누적 해저드지의 모수추정에 관한 연구
- 컴퓨터 프로그래밍 및 신뢰성공학에의 응용 -

A Study on the Parameter Estimation of the Cumulative Hazard Paper

嚴 泰元*

ABSTRACT

This paper studies the estimation of hazard parameters, which have a close relation with product reliability characteristics in reliability test.

Among the many kinds of estimation methods, hazard Probability Paper(HPP) is commonly used. The HPP is very convenient, but it has a great disadvantage in estimation accuracy by plotting method. It is very difficult to get the same results even if one use the same data several times.

A computer program for the regression method is used for the parameter estimation to reduce these errors.

Especially, the computer graphic program was written in GW-BASIC 3.22 language and a couple of running examples for user's reference appears in the appendix part.

I. 서 론

본 연구는 신뢰성 테스트시 해저드 확률지의 사용을 보다 효율적이고 간편하게 할 수 있도록 하기 위한 연구목적으로 수행되었으며 확률지 사용시 맹점으로 지적되고 있는 plotting한 점들을 직선 또는 곡선으로 fitting시키는 데 있어서의 개개인 및 작도상의 오차를 최대한으로 줄이기 위한 line fitting을 컴퓨터 프로그램으로 처리하였다. 또한 해저드 확률지에 의한 모수추정치와 컴퓨터 프로그램을 이용한 모수추정치의 효율을 비교, 검토하였다.

II. 이론적 고찰

1. 누적 해저드지의 원리[4]

고장밀도함수 f(t)는 단위시간당 전체의 몇 %가 고장이 났는가 하는 빈도를 나타내는 것으로 신뢰도를 R(t), 불신뢰도를 F(t)라 놓았을 때

$$f(t)=\frac{dF(t)}{dt}=\frac{-dR(t)}{dt} \qquad \text{.....................(1-1)}$$

---

* 柳韓專門大學 工業經營科 副敎授

접수 : 1993년 10월 26일
확정 : 1993년 11월 6일

$$R(t)=\int_{t}^{\infty}f(x)dx \qquad \text{....................(1-2)}$$

$$F(t)=1-R(t)=\int_{0}^{t}f(x)dx \qquad \text{....................(1-3)}$$

이며, 고장률 λ(t)는 다음과 같다.[1],[2],[3],[4],[5]

$$\lambda(t)=\frac{f(t)}{R(t)}=\frac{\frac{-dR(t)}{dt}}{R(t)} \qquad \text{....................(1-4)}$$

고장률함수 λ(t)를 시간 t까지 적분하면

$$\int_{o}^{t}\lambda(x)dx=-\ln\{1-F(x)\} \qquad \text{....................(1-5)}$$

이고, 이를 누적 해저드함수라고 한다. 즉,

$$H(t)=\int_{0}^{t}\lambda(x)dx \qquad \text{....................(1-6)}$$

한편 고장률과 신뢰도의 관계는 고장률을 시간으로 적분한 것으로서

$$R(t)=e^{-\int_{o}^{t}\lambda(x)dx}=e^{-H(t)} \qquad \text{....................(1-7)}$$

가 된다.

즉, 누적 해저드지는 시간 t와 고장분포함수 F(t)의 관계가 선형이 될 수 있도록 눈금이 매겨진 확률지라 할 수 있다.[4]

2. 와이블형 누적 해저드지의 구성[4],[5]

와이블분포는 다음과 같은 누적분포함수 F(t)및 확률밀도함수 f(t)를 갖는 분포이다.[5]

$$F(t)=1-R(t)=1-e^{\frac{-(t-\gamma)^{\beta}}{\alpha}}$$

$$f(t)=\frac{\beta(t-\gamma)^{\beta-1}}{\alpha}\cdot e^{\frac{-(t-\gamma)^{\beta}}{\alpha}} \qquad \text{....................(2-1)}$$

윗 식에는 모수가 3개 있고, 각 각 다음과 같이 정의된다.[5]

α : 척도의 모수 (scale parameter)

β : 형상의 모수 (shape parameter)

γ : 위치의 모수 (location parameter)

한편 특성수명 η는 와이블분포의 표현식으로 부터 $\eta=\alpha^{1/\beta}$ 이라 놓을수 있다.[5]

식 (1-7)에서 누적 해저드함수는

$$H(t)=\frac{t^{\beta}}{\alpha} \qquad \text{....................(2-2)}$$

로 표시된다.

식 (2-2)의 양변에 대수를 취하면

$$\ln H(t)=\beta\ln t-\ln\alpha \qquad \text{....................(2-3)}$$

가 되므로 양대수 모눈종이상에 타점하면 직선이 된다.[4]

3. 누적 해저드지의 모수 추정방법[4]

3.1 형상 모수 β값의 추정

확률지는 ln H(t)가 종축에 ln t가 횡축에 등간격 눈금으로 매겨져 있다. 즉 Y=ln H(t), X=ln t라 놓으면 식 (2-3)은

$$Y=\beta X-\ln\alpha \qquad \text{.....................(3-1)}$$

라 표시할 수 있다. 이 직선을 평행이동시켜 점(1,0)을 통과하는 직선을 새로 그으면, Y = β(X-1)이 된다. 이 식에서 X=0일때 Y=-β가 되므로 Y축상의 ln H(t)눈금을 끊는 값의 부호를 바꾸어 주면 바로 β값의 추정치가 된다.

3.2 척도 모수 α값의 추정

식 (3-1)에서 X=0이라 놓으면 Y=-ln α가 된다. -ln α를 α로 고치기 위해서는 횡축의 위의 눈금과 아래 눈금이 ln t와 t의 관계를 나타내고 있으므로 ln α의 값을 위에서 취하고 그점으로 부터 똑바로 내려와 t을 읽으면 이것이 바로 α값의 추정치가 된다.

3.3 위치 모수 γ값의 추정

γ값이 0이 아닐 때는 식 (1-7)로 부터

$$H(t)=\frac{(t-\gamma)^{\beta}}{\alpha} \qquad \text{.....................(3-2)}$$

가 된다. 즉 양대수 그래프의 양축에 t-γ 와 H(t)를 취하면 역시 직선의 관계를 유지한다. 그러나 식(3-2)에서 γ를 보정하지 않고 확률지상에 타점하면 완만한 곡선이 되며 이 곡선과 t축과의 교점의 값을 읽으면 이것이 바로 γ값의 추정치가 된다.

3.4 특성 수명 η값의 추정

식(3-1)에서 Y=0이라 놓으면 X=(ln α)/β가 된다. 즉, ln t =(ln α)/β가 된다. 그런데 $\eta=\alpha^{1/\beta}$로 부터 ln η = (ln α)/β가 되고 t=η가 됨을 알 수 있다. Y=0의 값은 ln H(t)=0일 때와 대응함으로 H(t)=1 즉, 확률지상의 H(t)=100%인 축과 교점에서 t축상의 값을 읽으면 이것이 바로 η값의 추정치가 된다.

3.5 확률지상의 타점 방법

식(1-6)의 누적 해저드함수는 실제로 H(t)를 추정하려면 그 때까지의 각 고장 발생 시점에서의 해저드값을 누적하여 다음과 같이 구한다.

$$H(t_j)=\sum_{i=1}^{j}\lambda_i(t_{i-1},t_j)\Delta t_i=\sum_{i=1}^{j}h_i \qquad \text{.....................(3-3)}$$

단, h_i : i번째의 해저드값

$$h(t_i)=\lambda(t_i)\Delta t_i \quad (i=1,2,\ldots,n) \qquad \text{.....................(3-4)}$$

여기서 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$,$t_0=0$ 이다. 즉,

$$h(t_i)=\frac{1}{n+1-i}=\frac{1}{K_i} \qquad \text{.....................(3-5)}$$

로 구해진다.

누적 해저드값은 해석하고자 하는 고장 모드의 데이터에 대해서만 해저드값을 구하고 누적한 것이다. 즉,

$$H_j(t_i)=\sum_{i=1}^{\infty}h(t_i) \qquad \text{.....................(3-6)}$$

를 구해서 확률지상에 $(t_i, H_j(t_i))$ 를 타점한다.

III. 컴퓨터 프로그램의 작성

본 연구에서 제시된 와이블형 누적 해저드지의 모수를 추정하는 프로그램의 내용은 대별해서 γ가 0일 경우, γ의 값이 주어졌을 경우, γ의 값까지도 추정해야 하는 경우로 나눌 수 있으며 추정기법으로서 최소자승법을 사용하였다. 즉, 추정 회귀식의 일반식을

$$Y_i=b_0+b_1x_1+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot+b_n x_i^n$$

이라 하면 오차자승의 합은

$$S=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-y_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(b_0+b_1x_1+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot+b_n x_i^n-y_i)^2$$

이 되고 이를 최소로 하기 위한 방정식의 해를 누적 해저드지상에서 γ=0인 경우에는 1차식까지, γ>0인 경우에는 2차식까지만 이용해도 충분하므로 위의 방정식을 2차식까지만 풀어서 Yi의 계수 b_0, b_1, b_2 를 구하여 프로그램을 작성하였다.

본 프로그램은 PC사용자들을 위해 작성하였기 때문에 초보자들도 쉽게 이용할 수 있도록 대화식 메뉴방식을 사용하였으며 γ를 추정할 경우에는 error(각 점들의 추정회귀곡선으로 부터의 편차 제곱의 합)가 가장 작은 두 γ값 사이에 정확한 γ값이 존재한다는 가정하에 시간 t=0에서 부터 처음으로 고장이 나는 시간 OX(1)까지를 잘게 나누어 각 각의 구간마다 γ값을 지정해 주고 regression을 이용해 error가 가장 작은 경우의 γ값을 추출한 후 이 γ값으로 부터 OX(1)까지를 또다시 세분해 유효숫자 자리 만큼 반복계산을 하도록 하였다.

IV. 결 론

프로그램 성능검토를 위해 식 (2-1)로 부터 추출한 인위적 데이터를 이용하여 Graphical method와 Computer method에 의해 모수들을 추정한 결과 다음과 같았다.

표 1. graphical method와 computer method의 결과치 비교

	γ = 0인 경우		γ값이 주어진 경우		γ값을 추정한 경우	
	Graphical	Computer	Graphical	Computer	Graphical	Computer
α	1506.41	1711.81	1845.99	1550.73	221.41	651.95
β	1.15	1.17	1.60	1.57	1.71	0.90
γ	0.00	0.00	170.00	170.00	700.00	1268.90
η	580.00	572.22	110.00	109.48	2000.00	1336.44

Graphical method에 의한 모수추정의 경우, γ가 0일 때와 γ의 값이 주어졌을 때에는 error가 비교적 작았으나 γ의 값까지도 추정해야 할 경우에는 데이터의 자릿수가 많은데에도 원인이 있겠으나 역시 γ를 추정하는 작도과정에서의 오차가 주원인이었다. 그러나 컴퓨터에 의한 결과는 정확하게 이론적인 수치를 얻을 수 있었다.

V. 적용예

-*-*- -*-*- -*-*- P R O B L E M 1 -*-*- -*-*- -*-*-

INPUT FAILURE TIME ;

40.00000	100.00000	110.00000	160.00000
190.00000	250.00000	290.00000	320.00000
350.00000	390.00000	420.00000	490.00000
590.00000	630.00000	730.00000	800.00000
940.00000	1060.00000	1260.00000	1770.00000

GAMMA IS ZERO.
ALPHA & BETA WILL BE ESTIMATED

-------------- P R E L I M I N A R Y W O R K --------------

N = 20 K = 0 L = 5 INOF = 0
h(i)=1/(N-i+1) X(i)=ln t-γ H(i)=Σ h(i)

i	t	h(i)	ln t-γ	ln H(i)
1	40.00000	0.05000	-0.91629	-2.99573
2	100.00000	0.05263	0.00000	-2.27661
3	110.00000	0.05556	0.09531	-1.84398
4	160.00000	0.05882	0.47000	-1.52781
5	190.00000	0.06250	0.64185	-1.27471
6	250.00000	0.06667	0.91629	-1.06080
7	290.00000	0.07143	1.06471	-0.87322
8	320.00000	0.07692	1.16315	-0.70415
9	350.00000	0.08333	1.25276	-0.54842
10	390.00000	0.09091	1.36098	-0.40231
11	420.00000	0.10000	1.43508	-0.26296
12	490.00000	0.11111	1.58924	-0.12797
13	590.00000	0.12500	1.77495	0.00487
14	630.00000	0.14286	1.84055	0.13779
15	730.00000	0.16667	1.98787	0.27339
16	800.00000	0.20000	2.07944	0.41502
17	940.00000	0.25000	2.24071	0.56781
18	1060.00000	0.33333	2.36085	0.74086
19	1260.00000	0.50000	2.53370	0.95464
20	1770.00000	1.00000	2.87356	1.28031

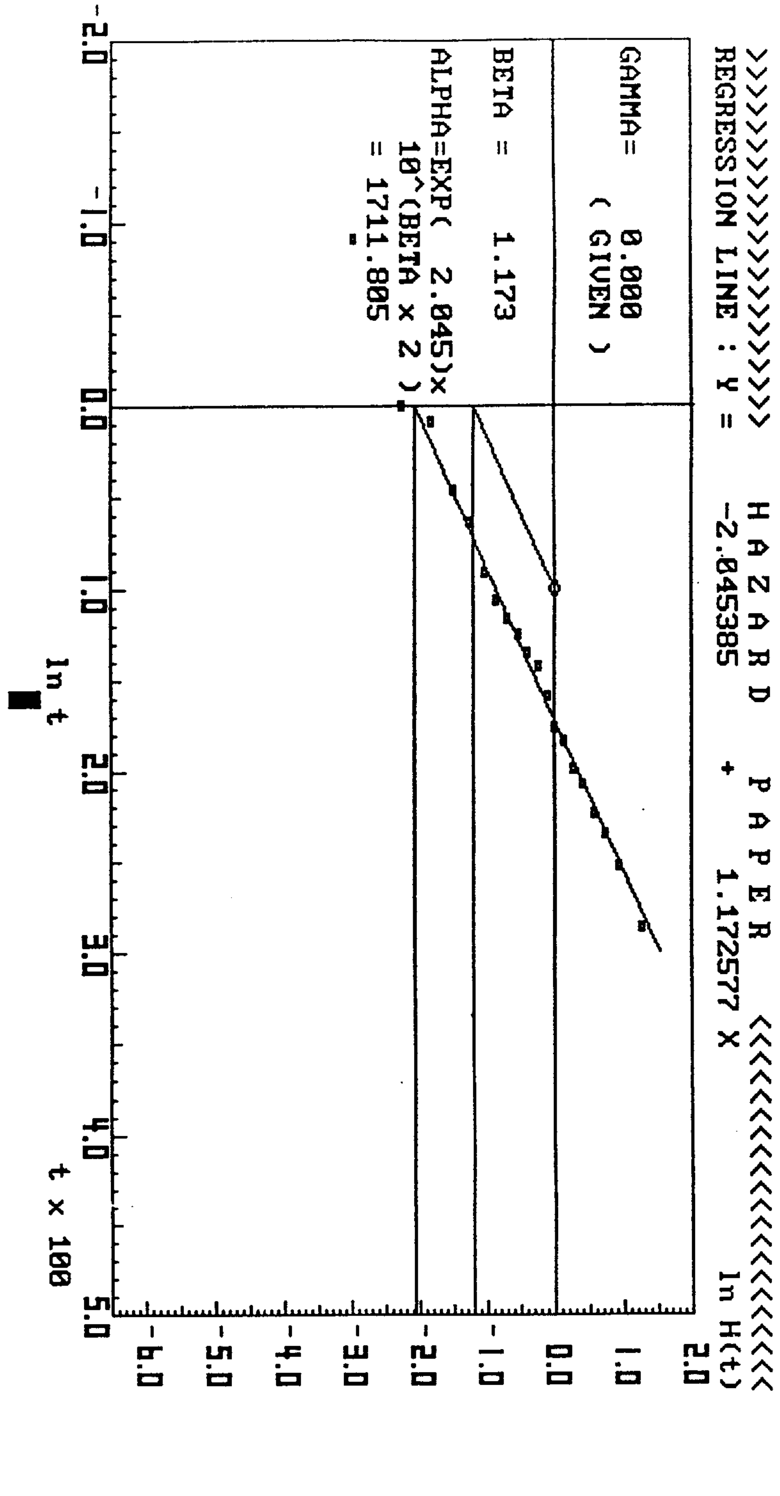
************************ R E S U L T ************************

ALPHA = 1711.805 BETA = 1.173
GAMMA = 0.000 ETA = 572.218

REGRESSION LINE : Y = -2.045385 + 1.172577 X

RELIABILITY AT ORIGINAL DATA		RELIABILITY AT OTHER POINTS	
INPUT DATA	R(T)	T I M E	R(T)
40.00000	0.95680	100.00000	0.87868
100.00000	0.87868	500.00000	0.42584
110.00000	0.86535	1000.00000	0.14597
160.00000	0.79899	1500.00000	0.04524
190.00000	0.75994	2000.00000	0.01307

****


>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>> H A Z A R D P A P E R <<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<<
REGRESSION LINE : Y = -2.045385 + 1.172577 X
GAMMA= 0.000
(GIVEN)
BETA = 1.173
ALPHA=EXP(2.045)x
10^(BETA x 2)
= 1711.805
ln H(t)
ln t
t x 100
-2.0
-1.0
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
-6.0
-5.0
-4.0
-3.0
-2.0
-1.0
0.0
1.0
2.0

-*-*- -*-*- -*-*- P R O B L E M 2 -*-*- -*-*- -*-*-

INPUT FAILURE TIME ;

190.00000	200.00000	210.00000	220.00000
230.00000	240.00000	250.00000	260.00000
270.00000	280.00000	300.00000	310.00000
330.00000	360.00000	400.00000	

GAMMA IS GIVEN. (GAMMA = 170.0)
ALPHA & BETA WILL BE ESTIMATED

------------- P R E L I M I N A R Y W O R K -------------

N = 15 K = -99 L = 5 INOF = 0
h(i)=1/(N-i+1) X(i)=ln t-γ H(i)=Σ h(i)

i	t	h(i)	ln t-γ	ln H(i)
1	190.00000	0.06667	0.69315	-2.70805
2	200.00000	0.07143	1.09861	-1.97981
3	210.00000	0.07692	1.38629	-1.53703
4	220.00000	0.08333	1.60944	-1.20948
5	230.00000	0.09091	1.79176	-0.94351
6	240.00000	0.10000	1.94591	-0.71486
7	250.00000	0.11111	2.07944	-0.51021
8	260.00000	0.12500	2.19722	-0.32107
9	270.00000	0.14286	2.30259	-0.14130
10	280.00000	0.16667	2.39790	0.03430
11	300.00000	0.20000	2.56495	0.21099
12	310.00000	0.25000	2.63906	0.39534
13	330.00000	0.33333	2.77259	0.59786
14	360.00000	0.50000	2.94444	0.84080
15	400.00000	1.00000	3.13549	1.19943

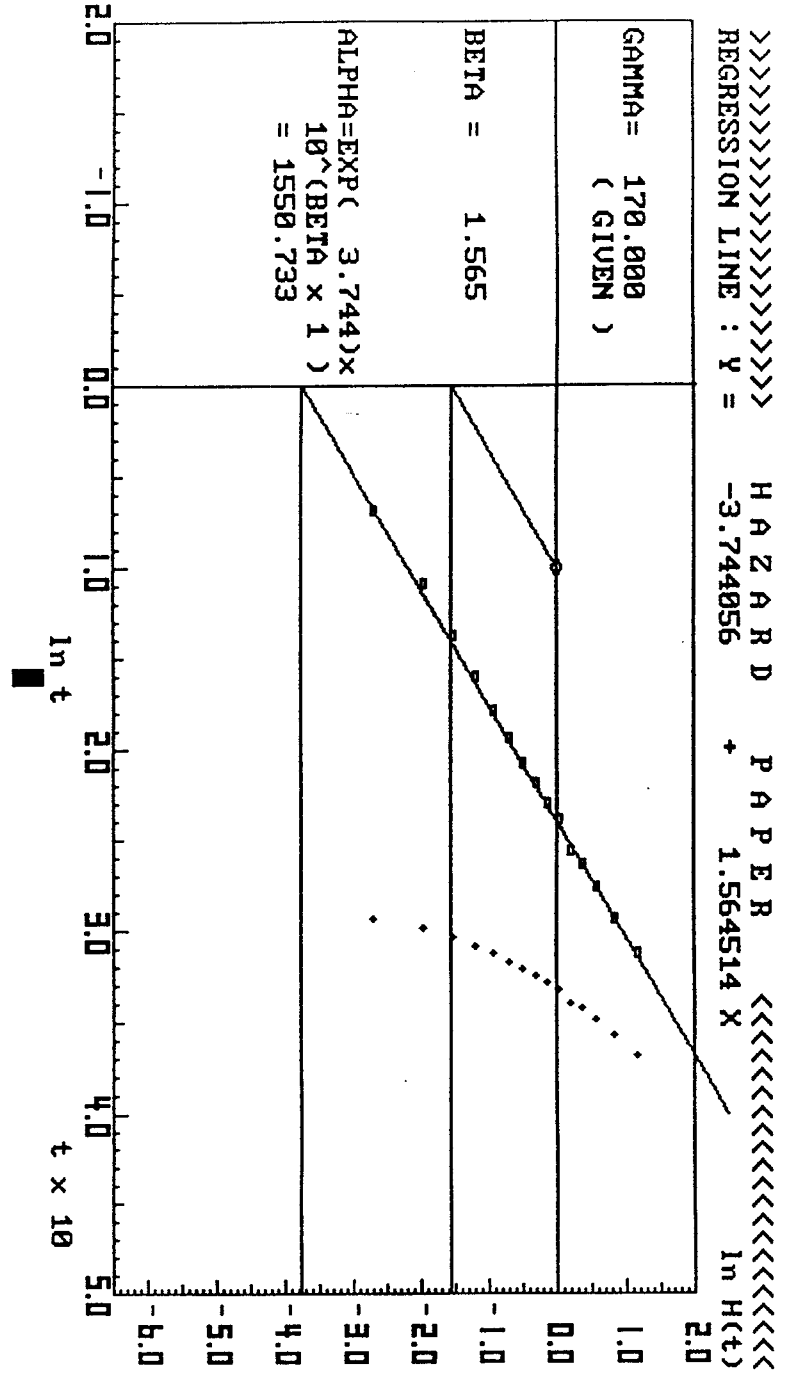
************************ R E S U L T ************************

ALPHA = 1550.733 BETA = 1.565
GAMMA = 170.000 ETA = 109.475

REGRESSION LINE : Y = -3.744056 + 1.564514 X

RELIABILITY AT ORIGINAL DATA INPUT DATA	R(T)	RELIABILITY AT OTHER POINTS T I M E	R(T)
190.00000	0.93242	200.00000	0.87638
200.00000	0.87638	250.00000	0.54217
210.00000	0.81304	300.00000	0.27024
220.00000	0.74569	350.00000	0.11338
230.00000	0.67685	400.00000	0.04098

****


>>>>>>>>>>>>>>>>>>>> H A Z A R D P A P E R <<<<<<<<<<<<<<<<<<<<
REGRESSION LINE : Y = -3.744056 + 1.564514 X
GAMMA= 170.000
(GIVEN)
BETA = 1.565
ALPHA=EXP(3.744)x
10^(BETA x 1)
= 1550.733
ln t
t x 10
ln H(t)

```
-*-*-  -*-*-  -*-*-   P R O B L E M   3   -*-*-  -*-*-  -*-*-

INPUT FAILURE TIME ;

   1400.00000      1600.00000      1800.00000      2000.00000
   2400.00000      3000.00000      4000.00000      5000.00000

NOSD = 5
ALPHA , BETA & GAMMA WILL BE ESTIMATED


------------- P R E L I M I N A R Y   W O R K -------------

N = 8                K = 99              L = 8            INOF = 0
h(i)=1/(N-i+1)             X(i)=ln t-γ                 H(i)=Σ h(i)
```

i	t	h(i)	ln t-γ	ln H(i)
1	1400.00000	0.12500	0.27079	-2.07944
2	1600.00000	0.14286	1.19725	-1.31730
3	1800.00000	0.16667	1.66978	-0.83350
4	2000.00000	0.20000	1.98938	-0.45488
5	2400.00000	0.25000	2.42578	-0.12271
6	3000.00000	0.33333	2.85134	0.19709
7	4000.00000	0.50000	3.30729	0.54108
8	5000.00000	1.00000	3.61929	0.99984

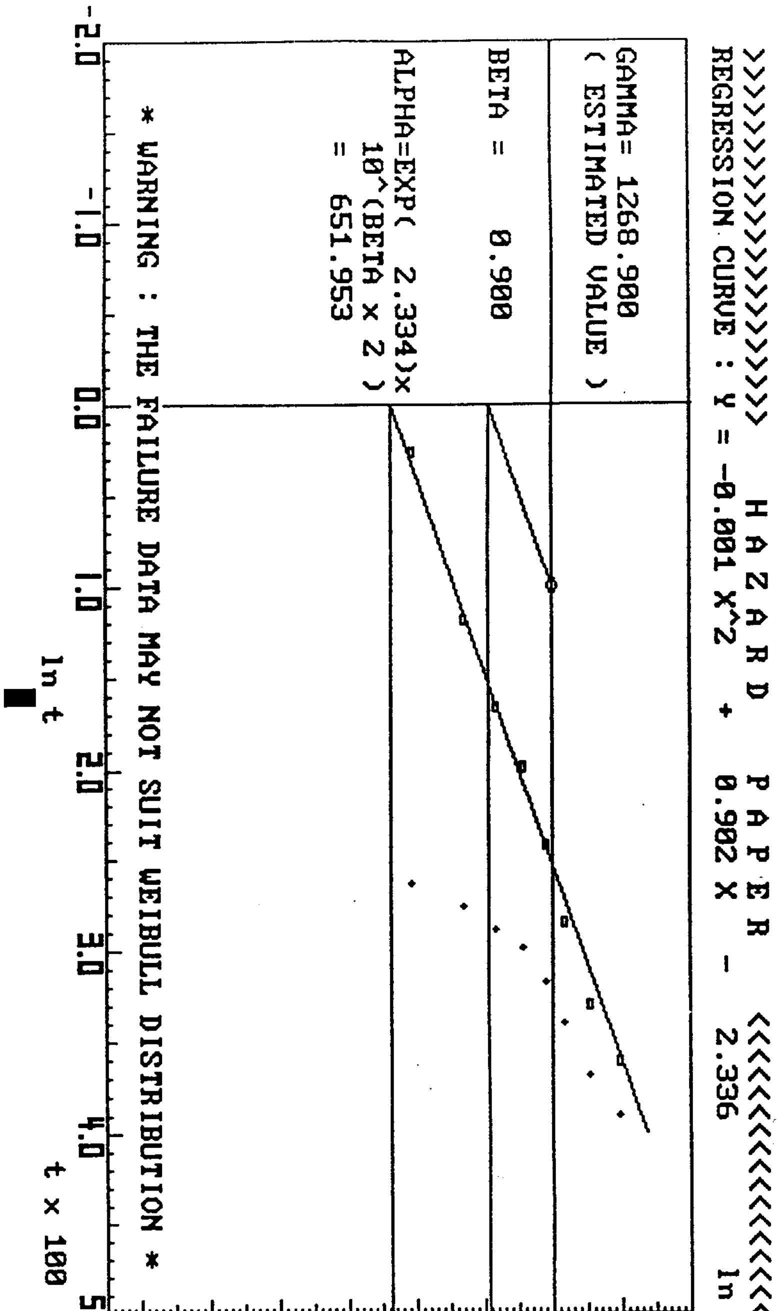
```
*********************** R E S U L T ***********************

ALPHA =     651.953                        BETA  =       0.900
GAMMA =    1268.900                        ETA   =    1336.441

WARNING : THE FAILURE DATA MAY NOT SUIT WEIBULL DISTRIBUTION
REGRESSION CURVE : Y = -0.001 X^2   +   0.902 X   -   2.336
```

RELIABILITY AT ORIGINAL DATA INPUT DATA	R(T)	RELIABILITY AT OTHER POINTS T I M E	R(T)
1400.00000	0.88369	1500.00000	0.81384
1600.00000	0.75221	2000.00000	0.55936
1800.00000	0.64681	2500.00000	0.39505
2000.00000	0.55936	3000.00000	0.28300
2400.00000	0.42293	3500.00000	0.20469
3000.00000	0.28300	4000.00000	0.14912
4000.00000	0.14912	4500.00000	0.10927
5000.00000	0.08045	5000.00000	0.08045

```
*************************************************************
```


>>>>>>>>>>>>>>>>>>> H A Z A R D P A P E R <<<<<<<<<<<<<<<<<<<<
REGRESSION CURVE : Y = -0.001 X^2 + 0.902 X - 2.336
GAMMA= 1268.900
(ESTIMATED VALUE)
BETA = 0.900
ALPHA=EXP(2.334)x
10^(BETA x 2)
= 651.953
* WARNING : THE FAILURE DATA MAY NOT SUIT WEIBULL DISTRIBUTION *
ln H(t)
2.0
1.0
0.0
-1.0
-2.0
-3.0
-4.0
-5.0
-6.0
-2.0
-1.0
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
ln t
t x 100

참고문헌

[1] 박경수, 신뢰성공학 및 정비이론, 탑출판사, 서울, 1978

[2] 이근희, 원전품질관리, 창지사, 서울, 1981

[3] _____, 품질관리(이론과 실제), 상조사, 서울, 1990

[4] 한국공업표준협회 역, 신뢰성에서 확률지의 사용, 한국공업표준협회, 서울, 1992

[5] 황의철, 최신품질관리, 무역경영사, 서울, 1980

[6] _____, 품질경영, 박영사, 서울, 1992

[7] Bain, L. J. and Antle, C.E., Estimation of Parameters in the Weibull Distribution, *Technometrics*, Vol 9, 1967

[8] Berrettoni, J.N. Practical Application of the Weibull Distribution, *Industrial Quality Control*, Vol 21, 1964

[9] Ireson, W.G.,*Reliability Handbook*, McGrawhill Book Company, 1966

[10] Kao, J.H.K.,Computer Methods for Estimating Weibull Parameters in Reliability Studies, *Transactions of IRE-Reliabiliity and Quality Control*, Vol 13, 1958

[11] Kao, J.H.K, A Graphical Estimation of Mixed Weibull Parameters in Life Testing Electron Tubes, *Technometrics*, Vol 1, 1959

[12] Kimball, B. J., On the Choice of Plotting Positions on Probability Paper, *Journal of the American Statistical Association*, Vol 55, 1960

[13] Nelson, L. S., Weibull Probability Paper, *Industrial Quality Control*, Vol 23, 1967