

Isoparametric 曲線 要素를 이용한 平面 뼈대 構造物의 大變形 및 彈塑性 有限要素解析

Large Deflection and Elastoplastic Analysis of the Plane Framed Structure using Isoparametric Curved Beam Element

金文榮* · 申鉉穆* · 李昌龍**

Kim, Moon Young · Shin, Hyun Mock · Lee, Chang Yong

Abstract

This paper presents a geometrically non-linear and elastoplastic F.E. formulation using a total Lagrangian approach for the two dimensional isoparametric curved beam elements. The beam element is derived by using plane stress elements. The basic element geometry is constructed using the coordinates of the nodes on the element center line and the nodal point normals. The element displacement field is described using two translations of the node on the center line and a rotation about the axes normal to the plane containing the center line of the element. The layered approach is used for the elastoplastic analysis of the plane framed structure with the arbitrary cross section. The iterative load or displacement incremental method for non-linear finite element analysis of the frame structure is used. Numerical examples are presented to demonstrate the behavior and the accuracy of the proposed beam element for geometric and elastoplastic non-linear applications. Comparisons made with present theory and other published data show that the beam element products accurate results with good convergence characteristics.

요 지

2차원 곡선보요소를 이용하여 대변형효과 및 탄소성거동을 고려한 유한요소법을 제시한다. Total Lagrangian 방법을 적용하며, 보요소는 평면응력요소로부터 유도된다. 또한, 임의의 단면을 갖는 평면 뼈대 구조의 탄소성해석을 수행하기 위하여 layered approach를 사용한다. 비선형 유한요소해석은 하중증분 또는 변위증분법을 적용한다. 본 연구에서 제안한 보요소의 거동과 정확도를 검증하기 위하여, 다른 문헌의 결과와 본 연구의 결과를 비교·분석한 해석예제를 제시한다.

1. 序 論

構造物의 舉動은 幾何學的인 非線形과 材料의 非彈性 性質에 의해서 크게 影響을 받을 수 있다. 뼈

대構造物의 塑性崩壞 舉動과 後挫屈을 동시에 고려하는 경우에는 非線形 解析法을 위해서는 많은 방법들이 제시되어 왔으나 아직 완전한 해결책을 제시하지 못하고 있다. 이에대한 이유는 다음과 같이 요약할 수 있다.

1) 뼈대構造物의 大變形問題를 해결하기위한 일

* 正會員 · 土木工學科 助教授

** 正會員 · 土木工學科 碩士課程

관성있는 解析方法이 부족하다.

- 2) Snap-Through 舉動과 같은 挫屈이후의 형상의 추적과 Turning-Back 현상과 같은 變位 臨界點이후 形상의 추적이 불가능하다.
- 3) 構造物의 大變形과 함께 수반되는 材料의 非線形性을 함께 고려하기가 어렵다.

本 研究에서는 有限要素法을 이용하여 平面뿔대 構造物의 幾何的 非線形解析과 彈塑性解析을 수행하는 數值解析方法을 제시하고자 한다. 이를 위하여 2次元 連續體에 假想일의 原理를 적용함으로써 増分 平衡方程式을 얻는다. 이에 剪斷 變形效果가 고려되는 Isoparametric 曲線보의 變位場을 도입하여 大變形效果를 고려하는 平面뿔대의 増分 平衡方程式을 유도하고 構造物을 有限要素로 나누어 각 要素의 變位場을 節點變位에 대한 形狀函數로 나타냄으로써 部材의 線形 및 非線形 剛度매트릭스를 유도한다. 接線剛度 매트릭스를 유도하거나 不平衡荷重을 산정할 때 斷面을 여러개의 層(Layer)으로 분할하고, 각 層의 가우스 積分點(Gauss integration point)에서의 彈塑性 상태를 파악함으로써 材料의 非線形舉動을 추적한다. 또한 非線形 매트릭스 平衡方程式의 解를 구하는 방법으로 荷重을 증가시키면서 對應 變位를 구하는 荷重増分法과 특정한 變位成分이 증가함에 따라 이에 대응하는 荷重増分 및 나머지 變位成分을 구하는 變位増分法⁽¹⁾을 사용한다.

2. 2次元 連續體의 平衡方程式

本章에서는 大變形 및 微小變形下에서 2次元 連續體의 매트릭스 増分平衡方程式을 유도한다. 이때 각 變數들의 표시방법은 文獻⁽²⁾의 방식을 채택하였으며, 변수의 오른쪽 아래첨자 i, j, k의 범위는 1,2의 값을 갖는다.

2.1 2次元 連續體의 増分平衡方程式

非線形 효과를 표현하는 방법으로 初期形狀(Initial configuration)을 기준으로 하는 Total Lagrangian formulation을 사용하여 假想變位の 原理에 의해 시간 $t + \Delta t$ 에서 2次元 連續體의 平衡方程式은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_{\text{ov}} {}^{t+\Delta t}S_{ij} \cdot \delta {}^{t+\Delta t}\epsilon_{ij} \cdot dV = {}^{t+\Delta t}R \quad (1)$$

여기서, ${}^{t+\Delta t}S_{ij}$, ${}^{t+\Delta t}\epsilon_{ij}$ 는 각각 시간 0에서 정지된 직각좌표계를 기준으로 $t + \Delta t$ 에서 2nd Piola-Kirchoff stress tensor, Green-Lagrange strain tensor를 나타낸다. 그리고 δ 은 변분(variation), ${}^{t+\Delta t}R$ 은 外力의 가상일을 의미한다.

식 (1)을 증분형태로 나타내기 위하여 시간 $t + \Delta t$ 에서의 應力과 變形도를 시간 t 에서의 크기와 증분량으로 표시하면 다음과 같다.

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} - {}^tS_{ij} = {}^tS_{ij} \approx {}^tC_{ijrs} \cdot {}^t\epsilon_{rs}$$

$${}^{t+\Delta t}\epsilon_{ij} - {}^t\epsilon_{ij} = {}^t\epsilon_{ij} = {}^t\epsilon_{ij} + {}^t\eta_{ij} \quad (2)$$

여기서, ${}^tC_{ijrs}$ 는 4th elasticity tensor, ${}^t\epsilon_{ij}$ 와 ${}^t\eta_{ij}$ 는 變形度増分の 線形項과 非線形項을 나타낸다. 變形度, 變形度増分の 線形項과 非線形項의 구체적인 내용은 다음과 같이 표시된다.

$${}^t\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^tU_{ij} + {}^tU_{ji} + {}^tU_{ki} \cdot {}^tU_{kj}) \quad (3a)$$

$${}^t\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^tU_{ij} + {}^tU_{ji}) + \frac{1}{2} ({}^tU_{ki} \cdot {}^tU_{kj} + {}^tU_{ki} \cdot {}^tU_{kj}) \quad (3b)$$

$${}^t\eta_{ij} = \frac{1}{2} ({}^tU_{ki} \cdot {}^tU_{kj}) \quad (3c)$$

여기서, ${}^tU_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial X_j}$, ${}^tU_{ki} = \frac{\partial U_k}{\partial X_i}$ 를 나타내고 tU_i 와 tU_i 는 각각 전체변위 성분과 증분변위 성분을 의미한다.

식 (2)를 식 (1)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 連續體의 増分平衡方程式⁽¹⁾을 얻을 수 있다.

$$\int_{\text{ov}} ({}^tC_{ijrs} \cdot {}^t\epsilon_{rs} \cdot \delta {}^t\epsilon_{ij} + {}^tS_{ij} \cdot \delta {}^t\eta_{ij}) \cdot dV = {}^{t+\Delta t}R - \int_{\text{ov}} {}^tS_{ij} \cdot \delta {}^t\epsilon_{ij} \cdot dV \quad (4)$$

微小變形이고 材料非線形만을 고려하는 경우에 식 (4)는 다음과 같이 표시된다.

$$\int_V C_{ijrs} \cdot \epsilon_{rs} \cdot \delta \epsilon_{ij} dV = {}^{t+\Delta t}R - \int_V \sigma_{ij} \cdot \delta \epsilon_{ij} dV \quad (5)$$

여기서, σ_{ij} 는 Cauchy stress를 나타내고, $\epsilon_{ij} = 1/2 \cdot (U_{ij} + U_{ji})$ 이다.

2.2 大變形을 고려한 2次元 連續體의 매트릭스 増分平衡方程式

매트릭스 増分平衡方程式으로 변환시키기 위하여 식(4)를 다음과 같이 식(6)로 표시할 수 있다.

$$\int_{\Omega_V} (\epsilon_L^T \cdot {}_0C \cdot \delta \epsilon_L + \epsilon_{NL}^T \cdot {}_0S \cdot \delta \epsilon_{NL}) \circ dV = {}^{t+\Delta t}R - \int_{\Omega_V} \bar{S}^T \cdot \delta \epsilon_L \circ dV \quad (6)$$

$$\epsilon_L^T = [{}_{,0}e_{11} \quad 2 \cdot {}_{,0}e_{22} \quad 2 \cdot {}_{,0}e_{12}] \quad (7a)$$

$$\epsilon_{NL}^T = [{}_{,0}U_{1,1} \quad {}_{,0}U_{1,2} \quad {}_{,0}U_{2,1} \quad {}_{,0}U_{2,2}] \quad (7b)$$

$${}_0S = \begin{bmatrix} {}_0S_{11} & {}_0S_{12} & 0 & 0 \\ {}_0S_{21} & {}_0S_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}_0S_{11} & {}_0S_{12} \\ 0 & 0 & {}_0S_{21} & {}_0S_{22} \end{bmatrix} \quad (7c)$$

$$\bar{S}^T = [{}_0S_{11}, {}_0S_{22}, {}_0S_{12}] \quad (7d)$$

여기서, ϵ_L 과 ϵ_{NL} 은 각각 線形, 非線形 變形度 벡터를 나타내고, ${}_0S$ 와 \bar{S} 는 應力매트릭스, 應力벡터를 의미한다. 그리고 ${}_0C$ 는 식 (23)에 표시되어 있으며 오른쪽 윗첨자 T는 행벡터(low vector)를 뜻한다.

連續體를 有限要素분할하여 식 (6)을 매트릭스 増分方程式으로 나타내면 다음과 같다.

$$({}_0K_L + {}_0K_{NL}) \cdot \Delta U^{(i)} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} \quad (8)$$

여기서, ${}_0K_L$ 는 식 (6)의 첫째항에 대응하며 線形 剛度매트릭스를 나타내고, ${}_0K_{NL}$ 은 식 (6)의 둘째항에 대응하며 非線形 剛度매트릭스를 나타낸다. ${}^{t+\Delta t}F$ 는 부재내력에 기인하는 節點力벡터를 나타낸다. 식 (8)의 각 항들은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} {}_0K_L &= \int_{\Omega_V} {}_0B_L^T \cdot {}_0C \cdot {}_0B_L \circ dV, \\ {}_0K_{NL} &= \int_{\Omega_V} {}_0B_{NL}^T \cdot {}_0S \cdot {}_0B_{NL} \circ dV \\ {}_0F &= \int_{\Omega_V} {}_0B_L^T \cdot \bar{S} \circ dV \end{aligned} \quad (9)$$

여기서, ${}_0B_L$ 은 초기변위의 영향을 포함하는 線形 變形度-變位 變換매트릭스, ${}_0B_{NL}$ 은 初期應力의 영향을 고려하는 非線形 變形度-變位 變換매트릭스를 표시한다.

2.3 微小變形下에서 2次元 連續體의 매트릭스 増分平衡方程式

매트릭스 増分平衡方程式으로 변환시키기 위하여 식 (5)의 표현을 달리하면 식 (10)과 같이 표시할 수 있다.

$$\int_V \epsilon^T \cdot {}_0C \cdot \delta \epsilon \circ dV = {}^{t+\Delta t}R - \int_V \Sigma^T \cdot \delta \epsilon \circ dV \quad (10)$$

$$\epsilon = [e_{11} \quad 2 \cdot e_{22} \quad 2 \cdot e_{12}]$$

$$\Sigma = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12}]$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(U_{ij} + U_{ji}), \quad U_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial X_j}$$

여기서, ϵ 와 Σ 는 각각 微小變形下에서 變形度벡터, 應力벡터를 표시한 것이다.

식 (10)으로부터 連續體를 요소분할하여 얻는 매트릭스 増分方程式은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} {}_0K \cdot \Delta U^{(i)} &= {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} \\ {}_0K &= \int_V {}_0B_L^T \cdot {}_0C \cdot {}_0B_L \circ dV, \quad {}_0F = \int_V {}_0B_L^T \cdot \Sigma \circ dV \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, ${}_0B_L$ 은 初期變位の 영향을 무시하는 線形 變形度-變位 變換매트릭스이다.

3. Isoparametric 曲線보 要素

平面應力要素로 부터 Isoparametric 曲線보 要素를 유도하기 위하여 다음과 같은 가정을 둔다.

- 1) 變形前에 중립면에 垂直한 斷面은 變形이 발생한 후에도 평면상태를 유지하지만, 이 平面이 中立面에 반드시 垂直할 필요는 없다.
- 2) 曲線보의 두께방향으로 垂直應力 및 垂直變形度는 무시한다.

3.1 曲線보 要素의 形狀과 變位벡터

시간 0, t에서 Isoparametric 곡선 要素의 각점들의 위치는 다음 식으로 나타낼 수 있다(그림 1 참조).

$$\begin{aligned} {}^0X_i &= \sum_{k=1}^N h_k \cdot {}^0X_i^k + \frac{S}{2} \cdot \sum_{k=1}^N a_k \cdot h_k \cdot {}^0V_{si}^k \\ {}^tX_i &= \sum_{k=1}^N h_k \cdot {}^tX_i^k + \frac{S}{2} \cdot \sum_{k=1}^N a_k \cdot h_k \cdot {}^tV_{si}^k \end{aligned} \quad (12)$$

여기서, h_k 는 形狀函數를 나타내며, 요소당 2, 3, 4절

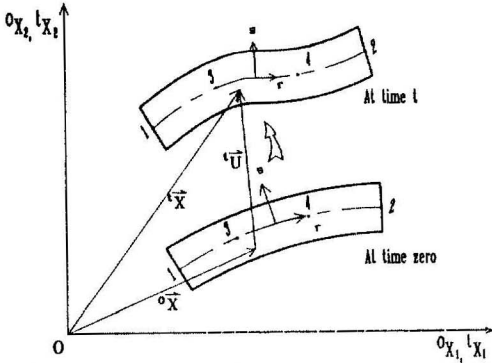


그림 1. Motion of an isoparametric curved beam element.

점에 대응하는 形狀函數式들은 문헌(2)를 참조할 수 있다. a_k 는 절점 k에서 두께이며, ${}^0V_{s2}^k$ 는 法線벡터의 方向餘弦이고, r과 s는 Natural coordinate이다.

또한, 식 (12)와 全體 變位成分 ${}^tU_i (= {}^tX_i - {}^0X_i)$, 増分 變位成分 $U_i (= {}^t\Delta^i X_i + {}^iX_i)$ 의 관계로부터 다음을 얻을 수 있다.

$${}^tU_i = \sum_{k=1}^N h_k \cdot {}^tU_i^k + \frac{S}{2} \cdot \sum_{k=1}^N a_k \cdot h_k \cdot ({}^tV_{s1}^k + {}^0V_{s1}^k)$$

$$U_i = \sum_{k=1}^N h_k \cdot U_i^k + \frac{S}{2} \cdot \sum_{k=1}^N a_k \cdot h_k \cdot ({}^{t+\Delta^i}V_{s1}^k - {}^tV_{s1}^k) \quad (13)$$

여기서,

$${}^{t+\Delta^i}V_{s1}^k - {}^tV_{s1}^k \cong -{}^tV_{s2}^k \cdot \theta^k, \quad {}^{t+\Delta^i}V_{s2}^k - {}^tV_{s2}^k \cong {}^tV_{s1}^k \cdot \theta^k$$

Natural coordinate (r,s)와 시간 0에서의 직각좌표계 $({}^0X_1, {}^0X_2)$ 사이의 Jacobian 매트릭스는 다음과 같이 표시된다.

$${}^0J_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^0X_1}{\partial r} & \frac{\partial {}^0X_2}{\partial r} \\ \frac{\partial {}^0X_1}{\partial s} & \frac{\partial {}^0X_2}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (14)$$

여기서,

$$\frac{\partial {}^0X_1}{\partial r} = \sum_{k=1}^N h_{k,r} \cdot {}^0X_1^k + \frac{S}{2} \sum_{k=1}^N a_k \cdot h_{k,r} \cdot {}^0V_{s1}^k$$

$$\frac{\partial {}^0X_2}{\partial r} = \sum_{k=1}^N h_{k,r} \cdot {}^0X_2^k + \frac{S}{2} \sum_{k=1}^N a_k \cdot h_{k,r} \cdot {}^0V_{s2}^k$$

$$\frac{\partial {}^0X_1}{\partial s} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k \cdot h_k \cdot {}^0V_{s1}^k$$

$$\frac{\partial {}^0X_2}{\partial s} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k \cdot h_k \cdot {}^0V_{s2}^k$$

3.2 曲線 要素의 變形度-變位 變換매트릭스

Jacobian 매트릭스를 이용하여 増分變位成分을 X_i 로 편미분을 하면 다음 식으로 표시된다.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial {}^0X_1} &= \sum_{k=1}^N (b_{k5} \cdot U_1^k + b_{k1} \cdot \theta^k), \\ \frac{\partial u_2}{\partial {}^0X_1} &= \sum_{k=1}^N (b_{k5} \cdot U_2^k + b_{k3} \cdot \theta^k), \\ \frac{\partial u_1}{\partial {}^0X_2} &= \sum_{k=1}^N (b_{k6} \cdot U_1^k + b_{k2} \cdot \theta^k), \\ \frac{\partial u_2}{\partial {}^0X_2} &= \sum_{k=1}^N (b_{k6} \cdot U_2^k + b_{k4} \cdot \theta^k), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

여기서

$$b_{k1} = {}^0J^{-1}_{11} \cdot \frac{S}{2} \cdot a_k \cdot h_{k,r} \cdot (-{}^0V_{s2}^k) + {}^0J^{-1}_{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot a_k \cdot h_k \cdot (-{}^0V_{s2}^k)$$

$$b_{k2} = {}^0J^{-1}_{21} \cdot \frac{S}{2} \cdot a_k \cdot h_{k,r} \cdot (-{}^0V_{s2}^k) + {}^0J^{-1}_{22} \cdot \frac{1}{2} \cdot a_k \cdot h_k \cdot (-{}^0V_{s2}^k)$$

$$b_{k3} = {}^0J^{-1}_{11} \cdot \frac{S}{2} \cdot a_k \cdot h_{k,r} \cdot {}^0V_{s1}^k + {}^0J^{-1}_{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot a_k \cdot h_k \cdot {}^0V_{s1}^k$$

$$b_{k4} = {}^0J^{-1}_{21} \cdot \frac{S}{2} \cdot a_k \cdot h_{k,r} \cdot {}^0V_{s1}^k + {}^0J^{-1}_{22} \cdot \frac{1}{2} \cdot a_k \cdot h_k \cdot {}^0V_{s1}^k$$

$$b_{k5} = {}^0J^{-1}_{11} h_{k,r}, \quad b_{k6} = {}^0J^{-1}_{21} h_{k,r}$$

大變位 효과를 고려하는 경우에 全體變位를 X_i 로 편미분을 하면 다음 식을 얻는다.

$$\frac{\partial {}^tU_1}{\partial {}^0X_i} \equiv 1_{1i} = \sum_{k=1}^N ({}^0J^{-1}_{11} \cdot d_{k1} + {}^0J^{-1}_{12} \cdot d_{k2})$$

$$\frac{\partial {}^tU_2}{\partial {}^0X_i} \equiv 1_{2i} = \sum_{k=1}^N ({}^0J^{-1}_{11} \cdot d_{k3} + {}^0J^{-1}_{12} \cdot d_{k4}) \quad (16)$$

여기서,

$$d_{k1} = h_{k,r} \cdot U_1^k + \frac{S}{2} \cdot a_k \cdot h_{k,r} \cdot ({}^tV_{s1}^k - {}^0V_{s1}^k)$$

$$d_{k2} = \frac{1}{2} \cdot a_k \cdot h_k \cdot ({}^tV_{s1}^k - {}^0V_{s1}^k)$$

$$d_{k3} = h_{k,r} \cdot U_2^k + \frac{S}{2} \cdot a_k \cdot h_{k,r} \cdot ({}^tV_{s2}^k - {}^0V_{s2}^k)$$

$$d_{k4} = \frac{1}{2} \cdot a_k \cdot h_k \cdot (V_{s2}^k - V_{s2}^k)$$

變形度-變位變換 매트릭스를 결정하기 위하여 N 절점을 갖는 요소의 절점변위벡터를 다음과 같이 정의한다.

$$U_e^T = [U_1 \ U_2 \ \theta^1 \ U_1^* \ U_2^* \ \theta \ \dots \ U_1^N \ U_2^N \ \theta^N] \quad (17)$$

식 (3b), (7a)를 고려하면 線形 變形度-變位 變換 매트릭스는 다음과 같이 표시된다.

$$\in_L = [B_{L0} + B_{L1}] \cdot U_e \quad (18)$$

$$B_{L0} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \dots & & & & & \\ & b_{k5} & 0 & & b_{k1} & \\ & 0 & b_{k6} & & b_{k4} & \\ & b_{k6} & b_{k5} & & b_{k2} + b_{k3} & \\ \dots & & & & & \end{array} \right] \quad \text{for nodal point k} \quad (19)$$

$$B_{L1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \dots & & & & & \\ & l_{11} \cdot b_{k5} & l_{21} \cdot b_{k5} & l_{11} \cdot b_{k1} + l_{21} \cdot b_{k3} & & \\ & l_{21} \cdot b_{k6} & l_{22} \cdot b_{k6} & l_{12} \cdot b_{k2} & l_{22} \cdot b_{k4} & \\ & l_{11} \cdot b_{k6} & l_{21} \cdot b_{k6} & l_{11} \cdot b_{k2} + l_{21} \cdot b_{k4} & & \\ & + l_{12} \cdot b_{k5} & + l_{22} \cdot b_{k5} & + l_{12} \cdot b_{k1} + l_{22} \cdot b_{k3} & & \\ \dots & & & & & \end{array} \right] \quad \text{for nodal point k} \quad (20)$$

식 (3c), (7b)를 고려하면 非線形 變形度-變位 變換 매트릭스는 다음과 같이 표시된다.

$$\in_{NL} = B_{NL} \cdot U_e \quad (21)$$

$$B_{NL} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \dots & & & & & \\ & b_{k5} & 0 & & b_{k1} & \\ & b_{k6} & 0 & & b_{k2} & \\ & 0 & b_{k5} & & b_{k3} & \\ & 0 & b_{k6} & & b_{k4} & \\ \dots & & & & & \end{array} \right] \quad \text{for nodal point k} \quad (22)$$

微小變形下에서 彈塑性解析을 행하는 경우에는 接線剛度매트릭스를 산정할때 식 (18)의 오른쪽 첫 번째항만을 고려하고, 大變形解析을 수행하는 경우에는 初期變位와 初期應力의 영향을 나타내는 식 (18)의 오른쪽 두 번째항과 식 (21)을 포함시켜야한다.

3.3 曲線 要素의 應力-變形度 關係

一般的으로 梁構造物의 彈塑性 解析을 수행하는 경우에 塑性힌지의 概念을 이용하는 방법과 부재단면을 여러 層으로 나누어 해석하는 Layered approach 방법으로 구분된다. 本 研究에서는 後者의 方法을 사용하여 彈塑性 解析을 수행한다. 이러한 경우에 接線 剛度매트릭스와 不平衡荷重을 算定하기 위해서는 두께방향으로는 각 層當, 梁部材의 軸方向으로는 가우스積分을 수행하여야 한다. 이때 곡선보의 각 層의 가우스 積分點에서 두께방향의 수직변형도 및 수직응력은 가정 2)에 따라 零이 되어야 한다.

線形 剛度매트릭스를 산정할때 사용되는 應力-變形度 變換매트릭스와 非線形 剛度매트릭스를 구할때 국부좌표계 (가우스 積分點에서 r,s 방향) 에서의 應力成分을 전체좌표계의 응력성분으로 변환시키는 관계식은 각각 식 (23), (24)과 같이 표시된다.

$$C = T^T \cdot C \cdot T \quad (23)$$

$$\bar{S} = T^T \cdot S \quad (24)$$

$$T = \begin{bmatrix} CC & SS & CS \\ -2 \cdot CS & 2 \cdot CS & CC-SS \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} E_t & 0 \\ 0 & G \cdot f_s \end{bmatrix} \quad (25)$$

여기서, $CC = \cos^2(\beta)$, $SS = \sin^2(\beta)$, $CS = \cos(\beta) \cdot \sin(\beta)$ 이고 β 는 전체좌표계의 x_1 축과 r방향의 사이각을 나타낸다. E_t 는 塑性變形이 일어나는 경우에는 $E_t = E - E^2/(E+H')$ 을 사용하고 그렇지 않은 경우에는 $E_t = E$ 를 사용한다. H 은 彈性變形度成分을 제외한 應力-變形度 關係곡선의 기울기를 나타내고, f_s 는 剪斷係數를 의미한다.

不平衡荷重을 산정하기 위해서 먼저 變位成分을 산정하고 각 가우스 積分點에서 식 (3)를 사용하여

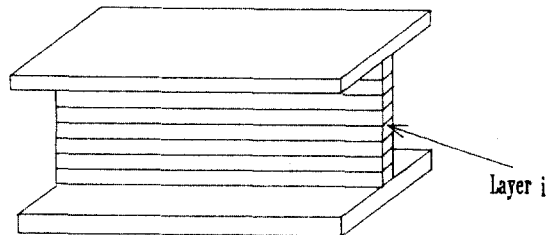


그림 2. Layered subdivision of beam element.

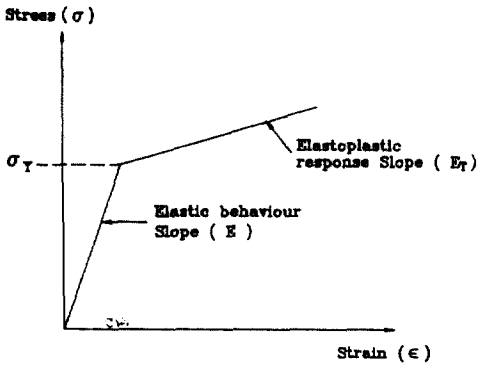


그림 3. Bilinear elastoplastic stress-strain behavior for the uniaxial case.

變形度를 구하고 식 (26)으로부터 국부좌표계에서 變形度, 變形度增分을 구한다.

$$\bar{\epsilon} = T \cdot \epsilon \quad (26)$$

여기서, $\bar{\epsilon}^{-T} = [\bar{\epsilon}_{rr} \ \bar{\epsilon}_{rs}]$

$$\bar{\epsilon}^T = [\bar{\epsilon}_{11} \ 2\bar{\epsilon}_{22} \ 2\bar{\epsilon}_{12}]$$

微小變形 해석의 경우에 變形度增分은 다음과 같이 산정할 수 있다.

$$\bar{\epsilon} = T \cdot \epsilon \quad (27)$$

여기서, $\bar{\epsilon}^T = [e_{rr} \ e_{rs}]$

剪斷應力은 彈性거동하는 것으로 가정하고, 법선 응력은 彈塑性擧動³⁾을 고려하여 變形度增分에 대응하는 應力增分 및 應力을 산정한다. 그리고 식 (9), (11)을 적용하여 節點力벡터를 산정한다.

4. 數值解析 알고리즘

다음은 平面 뼈대 構造物의 大變形 및 彈塑性 有限要素解析을 수행하기 위하여 本 研究에서 사용한 解析 알고리즘을 제시한 것이다.

- (1) 구조물의 기하학적인 정보와 재료의 성질을 나타내는 자료들을 입력한다.
- (2) 하중성분들의 비율만을 나타내는 하중벡터를 입력한다.
- (3) 다음 하중단계로 들어가기 전에 변위벡터, 내

력, 그리고 반력들을 저장한다.

- (4) 하중중분법의 경우에 반복계산 과정으로 들어간다.
 - 1) 첫번째 반복계산에서 사용되는 중분하중 벡터를 구한다.
 - 2) 구조물의 접선강도 매트릭스를 구성한다.
 - 3) 중분방정식(8)을 풀어서 변위중분벡터, 총 변위벡터를 계산한다.
 - 4) 가우스 적분점에서 변형도, 변형도중분을 구하고, 탄소성 응력-변형도관계를 고려하여 응력중분, 응력을 산정한다.
 - 5) 식(9)의 세번제식을 사용하여 절점력벡터를 산정한다.
 - 6) 절점하중벡터와 절점력벡터의 차이로서 불평형 하중벡터를 구하고 수렴조건을 만족시키지 못하면 단계 2)로 돌아가서 수렴조건을 만족시킬 때까지 반복계산한다.
 - (5) 변위중분법의 경우에 반복계산으로 들어간다.
 - 1) 구조물의 접선강도 매트릭스를 구성한다.
 - 2) 불평형 하중벡터에 대응하는 변위중분을 구한다.
 - 3) 비례하중벡터에 대응하는 변위중분을 구한다.
 - 4) 반복계산에서 특정한 변위성분의 중분값이 일정하다는 구속조건을 사용하여 하중과 라미타의 중분과 나머지 변위중분성분들, 그리고 총변위벡터를 산정한다.
 - 5) - 7) 하중중분법의 단계 4) - 6) 와 동일하다.
 - (6) 반복계산의 최대허용횟수 이내에 수렴하면 계산한 결과들을 출력하고 다음 하중단계로 들어간다. 만일 수렴하지 못하면 하중중분법의 경우에는 하중중분간격을, 변위중분법의 경우에는 특정한 변위성분의 중분간격을 반으로 줄여서 단계 (3)에서 저장하였던 값들을 가지고 단계 (4) 또는 단계 (5)로 되돌아간다.
- 수렴판정조건은 식(28)에서 보는바와 같이 총하중벡터의 크기(Norm)에 대한 불평형하중벡터의 크기의 백분율값이 입력으로 주어지는 허용치보다 작을 때는 수렴한 것으로, 클 때는 수렴하지 못한 것으로 판정한다.

$$\frac{\|{}^{(i+1)}\Delta^i \mathbf{R} - {}^{(i+1)}\Delta^i \mathbf{F}^{(i-1)}\|}{\|{}^{(i+1)}\Delta^i \mathbf{R}\|} \times 100 \leq \text{Tolerance} \quad (28)$$

5. 數値解析例

本 研究에서 제시한 이론을 적용하기 위하여 平面 剛架 및 아치 構造物의 大變形 및 彈塑性解析을 수행할 수 있는 유한요소해석 프로그램 (GEO-EPF-RAME)을 개발하였다. 개발된 프로그램은 微小變形解析, Total Lagrangian 방법을 이용한 大變形解析, 그리고 微小變形 및 大變形 下에서 彈塑性 有限要素解析을 수행할 수 있도록 하였다. 斷面形狀이 직사각형이고 彈性解析의 경우에는 길이방향과 두께 방향으로 모두 가우스積分을 적용하였으며, 斷面形狀이 I형이거나 彈塑性解析인 경우에는 길이방향으로 가우스積分, 두께방향으로 Layered approach 방법을 사용하였다. 프로그램에서 데이터를 입력할 때 요소당 절점수는 2, 3, 4절점, 길이방향 가우스積分은 2, 3, 4, 5점, 그리고 두께방향으로 層分割은 10개 까지 선택할 수 있도록 하였다. 純粹 大變形解析의 경우에는 3 절점 유한요소, 2 2 가우스積分을 사용하였다. 그리고 彈塑性解析의 경우에는 모두 4 절점 유한요소를 사용하였으며, 10개의 層으로 분할하고 길이방향으로 3점 가우스積分을 적용하였다. 그리고 極限舉動을 추적하기 위하여 變位增分法을 적용하였으며 수렴허용치(Tolerance)는 0.1을 사용하였다.

5.1 兩端 固定支持된 圓形의 낮은 아치 (A clamped circular shallow arch)

本 例題는 變位增分法을 사용하여 양단 고정지된 낮은 아치의 Snap-through 舉動을 해석하였다. 고려한 아치의 형상과 재원은 그림 4, 그리고 頂点에서의 처짐과 하중의 관계곡선은 그림 5에 나타내었다. 아치의 形狀과 荷重條件이 대칭을 이루므로 아치의 절반만을 3절점 3요소로 모델링하여 해석하였으며 수렴허용치는 0.1을 적용하였다. 사용된 3절점 유한요소는 아치의 곡선형상을 정확히 모델링하며, 2×2 가우스積分을 사용하였다. K. S. Surana⁽⁴⁾의 해석결과와 비교할 때 매우 잘 일치함을 알 수 있다.

5.2 2徑間 單層 剛架構造物 (A two bay one

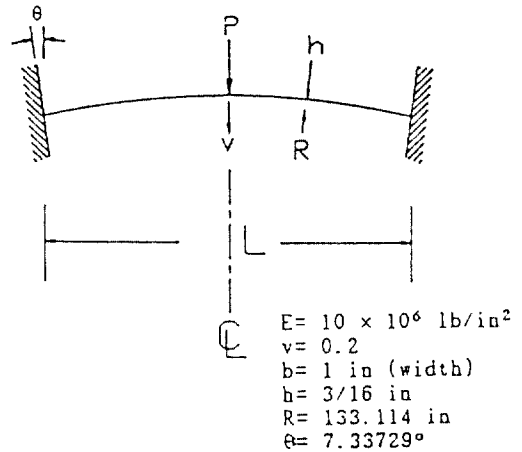


그림 4. A circular shallow arch.

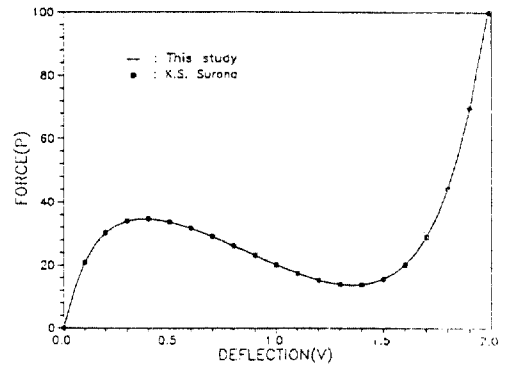




그림 5. Load-deflection curve.

story frame)

本 例題는 大變形을 고려하는 경우(LD) 이를 무시하는 경우(SD)에 대하여 單層 frame의 彈塑性 해석을 수행하였다. 해석에 사용된 재원과 구조물 형상은 그림 6에 나타내었다. 수평, 수직부재를 모두 4개의 요소로 분할하여 총 22개의 4절점 유한요소가 사용되었다. 그림 7은 水平變位-荷重 關係曲線을 나타낸 것이다. 이때 塑性힌지방법을 사용한 Argyris et al.⁽⁵⁾의 해석결과와 본 연구의 결과를 함께 표시하였다. 그림 7에서 보는 바와 같이 微小變形解析의 경우에는 塑性힌지방법을 사용하여 해석한 Argyris의 결과와 本 研究의 결과가 비교적 잘 일치하고 있음을 알 수 있으며, 大變形을 고려한 해석의 경우에는 Argyris의 결과가 本 研究의 결과보다 荷重이 약간 커지는 경향을 나타내었다.

Element No.	Cross Sectional Properties	Material Data
① ② ③ ⑥	 $A=800 \text{ cm}^2$ $I=106667 \text{ cm}^4$ $L=600 \text{ cm}$	$E=2.0 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$ $\sigma_y=800 \text{ Kg/cm}^2$ $\nu=0.3$ $H'=0$
④ ⑤	 $A=1391.5 \text{ cm}^2$ $I=245368 \text{ cm}^4$ $L=600 \text{ cm}$	

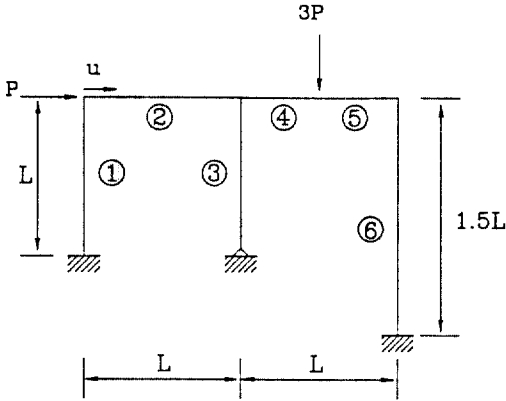


그림 6. A two bay one story frame.

5.3 兩端 힌지인 直角 뼈대構造物 (A hinged right-angle frame)

그림 8은 斷面은 矩形이며 왼쪽의 힌지로부터 0.8L만큼 떨어진 지점에 부재축에 수직한 荷重을 받는 직각 뼈대구조물을 나타낸 것이다. 총 20개의 유한요소를 사용하여 大變形을 고려한 彈性解析(3절점 요소사용)과 彈塑性解析(4절점 요소사용)을 수행하였으며 이때 사용된 재원은 다음과 같다.

$$E=7.2 \times 10^6 \text{ N/cm}^2, A=6.0 \text{ cm}^2,$$

$$I=2.0 \text{ cm}^2, \sigma_y=10.8 \times 10^4 \text{ N/cm}^2,$$

$$H'=8.0 \times 10^5 \text{ N/cm}^2$$

그림 9에 荷重이 작용하는 지점의 水平 및 垂直 變位-荷重 關係曲線을 나타내었으며 彈性解析과 彈塑性解析에 대응하는 極限荷重값은 각각 20.384, 16.067 · EI/L² 이었다.

5.4 單徑間 4層 뼈대構造物

그림 10은 수평 및 수직하중들을 받는 單徑間 4層 뼈대構造物의 형상과 재원을 함께 나타낸 것이다. 대변형을 고려한 단소성해석을 수행할때 수평부재는

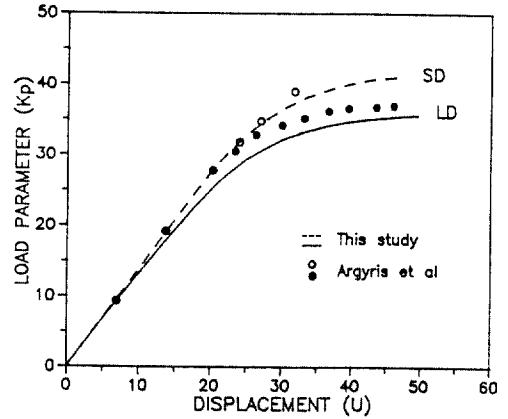


그림 7. Load-displacement curve.

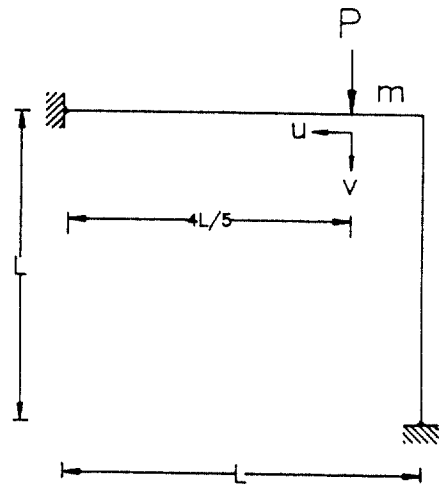


그림 8. A hinged right-angle frame.

6개, 수직부재는 2개의 요소로 분할하여 총 40개의 4절점 유한요소를 사용하였다. 그림 11은 $r=0.5, 0.24, 0.1$ 인 세가지 경우에 水平變位-荷重 關係曲線을 나타낸 것이다. 이때 소성힌지방법을 사용한 Kassimali⁽⁶⁾의 해석결과와 본 연구의 결과를 함께 표시하였다. 그림에서 보는 바와 같이 $r=0.5$ 인 경우에는 두 결과가 서로 잘 일치하고 있지만 r 값이 커짐에 따라 Kassimali⁽⁶⁾의 결과에 비하여 本研究의 결과가 강성이 더 크게 평가되는 양상을 나타내었다.

6. 結 論

連續體의 増分方程式으로 부터 剪斷變形을 고려

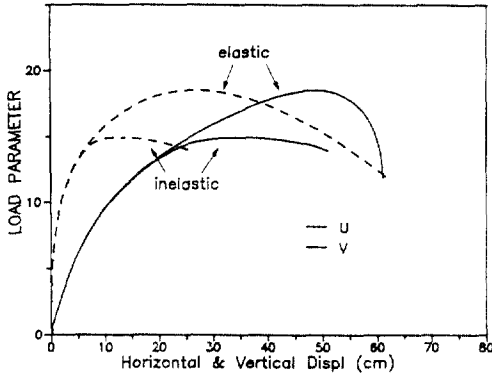


그림 9. Load-deflection curve.

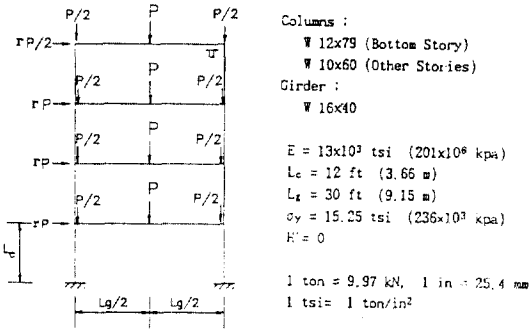


그림 10. A one bay four story frame.

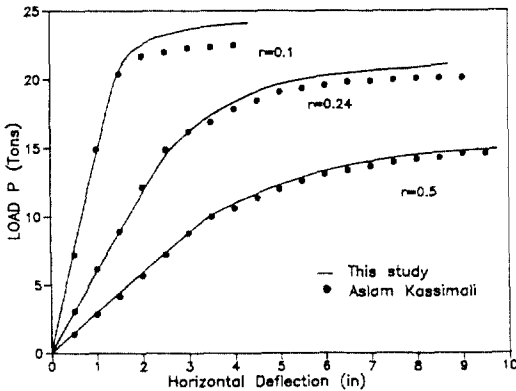


그림 11. Load-deflection curve.

하는 Isoparametric 곡선 보要素의 변位場을 도입하여 接線剛度 매트릭스를 誘導하였다. 이때 임의의 斷面形狀과 彈塑性 해석시 塑性領域을 고려하기 위하여 부재단면을 여러層으로 分割하는 Layered ap-

proach를 사용하였다. 大變形을 고려하는 경우와 이를 무시하는 경우에 平面뺀대 構造物의 彈塑性 解析을 수행하여 다음과 같은 結論을 얻었다.

1) 本 研究에서 제시한 曲線要素는 부재두께의 변화와 初期 및 變形 後에 構造物의 曲線形狀을 정확히 모델링할 수 있다.

2) 平面뺀대 構造物의 後挫屈 舉動을 포함하는 大變形 解析을 수행할 수 있다.

3) 大變形을 고려하는 경우와 이를 무시하는 두 가지 경우에 뺀대構造物의 彈塑性解析을 수행 할 수 있다.

4) 미소변형 및 대변형을 고려한 彈性解析의 경우에는 길이방향으로 2점 가우스積分을 사용한 3 절점 有限要素와 3점 가우스積分을 사용한 4 절점 有限要素가 모두 양호한 해석결과를 나타내었다. 이에 반하여 彈塑性解析의 경우에는 3점 가우스積分을 사용한 4 절점 有限要素가 만족스러운 해석 결과를 나타내었다.

參 考 文 獻

1. J. H. Batoz and G. Dhatt, "Incremental displacement algorithms for non-linear problems", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 14, 1979, pp. 1262-1267.
2. K. J. Bathe, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice-Hall, 1982, pp. 301-406.
3. D. R. J. Owen and E. Hinton, "Finite Elements in Plasticity", Pineridge Press, 1980.
4. K. S. Surana and R. M. Sorem, "Geometrically non-linear formulation for three dimensional curved beam elements with large rotations", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 28, 1989, pp. 43-73.
5. J. H. Argyris, B. Boni, U. Hincleniang, and M. Kleiber, "Finite element analysis of two- and three- dimensional elasto-plastic frames - the natural approach", *Comp Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 35, 1982, pp. 221-248.
6. A. Kassimali, "Large deformation analysis of elastic-plastic frames", *J. Struct. Engrg.*, ASCE, Vol. 109, No. 8, 1983, pp. 1869-1886.

(接受 : 1992. 12. 22)