to CUSUM control chart and customary EWMA control chart.

I. 서 론

1. 연구의 목적 및 배경

최근 FMS와 CIM 등의 도입에 따른 제조 공정시스템 환경의 변화는 통계적 공정관리(SPC : Statistical Process Control) 분야에 많은 변화물 초래하였고, 이는 다음과 같다.[9]

첫째, 자료의 수집이 과거의 표본검사(sampling inspection)에 의존하던 것이 자동검사장치를 이용한 전수검사로 바뀌고 있다.

둘째, 컴퓨터를 이용한 관리를 하게 됨으로써 공정관리의 온라인(On-Line)화, 실시간(Real-Time)화가 되고 있다.

셋째, 공정관리가 사후관리가 아닌 예방관리 즉, 공정이 이상상태(out-of-control)에 도달하기 전에 미리 조치를 취하는 것이 가능해지고 있다.

Roberts(1959)에 의해 제시된 EWMA와 Page(1954)에 의해 제시된 CUSUM은 이와 같은 상황에서 유용하게 사용될 수 있다. 하지만 이들은 공정의 파라미터(parameter)를 기지의 상수 값으로 간주하므로써 모형이 잘못 설정되었을 경우 상당히 많은 오보(false-alarm)를 발생하게 된다.

그리고 공정의 변화를 보다 신속하게 감지하여 조치를 수행하기 위해 관리도에서 실시간화가 필요하게 되었다. 하지만, 기존의 관리도 구조로는 이와 같은 상황에 효과적으로 적용할 수가 없었다.

본 논문의 목적은 동적인 공정의 불확실한 파라미터와 모형의 오차에도 불구하고 공정의 변화를 보다 빠르고 정확하게 감지할 수 있고 온라인화 또는 실시간화가 가능한 관리도를 칼만필터를 이용하여 설계하고 이를 통해 공정의 이상유무를 감지하여 공정을 효과적으로 관리할 수 있도록 하는 것이다.

2. 연구의 내용

본 논문에서는 공정에서 얻어진 자료가 상호독립(independent)인 경우 Crowder(1986, 1989) Kirkendall(1989) 그리고 Hubele & Chang(1990) 등에 의해 제공된 칼만필터와 EWMA와의 관계를 이용하여 전수검사 즉, $n=1$ 인 경우에서 사용될 수 있는 adaptive EWMA관리도를 설계한다.

관리도의 설계에서는 Crowder(1986,1991)의 관측치를 이용한 반복적인 칼만필터 알고리즘(algorithm)을 사용하여 관리도에 필요한 통계량(statistic) 즉, 현재의 공정평균과 분산을 구하여 관리한계(control limit)를 계산하여 관리도를 작성하고 관리도의 운용방법을 제시한다. 그리고 작성된 관리도를 통해 공정을 해석할 수 있는 기준을 마련하고 CUSUM관리도 그리고 일반적인 EWMA관리도($0.1 \leq \alpha \leq 0.3$)들과 비교분석을 수행한다.

관리도의 비교분석을 위하여 본 논문에서는 평균 런의 길이(Average Run Length:ARL)로써 관리도의 수행도를 평가하며 이 값은 컴퓨터 시뮬레이션(Simulation)을 사용하여 구한다.

* 아주대학교 대학원 산업공학과

** 아주대학교 산업공학과 교수

접수 : 1993년 10월 22일

확정 : 1993년 10월 29일

II. 칼만필터(Kalman Filter)의 이론적 배경

1. 칼만모형과 특징

칼만필터(Kalman filter)는 1960년 칼만(Kalman)에 의해 제기되어 제어공학과 물리학 그리고 경제학에서 유용하게 사용되기 시작하였고, 적용의 유용성에 기인하여 통계분야를 비롯한 많은 분야에서 점진적으로 사용하기 시작하였다.

칼만필터의 유용성은 다음과 같다.

첫째, 확률과정의 정상성을 가정한다.

둘째, 문제의 설정이 일반적이다. 즉, 시스템의 모든 상태를 관측할 수 없는 경우에도 적용할 수 있다.

셋째, 과거의 자료를 기억할 필요가 없고, 축차계산에 의해 최적해가 구해지고 특히 온라인 계산에 효과적이다.

이와 같은 칼만모형은 행렬방정식(Matrix equation)을 이용하여 다음과 같이 관측방정식(Observation/measurement equation)과 상태방정식(State/system equation)으로 나누어 표현할 수 있다.

$$\text{관측방정식 : } Y_t = H_t X_t + v_t$$

$$\text{상태방정식 : } X_t = \Phi_t X_{t-1} + G_t \omega_t$$

여기서

$$\begin{aligned} Y_t &= \text{시점 } t \text{에서의 관측치 (} m \text{차 벡터)} \\ X_t &= \text{시점 } t \text{에서의 상태변수 (} n \text{차 벡터)} \\ \Phi_t &= \text{시점 } t \text{에서의 상태전이행렬} \\ G_t, H_t &= \text{시점 } t \text{에서의 알고 있는 행렬} \\ v_t &\sim N(0, R_t) \text{의 white-noise} \\ \omega_t &\sim N(0, Q_t) \text{의 white-noise} \end{aligned}$$

이고 v_t 와 ω_t 는 상호 독립이라고 가정한다.

2. 칼만필터(Kalman filter)

칼만필터에서 상태벡터의 최우추정치는 시점 t 까지 관측된 시계열이 주어진 조건에서 상태의 조건부 평균 즉, $\hat{x}_t(+)=E\{x_t|y_t, y_{t-1}, \dots\}$ 이 되고, 시점 t 에서 상태의 사전예측치 $\hat{x}_t(-)=E\{x_t|y_{t-1}, y_{t-2}, \dots\}$ 와 관측치 y_t 를 이용하여 개선된 추정치(updated estimate) $\hat{x}_t(+)$ 를 구할 수 있다.

칼만필터는 다음의 방정식들에 의해 구성된다.[4]

개선된 추정치 :

$$\hat{x}_t(+)=\hat{x}_t(-)+K_t[y_t-H_t\hat{x}_t(-)],$$

$$\text{여기서, } \hat{x}_t(-)=\Phi_t\hat{x}_{t-1}(+)$$

예측오차 :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_t(+)&=x_t-\hat{x}_t(+). \\ &=[I-K_tH_t]\tilde{x}_t(-)-K_tv_t. \end{aligned} \tag{2.5}$$

칼만게인(칼만필터 게인) :

$$K_t=\frac{P_t(-)H_t}{H_tP_t(-)H_t^T+R_t} \tag{2.6}$$

$$\text{여기서, } P_t(-)=\Phi_tP_{t-1}(+)\Phi_t^T+G_tQ_tG_t^T$$

오차공분산 행렬 :

$$\begin{aligned} P_t(+)&=P_t(-)-K_tH_tP_t(-) \\ &=[I-K_tH_t]P_t(-) \end{aligned} \tag{2.8}$$

이와 같은 방정식을 사용하는 칼만필터의 반복적인 과정은 다음과 같은 단계에 의해 수행되며 <그림 1>과 <그림 2>는 이를 요약 설명하고 있다.

단계 0 : 시점 0에서의 $x(-)$ 와 $P(-)$ 를 입력한다.

단계 1 : 칼만게인 K_t 을 식 (2.6)에 의해 구한다.

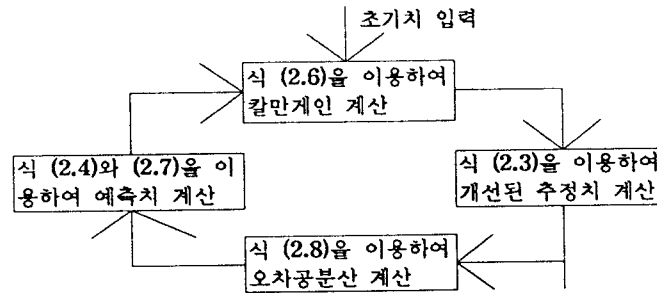
단계 2 : 칼만게인과 관측치 y_t 를 식 (2.3)에 적용하여 개선된 추정치 $\hat{x}_t(+)$ 를 구한다.

단계 3 : 개선된 추정치에 대한 오차 공분산 $P_t(+)$ 를 식 (2.8)을 이용하여 구한다.

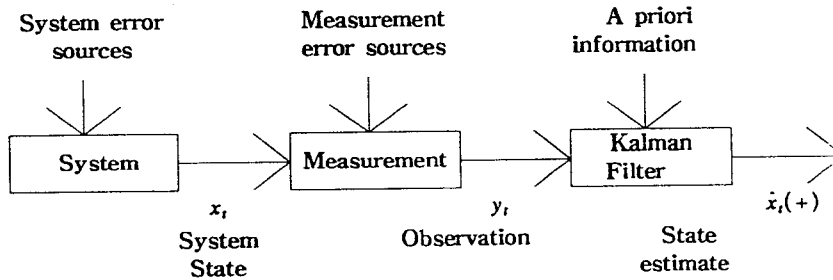
단계 4 : 시점을 변화시킨다. ($t=t+1$)

단계 5 : 단계 3에서 얻어진 개선된 추정치와 오차 공분산을 각각 식 (2.4)와 식 (2.7)에 적용하여 $\hat{x}_t(-)$ 와 $P_t(-)$ 를 구한다.

단계 6 : 단계 1로 되돌아 간다.



<그림 1> 칼만필터의 반복적인 계산과정



<그림 2> 칼만필터의 블럭 다이어그램

III. 칼만필터를 적용한 Adaptive EWMA관리도의 개발

1. 칼만필터와 EWMA와의 관계

EWMA통계량은 예측오차 ϵ_t 와 예측치 \hat{y}_t 에 의해서 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \hat{y}_{t+1} &= \hat{y}_t + \alpha \epsilon_t \\ &= \hat{y}_t + \alpha (y_t - \hat{y}_t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

여기서

$$\begin{aligned} \hat{y}_{t+1} &= \text{시점 } t+1 \text{의 예측치} \\ y_t &= \text{시점 } t \text{에서의 관측치} \\ \hat{y}_t &= \text{시점 } t \text{의 예측치} \\ \epsilon_t &= y_t - \hat{y}_t = \text{시점 } t \text{에서의 예측오차} \\ \alpha &= \text{평활계수 } (0 < \alpha < 1) \end{aligned}$$

이다.

위의 식 (3.1)은 다음과 같이 일반적으로 정리하여 표시하게 된다.

$$\hat{y}_{t+1} = (1 - \alpha)\hat{y}_t + \alpha y_t$$

이와 같은 EWMA는 마지막 관측치와 예측치와의 가중평균(Weighted Average)로 구성된다 것을 알 수 있다. 평활계수 α 는 큰 공정의 변화에 관심이 있거나 공정이 불안정할일 경우에는 큰 값을 그리고 작은 공정의 변화에 관심이 있거나 공정이 장시간 안정적인 경우에는 작은 값을 일반적으로 사용한다. 본 연구에서는 후자에 관심이 있으므로 0.1과 0.3사이의 값을 사용한다. 그리고 EWMA의 분산은 y_t 들의 분산이 σ^2 을 따르면

$$V(EWMA) = \sigma^2 \left(\frac{\alpha}{2 - \alpha} \right) [1 - (1-t)^2] \quad (3.3)$$

이고, t 가 증가함에 따라 EWMA의 분산은 다음값으로 수렴하게 된다.

$$V(EWMA) = \left(\frac{\alpha}{2 - \alpha} \right) \sigma^2 \quad (3.4)$$

따라서 시점 t 가 어느 수준이상 커지면 EWMA관리도는 다음과 같이 설계된다.

$$\begin{aligned} UCL &= \bar{x} + 3\sigma \sqrt{\frac{\alpha}{2 - \alpha}} \\ CL &= \bar{x} \\ LCL &= \bar{x} - 3\sigma \sqrt{\frac{\alpha}{2 - \alpha}} \end{aligned}$$

EWMA관리도가 Shewhart관리도와 같이 3σ 관리한계선을 사용하고 EWMA값 즉, y_{i-1} 들을 관리도에 타점(plot)을 수행하며, 이때 y_{i-1} 가 관리한계선 밖에 표시되면 관측치 y_i 의 평균이 변화한 것으로 간주되어 공정에 이상이 있다고 판정할 수 있다.

관측치가 표본검사가 아닌 전수검사에 의해 개별적(individual)으로 수집되는 경우, 앞장에서 설명한 칼만필터는 벡터공간(vector space)에서 스칼라공간(scalar space)으로 변화되며, 다음과 같이 표시된다.

상태방정식:

$$\begin{aligned} x_i &= \varphi x_{i-1} + \omega_i \\ \text{여기서, } \varphi &\text{는 기지의 상수} \\ \omega_i &\sim N(0, Q_i) \end{aligned}$$

관측방정식:

$$\begin{aligned} y_i &= Hx_i + v_i \\ \text{여기서, } H &\text{는 기지의 상수} \\ v_i &\sim N(0, R_i) \end{aligned}$$

그리고 개선된 추정치는 식 (2.3)에 $\hat{x}_i(-)$ 를 $\varphi \hat{x}_{i-1}(+)$ 로 치환하면

$$\begin{aligned} \hat{x}_i(+) &= \varphi \hat{x}_{i-1}(+) + K_i [y_i - H\varphi \hat{x}_{i-1}(+)] \\ &= [1 - K_i H] \varphi \hat{x}_{i-1}(+) + K_i y_i \end{aligned} \quad (3.7)$$

이 된다.

여기서 식 (3.5)과 (3.6)의 φ 과 H 를 1로 설정하면 식 (3.7)는 식 (3.2)의 EWMA모형과 같은 형식이 된다. 즉,

$$y_{i-1} = \hat{x}_i(+) \quad \text{그리고} \quad \hat{y}_i = x_{i-1}(+)$$

로 치환하면 식 (3.6)는

$$y_{i-1} = (1 - \alpha_i) \hat{y}_i + \alpha_i y_i$$

가 된다.

여기서 $\alpha_i = K_i$ 이다.

따라서 식 (3.2)에 평활계수는 식 (3.6)에서 칼만계수와 동일하며 시간에 따라 변화하게 된다는 것을 알 수 있으며, 이 결과 이 모형은 adaptive EWMA모형이 된다.

2. 파라미터의 추정

ω_i 와 v_i 의 분산 Q_i 와 R_i 의 값을 모르는 경우 분산의 추정치 $s^2_{Q_i}$ 와 $s^2_{R_i}$ 는 다음과 같은 최우 추정법(Maximum Likelihood Approach)을 사용하여 구할 수 있다.

$s^2(\hat{x}_i(-))$ 를 $\hat{x}_i(-)$ 의 분산 추정치, $s^2(\hat{x}_{i-1}(+))$ 를 $\hat{x}_{i-1}(+)$ 의 분산 추정치 그리고 y_i 를 시점 t 에서 공정으로부터 관측된 관측치로 상호독립(Independently and Identically Distributed: IID)이라고 가정한다. 그리고 $s^2_{Q_i}$ 와 $s^2_{R_i}$ 를 추정하기 위해 다음과 같은 항목을 도입한다.

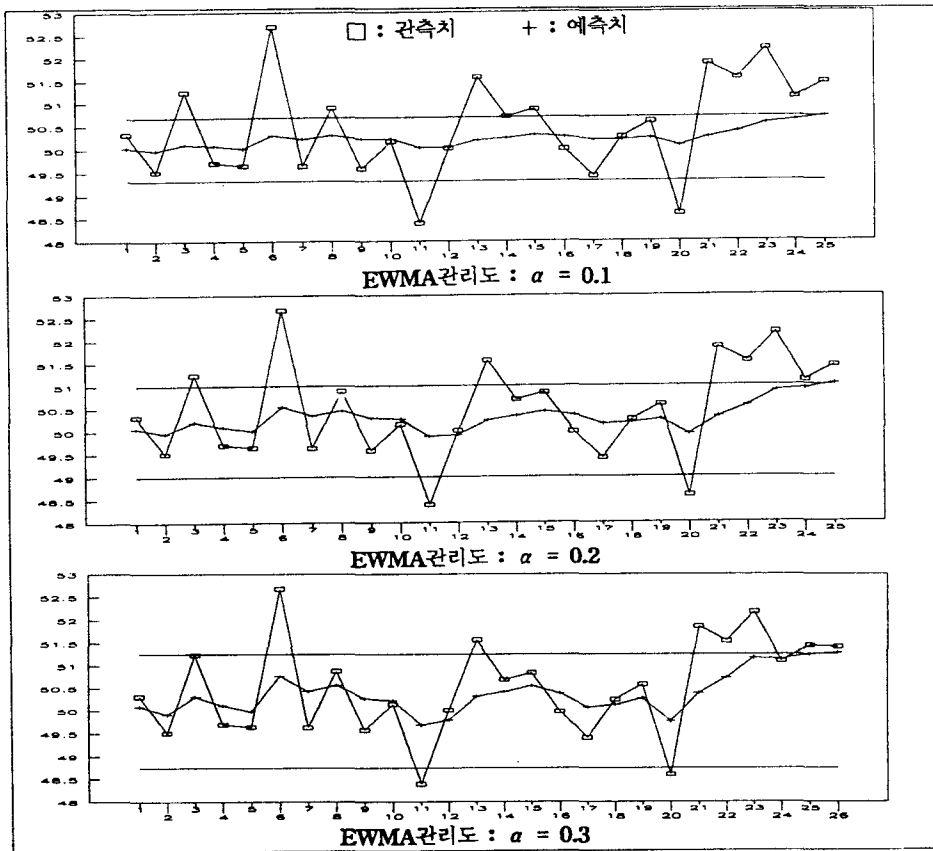
$$\begin{aligned} z_i &= y_i - y_{i-1} \\ d_i &= \sum_{i=0}^t (y_i - \bar{y}_i)^2 \\ \hat{d}_{i-1} &= \sum_{i=0}^{t-1} (y_i - \bar{y}_{i-1})^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

여기서

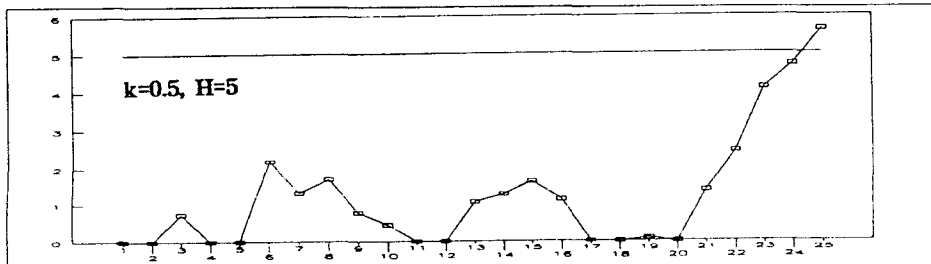
<표 1> 수행도 비교를 위한 자료

time	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
data	50.33	49.51	51.24	49.70	49.64	52.67	49.63	50.89	50.16	48.39
time	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
data	48.39	50.02	51.56	50.70	50.85	49.99	49.41	50.26	50.59	48.59
time	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
data	51.86	51.53	52.18	51.11	51.44	51.41	50.48	51.09	51.72	50.22

일반적인 EWMA관리도의 <그림 3>은 25번째 또는 26번째 관측치에서 그리고 CUSUM관리도의 <그림 4>는 25번째 관측치에서 각각 공정의 이동을 검출하고 있다.

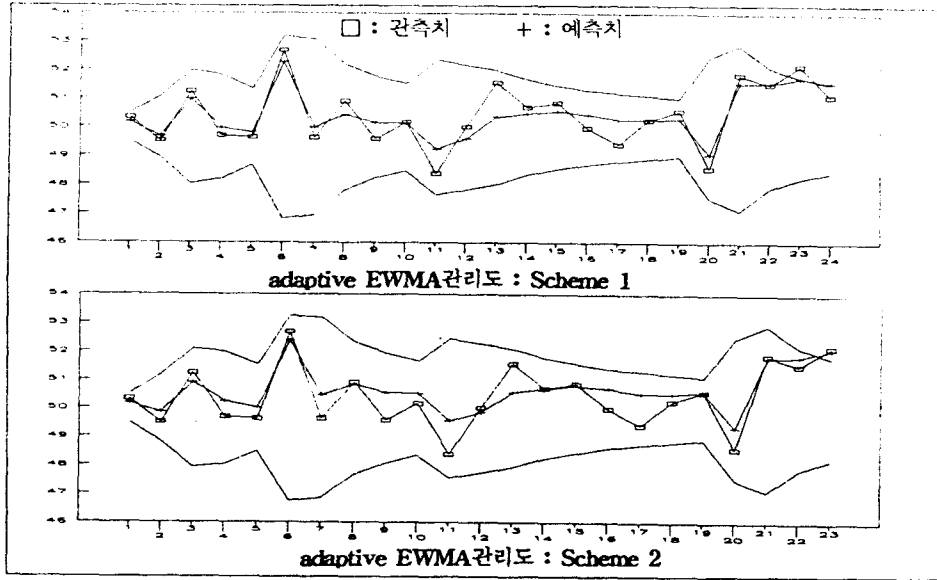


<그림 3> 일반적인 EWMA관리도



<그림 4> CUSUM관리도

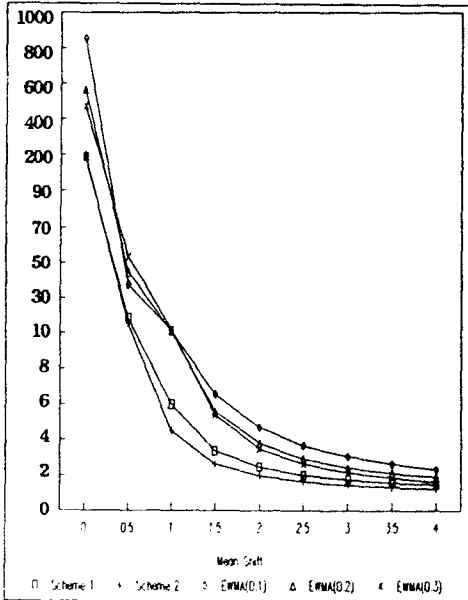
<그림 5>는 본 논문에서 제안된 관리도를 사용한 것으로 *scheme 1*은 24번째 관측치에서 *scheme 2*는 23번째 관측치에서는 공정평균의 이동을 검출하고 있다.



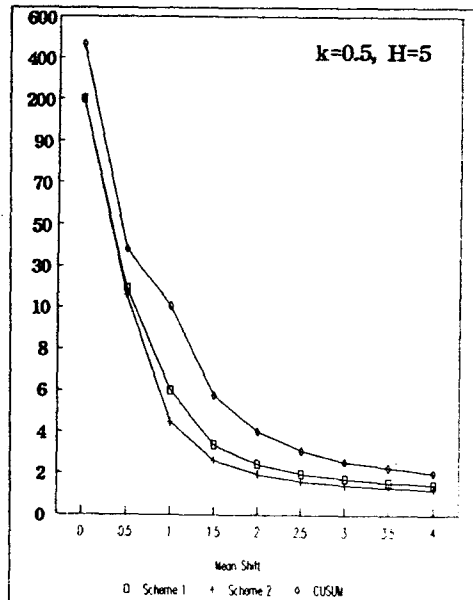
<그림 5> adaptive EWMA관리도

<표 2> adaptive EWMA관리도의 ARL

공정이동	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
Scheme 1	198.02	18.75	6.01	3.37	2.45	1.98	1.75	1.55	1.45
Scheme 2	199.39	15.51	4.50	2.63	1.95	1.62	1.42	1.30	1.22



<그림 6> EWMA관리도와 수행도 비교



<그림 7> CUSUM관리도와 수행도 비교

이 적용사례를 통해 일반적인 EWMA관리도와 CUSUM관리도보다 본 논문에서 제안된 adaptive EWMA관리도가 작은 공정평균의 변화를 보다 빨리 검출한다는 것을 알 수 있다.

그리고 제안된 adaptive EWMA관리도의 수행도 즉 ARL은 10,000회의 컴퓨터 시뮬레이션에 의해 구하였으며, 그 결과는 <표 2>에 제시되어 있다.

일반적인 EWMA관리도와 수행도를 비교한 <그림 6>과 CUSUM관리도와 수행도를 비교한 <그림 7>에서 우리는 제안된 두가지의 adaptive EWMA관리도가 기존의 EWMA관리도 또는 CUSUM관리도보다 공정의 변화를 빠르게 감지하고, *scheme 2*의 수행도가 *scheme 1*보다 좋다는 것을 알 수 있다. 그러나 공정이동의 정도(z)가 점차로 증가함에 따라 관리도간의 수행도 차이는 근소해지며 z 가 3~4인 경우 *scheme 1*, *scheme 2* 그리고 $\alpha=0.3$ 인 EWMA관리도는 근사한 ARL값을 갖게 됨을 알 수 있다.

하지만, 공정이 안정상태에 있는 경우 adaptive EWMA관리도의 수행도가 일반적인 EWMA관리도와 CUSUM관리도에 비해 좋지 않음을 알 수 있다.

V. 결 론

본 논문에서는 EWMA와 Kalman Filter와의 관계를 이용하여 전수검사에서 실시간으로 사용할 수 있는 adaptive EWMA관리도를 설계하였다. 그리고 adaptive EWMA관리도의 수행도 즉, ARL값을 작은 공정 평균의 변화의 검출능력이 뛰어난 일반적인 EWMA관리도 그리고 CUSUM관리도와 비교분석을 수행하였다.

그 결과 본 논문에서 제안된 adaptive EWMA관리도는 공정의 변화를 기존의 관리도에 비해 검출능력이 뛰어나 이를 빨리 감지한지만, 공정이 안정상태에 있는 경우는 빈번한 오보가 발생할 수 있다.

공정이 안정상태에 있음에도 불구하고 제1종 과오가 증가하는 것은 칼만필터에 사용되는 자료가 상호 독립적인 경우보다는 종속적인 경우에 보다 좋은 예측치를 제공하기 때문이다.

향후 연구과제로는 공정으로 얻어진 자료가 종속적인 경우에 사용할 수 있는 관리도를 본 논문에서 공정의 파라미터 추정에 사용한 반복적인 칼만필터 알고리즘을 사용하여 설계하는 것이다.

참 고 문 헌

- [1] Crowder, S.V., "An Application of Adaptive Kalman Filtering to Statistical Process Control," *Statistical Process Control in Automated Manufacturing*, pp.108-128, Marcel Dekker, 1989.
- [2] Crowder, S.V., "Kalman Filtering and Statistical Process Control," Unpublished Ph.D dissertation, Iowa State University Library, 1986.
- [3] Faltin, F.W. and Tucjer, W.T., "On-Line Quality Control for the Factory of the 1990's and Beyond," *Statistical Process Control in Manufacturing*, pp.331-354, Marcel Dekker, 1991.
- [4] Hubele, N.F. and Chang, S.L., "Adaptive Exponentially Weighted Moving Average Schemes Using a Kalman Filter," *IIE Transactions*, Vol.22, No.4, pp.361-369, 1990.
- [5] Hunter, J.S., "The Exponentially Weighted Moving Average," *Journal of Quality Technology*, Vol.18, No.4, pp.203-210, 1986.
- [6] Kalman, R.E., "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," *Journal of Basic Engineering*, Vol.82, pp.35-45, 1960.
- [7] Keats, J.B., "Process Control in Automated Manufacturing : Some Key Issues," *Statistical Process Control in Automated Manufacturing*, Marcel Dekker, pp.17-32, 1989.
- [8] Kirkendall, N.J., "The Relationship Between Certain Kalman Filter Models and Exponential Smoothing Models," *Statistical Process Control in Automated Manufacturing*, Marcel Dekker, pp.89-108, 1989.
- [9] Roberts, S.W., "Control Chart Tests Based on Geometric Moving Averages," *Technometrics*, Vol.20, No.1, pp.85-93, 1959.
- [10] Yourstone, S.A., "Real-Time Process Quality Control in a Computer Integrated Manufacturing Environment," *Statistical Process Control in Manufacturing*, Marcel Dekker, pp.91-110, 1991.
- [11] Montgomery, D.C., *Introduction to Statistical Process Control*, John Wiley & Sons, 1991.