

# 應力近似解法을 이용한 平面트러스構造物의 形狀最適化에 관한 研究

## Optimization of the Truss Structures Using Member Stress Approximate method

李奎遠\* · 柳熙仲\*\*

Lee, Gyu Won · You, Hee Jung

### Abstract

In this research, configuration design optimization of plane truss structure has been tested by using decomposition technique.

In the first level, the problem of transferring the nonlinear programming problem to linear programming problem has been effectively solved and the number of the structural analysis necessary for doing the sensitivity analysis can be decreased by developing stress constraint into member stress approximation according to the design space approach which has been proved to be efficient to the sensitivity analysis. And the weight function has been adopted as cost function in order to minimize structures.

For the design constraint, allowable stress, buckling stress, displacement constraint under multi-condition and upper and lower constraints of the design variable are considered.

In the second level, the nodal point coordinates of the truss structure are used as coordinating variable and the objective function has been taken as the weight function.

By treating the nodal point coordinates as design variable, unconstrained optimal design problems are easy to solve.

The decomposition method which optimize the section areas in the first level and optimize configuration variables in the second level was applied to the plane truss structures.

The numerical comparisons with results which are obtained from numerical test for several truss structures with various shapes and any design criteria show that convergence rate is very fast regardless of constraint types and configuration of truss structures. And the optimal configuration of the truss structures obtained in this study is almost the identical one from other results. The total weight could be decreased by 5.4% - 15.4% when optimal configuration was accomplished, though there is some difference.

### 요 지

本 研究에서는 分割技法을 이용하여 平面트러스構造物의 形狀 最適化를 試圖하였다.

\* 正會員 · 全北大學校 工科大學 土木工學科 教授

\*\* 正會員 · 湖南大學校 工科大學 土木工學科 專任講師

本 研究의 第1段階(Level 1)에서는 다른 研究와 달리 應力制約을 感度解析에 效率的이라고 알려진 設計空間法에 의해서 部材應力近似化를 하므로서 非線形最適化問題가 線形計劃問題로 變換되어 解를 效率的으로 구할 수 있고 또한 感度解析을 위한 構造解析 數를 줄일수있다. 目的函數는 構造物의 重量이 最小가 되도록 重量函數를 택하였다. 制約條件式으로는 許容應力, 挫屈應力, 變位制約 및 設計變數 上下限値制約을 附課하였고 多 載荷條件을 考慮하여 最適化問題를 形成하였다.

第2段階(Level 2)에서는 設計變數 및 調整變數를 節點座標로 하고 目的函數로는 重量函數로 하여 最適化問題를 形成하였다. 節點座標만을 設計變數로 하므로서 無制約最適化問題로 形成되므로 最適化過程이 容易하다.

本 研究의 第1段階에서는 部材應力을 近似化하여 斷面을 最適化하고 第2段階에서는 形狀만 最適化하는 分割技法을 트러스構造物에 適用한 결과 本 研究는 트러스構造物의 形態, 制約條件式에 구애받지 않고 最適解에 部材應力近似化로 인하여 效率的으로 收斂하였고 또한 他의 研究와 거의 同 一한 研究 結果를 얻었으며 形狀最適化로 트러스構造物의 重量을 5.4% - 15.4% 까지 減少시켰다.

## 1. 序 論

### 1-1. 研究方法 및 目的

大規模의 複雜한 構造物에 대한 最適設計는 設計變數와 制約條件式의 數가 많아지므로 解를 구하기가 힘들거나 때로는 막대한 計算時間이 요구되기도 하며 컴퓨터 容量이 부족한 등의 많은 問題點을 지니고 있다.

따라서 이러한 大規模의 複雜한 構造物을 最適化하는 경우에는 全體의 最適化問題를 獨立된 目的函數와 制約條件式을 갖는 여러개의 작은 部分最適化問題(Sub-Optimal Problem)로 分割하여 이 部分最適化問題의 解를 獨立的으로 구하므로서 全體 最適化問題의 最適解가 얻어지는 多段階分割技法에 관한 研究는 當연한 現狀이라 하겠다.

多段階 分割技法은 위에서 언급한 바와 같이 設計變數 및 制約條件式의 數를 縮小할 수 있어 各部分最適化에 시간을 短縮할 수 있으며 또한 各部分最適化에 效率的인 獨立된 알고리즘을 選定하므로써 全體 最適化에 필요한 時間을 短縮할 수 있는 利點도 있다.

지금까지의 多段階分割技法에는 Model調整法과 Goal調整法 및 混合調整法이 있다. Model調整法은 收斂方法이 다른 設計變數를 각각 分離하여 獨立的으로 最適化하는 方法이므로 性質이 다른 種類의 設計變數를 동시에 最適化 할 경우 解를 쉽게 구할

수 있는 利點이 있는 方法이므로, 本 研究에서는 Model調整法을 이용하여 平面트러스構造物의 形狀最適化를 試圖하고자 한다.

本 研究의 第1段階에서 目的函數는 構造物의 重量이 最小가 되도록 重量函數를 택하였다. 制約條件으로는 許容應力, 挫屈應力, 變位制約, 設計變數의 上, 下限値 및 多 載荷條件을 考慮하여 最適化問題를 形成한다.

本 研究의 第1段階(Level 1)에서는 다른 研究와 달리 應力制約 및 挫屈應力制約을 感度解析(Sensitivity analysis)에 效率的이라고 알려진 設計空間法(Design space approach)에 의해서 部材應力近似化를 하여 非線形 最適化問題를 線形計劃問題로 變換시켜 解를 效率的으로 구하고자 한다.

感度解析은 舉動空間法(Behavior space approach), 設計空間法(Design space approach), 그리고 假想荷重法(Virtual load approach)이 있다. 이 方法중 計算面에서 設計空間法이 가장 效率的임을 文獻<sup>(1)</sup>에서 알 수 있어 本 研究에서는 感度解析을 위해서 한 번의 構造解析으로 感度を 구할 수 있는 設計空間法을 利用한다.

또한 感度解析은 有限差分法으로 修行할 수 있으나 이 方法은 設計變數 보다 하나 더 많은 數 만큼의 構造解析이 필요하므로 計算面에서 대단히 非效率的인 것으로 判斷된다.

第2段階(Level 2)에서는 設計變數 및 調整變數를

節點座標로 하고 目的函數로는 重量函數로 하여 最適化 問題를 形成한다. 節點座標만을 設計變數로 하므로서 最適化的 過程이 간편한 無制約最適化 問題로 形成된다.

本 研究에서는 이상과 같이 第1段階에서는 部材 應力을 近似化하여 效率的으로 最適化하고 第2段階에서는 形狀만 最適化하는 Model調整法을 트러스 構造物의 形狀最適化에 適用하여 多段階 分割技法의 效率性을 높이는데 그 目的이 있다.

한편 本 研究의 알고리즘을 實際 몇 개의 平面 트러스構造物에 適用하여 얻은 結果로부터 本 研究의 알고리즘의 妥當性을 分析하고자 한다.

## 1-2. 研究沿革

形狀最適化는 1869년 Maxwell<sup>(2)</sup>에 의해서 처음으로 시도되었고 1904년 Michell<sup>(3)</sup>은 Maxwell의 이론을 더욱 발전시켰으며 이 研究는 간단한 應力 制約條件 및 單一載荷條件을 고려한 靜定 트러스構造物의 最小重量形狀을 解析的인 方法으로 구하였다.

1964년 Dorn Gomory와 Greenberg<sup>(4)</sup>는 單一載荷條件을 받는 트러스構造物의 原構造(ground structure)에 線形計劃法을 適用하여 最適化 過程중에 部材力이 零인 部材를 除去 함으로써 reduced optimal structure를 誘導하면서 構造物의 形狀最適化 研究에 상당한 관심을 갖게 되었다.

1969년 Dobbs와 Felton<sup>(5)</sup>은 Dorn Gomory와 Greenberg의 理論을 擴張하여 多載荷條件 應力및 挫屈應力 制約條件을 包含한 非線形最適化 問題形式에 勾配法(gradient method)를 適用하여 Dorn Gomory와 Greenberg의 研究 結果와의 差異點에 대해 考察한 것으로서 이 最適設計 方法은 일반적이며 훌륭한 數學的 計劃法이었다.

또한 이 研究는 트러스構造物의 最適形狀을 구하기 위해서 最初로 行列을 이용한 構造解析法과 非線形最適化 알고리즘을 結合시키고 있어 지금의 最適化 技法에 基礎가 되고 있다.

이상의 研究중 Schmit의 理論을 除外하고는 節點座標를 設計變數로 취급하지 않았으므로 엄밀한 意味의 形狀最適化라고는 할 수 없다.

1971년 Pedersen<sup>(6)</sup>은 部材斷面積과 節點座標를

設計變數로 하여 移動限界(move limit)를 갖는 逐次線形計劃法(SLP)에 의해 平面트러스의 形狀最適化를 最初로 試圖하였다.

이 方法은 部材斷面積 및 節點座標에 대한 許容 應力 및 挫屈應力의 設計感度(design sensitivity)를 이용하였으나 多載荷條件의 最適化는 試圖되지 않았으므로 이를 擴張하여 1972, 1973년에 感度係數(sensitivity coefficients)를 사용한 反復施行 設計法<sup>(7,8)</sup>에 의해 平面트러스 및 立體트러스의 最適形狀을 誘導하였다.

1972년 Vanderplaats와 Moses<sup>(9)</sup>는 最初로 2段階의 形狀最適設計를 取扱하였다.

제1段階에서는 節點座標에 관한 最適化問題를 勾配方向으로 目的函數를 修正하는 소위 最急降下法(steepest descent method)의 技法에 의한 形狀最適化를 시도하고 제2段階에서는 應力比法(stress-ratio method)과 Zoutendijk의 許容方向法<sup>(10)</sup>을 修正한 알고리즘으로 多制約條件下의 트러스構造物의 斷面을 最適化하였다.

1975년 Kirsch<sup>(11)</sup>는 Model 調整法 및 Goal 調整法으로 全體構造를 여러개의 部分構造로 分割하는 理論을 紹介하였고 應力制約만을 갖는 간단한 靜定 트러스構造物에 대해 two levels 技法으로 各各 分割最適化를 實施하였다.

그래서 1980년에는 위의 研究를 확장하여 AISC (the american institute of steel construction) 示方書의 挫屈應力에 관한 設計規定을 만족하는 最適解를 Kuhn-Tucker 條件에 의해 誘導하였다. 그러나 多載荷條件 및 變位制約을 考慮한 形狀最適化는 施行할 수가 없었다.<sup>(12)</sup>

1978년 Schmit<sup>(13)</sup>은 挫屈應力을 包含시킬 수 있는 多段階分割 最適化 技法을 誘導하였다.

1981년 Imai 및 Schmit<sup>(14)</sup>는 近似法과 數學的計劃法을 調和한 乘數法(multiplier method or primal and dual method)에 의해서 斷面과 形狀을 同時에 最適化하였으며 設計感度は 中央差分法에 의해서 구하였다.

1983년 Topping<sup>(15)</sup>은 形狀最適化에 대한 現況을 詳細히 紹介하고 있으며, Kirsch<sup>(16)</sup>는 Taylor級數를 이용하여 近似的으로 變位를 구하여 形狀最適化를 試圖하였다.

1986년 Kuritz<sup>(17)</sup>는 볼록線形化技法(convex linearization technique)을 利用하여 單一載荷條件을 고려한 平面트러스構造物의 最適形狀을 求하였다.

1987년 Vanderplaats와 Salajegheh<sup>(18)</sup>는 部材力을 Taylor定理를 利用하여 近似的으로 構造解析方法을 形成하였고 이 近似化된 部材力들을 斷面積으로 나누어 近似化된 部材應力을 求하였다. 이 方法은 Schmit와 Miura에 의해서 처음으로 利用되었던 應力을 직접 線形化하는 方法보다도 매우 효율적이었다고 判明되었다.

1988년 Hansen과 Vanderplaats<sup>(19)</sup>는 近似構造解析法으로 平面트러스構造物의 最適形狀을 誘導하는 方法을 提示하였다.

1990년 Murotsu<sup>(20)</sup>는 平面트러스構造物의 System破壞確率을 고려한 幾何學的 形狀最適化를 乘數法(multiplier method)로 試圖하고 있다.

1990년 Vanderplaats와 Han<sup>(21)</sup>은 部材力近似解法에 의한 平面트러스構造物의 形狀最適化를 실시하였다. 여기서 句配는 有限差分法을 使用하였다.

國內의 研究로는 1980年 下位段階에서는 幾何學的 形狀을 固定시킨 狀態에서 SUMT法에 의한 Modified Newton-Raphson 法의 適用으로 平面트러스 部材 斷面積의 最適化를 上位段階에서는 句配를 計算하지 않고 解를 求하는 Rosenbrock法<sup>(22)</sup>의 適用으로 平面트러스構造物의 形狀最適化를 可能케 하는 多段階 形狀最適化 알고리즘을 誘導하였다.<sup>(23,24)</sup> 그 以後 多様な 構造物에 多様な 理論을 利用하여 1983년에는 確率制約을 考慮한 平面트러스構造物의 形狀最適化에 관한 研究<sup>(25)</sup>, 幾何的計劃法에 의한 鋼材트러스構造物의 形狀最適化에 관한 研究<sup>(26)</sup>, 1985년에는 두 設計空間에 의한 平面트러스構造物의 形狀最適化 研究<sup>(27)</sup>, 1986년에는 分割最適化 技法에 의한 平面트러스構造物의 形狀最適化에 관한 研究<sup>(28)</sup>, 케이블의 最適引張力을 考慮한 斜張橋의 形狀最適化에 관한 研究<sup>(29)</sup>, 1987년에는 破壞確率을 考慮한 平面트러스構造物의 形狀最適化에 관한 研究<sup>(30)</sup>, 1989년에는 多段階 分割法에 의한 鐵筋콘크리트 樑構造物의 最適化에 관한 研究<sup>(31)</sup>, 1990년에는 靜的 및 固有振動數 制約條件式을 考慮한 平面트러스構造物의 形狀最適化에 관한 研究<sup>(32)</sup>, 1992년에는 3段階 分割技法에 의한

平面트러스構造物의 形狀最適化에 관한 研究<sup>(33)</sup>가 發表되었다.

이상의 文獻調査 結果 部材應力을 近似化하여 形狀最適化를 試圖한 研究를 찾아볼 수 없었다.

따라서, 本 研究에서는 다른 研究와 달리 第1段階에서는 部材應力을 近似化하여 最適化를 실시하므로써 多段階分割技法에 의한 平面트러스構造物의 形狀最適化의 效率을 높이고자 한다.

## 2. 本 研究의 部材應力近似解法을 이용한 分割最適化 問題 型式

本 研究의 2段階의 最適化 問題型式은 多載荷條件式과 함께 다음과 같이 表示할 수 있다.

### (1) 第1段階 最適化問題 型式

本 研究의 第1段階에서는 部材의 斷面積을 設計變數로 하고 目的函數는 重量函數로, 制約條件式으로는 許容應力, 挫屈應力 및 變位制約을 고려하여 部材應力을 近似化하면 다음과 같은 最適化問題로 形成된다.

$$\text{Minimize } Z_1(\delta \vec{A}) = \text{Weight} = [\rho] \{ \vec{A}_0 \} \{ L \} + [\rho] \{ \delta A \} \{ L \} \quad (2-1)$$

$$\text{subject to } : \{ \sigma_{ca} \} \leq \{ \sigma \} \leq \{ \sigma_{ta} \} \quad (2-2)$$

$$[R] \{ \sigma \} \leq \{ \sigma_{ba} \} \quad (2-3)$$

$$\{ Z \} \leq \{ Z^L \} \leq \{ Z^U \} \quad (2-4)$$

$$\{ \delta A \}^L \leq \{ \delta A \} \leq \{ \delta A \}^U \quad (2-5)$$

여기서,  $\{ Z \}$  :  $(n \times 1)$ 의 變位行列

$r = 1, \dots, NL$

### ① Euler의 挫屈應力

$$\sigma_{bai} = (\alpha_i \cdot \pi^2 \cdot E \cdot A_i) / L_i^2$$

$\sigma_{bai}$  :  $i$  部材의 挫屈應力

$\alpha_i$  : 部材의 形狀에 關係되는 常數

### ② 道路橋 標準示方書의 挫屈應力

$$\sigma_{bai} = a_i + b_i(L_i/e_i A_i \alpha_i)$$

$a_i, b_i, e_i$  : 示方書에서 規定하는 係數

本 研究에서는 Taylor級數의 1次項만 考慮하여 應力을 近似化하면 다음과 같다.

$$\{ \sigma \} = \{ \sigma_0 \} + [ \vec{\nabla} \sigma ] \{ \delta A \} \quad (2-6)$$

$$\text{그리고 } [ \vec{\nabla} \sigma ] = [ \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial A_1} \right\}, \dots, \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial A_m} \right\} ]$$

$$\left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial A_i} \right\} = \left( \frac{\partial \sigma_1}{\partial A_i}, \dots, \frac{\partial \sigma_1}{\partial A_i} \right)$$

$$\left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial A_i} \right\} = \frac{\partial [K]}{\partial A_i} [\beta] [Z]^T + [K] [\beta] \frac{\partial [Z]}{\partial A_i} \quad (2-7)$$

$$\{\delta A\} = (A) - \{A_0\}$$

\{\delta A\}^L : \{\delta A\}의 下限值

\{\delta A\}^U : \{\delta A\}의 上限值

[R] : (f \times f)의 壓縮部材 抽出行列

### 1). 設計變數間의 結合

本 研究에서는 設計空間을 縮小시키기 위하여 다음과 같이 設計變數의 關係를 設定하였다.

$$\{X\} = [b]\{Y\} \quad (2-8)$$

例를 들어, 그림 4-4(a)의 18部材 트러스의 設計變數는 18部材 各各의 斷面積이 된다. 그러나, 設計空間을 縮小하기 위하여 設計變數를 다음과 같이 4개 組로 나누었다.

$$1) A(1) = A(4) = A(8) = A(12) = A(16)$$

$$2) A(2) = A(6) = A(10) = A(14) = A(18)$$

$$3) A(3) = A(7) = A(11) = A(15)$$

$$4) A(5) = A(9) = A(13) = A(17)$$

따라서,

$$\{X\} = (A(1), \dots, A(18))^T$$

$$[b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{Y\} = (A(1), A(2), A(3), A(5))^T \text{로 된다.}$$

### 2) 設計空間法에 의한 感度解析法

本 研究의 第1段階에서 設計空間法에 의한 部材 應力의 近似化過程을 文獻<sup>(36)</sup>의 기호에 따라 誘導하면 다음과 같다.

트러스構造物의 構造解析을 위한 方程式은 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$[\beta]^T [\bar{k}] [\beta] [Z] = \{F\} \quad (2-9)$$

여기서,

$$[\bar{k}] = \begin{bmatrix} \frac{EA_1}{l_1} & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \frac{EA_m}{l_m} \end{bmatrix}$$

$$\{F\} = \text{作用荷重行列} = (F_1, \dots, F_n)^T$$

임의의 假想變位  $\bar{Z}$ 를 式 (2-9)의 양 변에 곱하여 다음과 같은 變分方程式(Variational equation) (2-10)을 얻는다.

$$\{\bar{Z}\}^T [\beta]^T [\bar{k}] [\beta] \{\bar{Z}\} = \{Z\}^T \{F\} \quad (2-10)$$

$$\text{for all } \{\bar{Z}\} \in \{Z\}$$

여기서,  $\{\bar{Z}\}$  : 移動可能한 變位의 行列

$$\text{式 (2-10)에서 } a(\bar{Z}, Z) = \{\bar{Z}\}^T [\beta]^T [\bar{k}] [\beta] \{\bar{Z}\} \quad (2-11)$$

$$L(\bar{Z}) = \{Z\}^T \{F\} \quad (2-12)$$

라 表示할 수 있다. 여기서  $a(\bar{Z}, Z)$ 를 에너지 雙1次形(Energy Bilinear form),  $L(\bar{Z})$ 를 荷重1次形(Load Linear form)이라고 한다.

따라서, 變分方程式 (2-10)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$a(\bar{Z}, Z) = L(\bar{Z}) \quad (2-13)$$

方向導函數를 구하기 위해서 다음 式을 정의하자.

$$b\tau = b + \tau \delta_b, \tau > 0 \quad (2-14)$$

여기서,  $b$  : 設計變數

$\tau$  : 媒介變數

$\delta_b$  : 任意的 設計變數의 變分

變位  $Z$ , 에너지 雙1次形  $a(\bar{Z}, Z)$  및 荷重1次形  $L(\bar{Z})$ 의 方向導函數는 式(2-14)을 이용해서 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$Z' = Z'(b, \delta_b) = \left. \frac{d}{d\tau} Z(b + \tau \delta_b) \right|_{\tau=0} = \frac{d\{Z\}}{db} \delta_b$$

$$a'(\bar{Z}, Z) = \left. \frac{d}{d\tau} a_b + \tau \delta_b(\bar{Z}, Z) \right|_{\tau=0} =$$

$$\frac{\partial}{\partial b} (\{\bar{Z}\}^T [\beta]^T [\bar{k}] [\beta] \{\bar{Z}\}) \delta_b$$

$$L'(\bar{Z}) = \frac{d}{dt} l_b + \tau \delta_b \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial}{\partial b} (\{\bar{Z}\}^T \{F\}) \delta_b$$

여기서,  $\{\bar{Z}\}$  : 常數를 의미

이상의 方向導函數의 基礎 및 微分의 連鎖法(Chain rule)을 利用하면 式 (2-13)의 總變分(Total variational)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$a(\bar{Z}, Z') = -a'(\bar{Z}, \bar{Z}) + L'(\bar{Z}) \quad (2-15)$$

$$\text{여기서, } a(\bar{Z}, Z') = \{Z\} [\beta]^T [k] [\beta] \frac{\partial}{\partial b} \{Z\} \delta_b$$

應力感度  $[\nabla \sigma]$  식 (2-7)을 計算하기 위한 變分方程式 式 (2-15)은 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$a_s(\bar{Z}, Z') = -a'_s(\bar{Z}, Z') + L'(\bar{Z}) \quad (2-16)$$

여기서,

$$a_s(\bar{Z}, Z') = \{\bar{Z}\} [k] [\beta] \frac{\partial}{\partial b} \{Z\} \delta_b$$

$$a'_s(\bar{Z}, Z') = \{Z\} \frac{\partial}{\partial b} [k] \delta_b [\beta] \{Z\}$$

式 (2-16)로부터 變位의 句配  $\left\{ \frac{\partial Z}{\partial A_i} \right\}$ 를 얻는다.

이 變位의 句配를 式 (2-7)에 代入하여 應力感度  $[\nabla \sigma]$ 를 얻게 된다.

## (2) 第2段階 最適化問題 型式

本 研究의 제2段階에서는 節點座標를 設計變數로 하고 目的函數는 重量函數로 하면 最適化問題 型式은 다음과 같다.

$$\text{Minimize : } Z_2(Y) = \text{Weight} = [\rho] \{A\} \{L(Y)\} \quad (2-17)$$

$$\text{subject to : } \{Y\}^L \leq \{Y\} \leq \{Y\}^U \quad (2-18)$$

여기서,  $\{A\}$  : 第1段階에서 얻은 設計變數의 行列 =  $\{A_0\} + \{\delta A\}$

## 3. 最適化 알고리즘

2段階分割最適化로 構成되어있는 本 研究의 最適化 알고리즘의 흐름도는 그림 (3-1)와 같다.

## 4. 本 研究 알고리즘의 適用例 및 結果分析

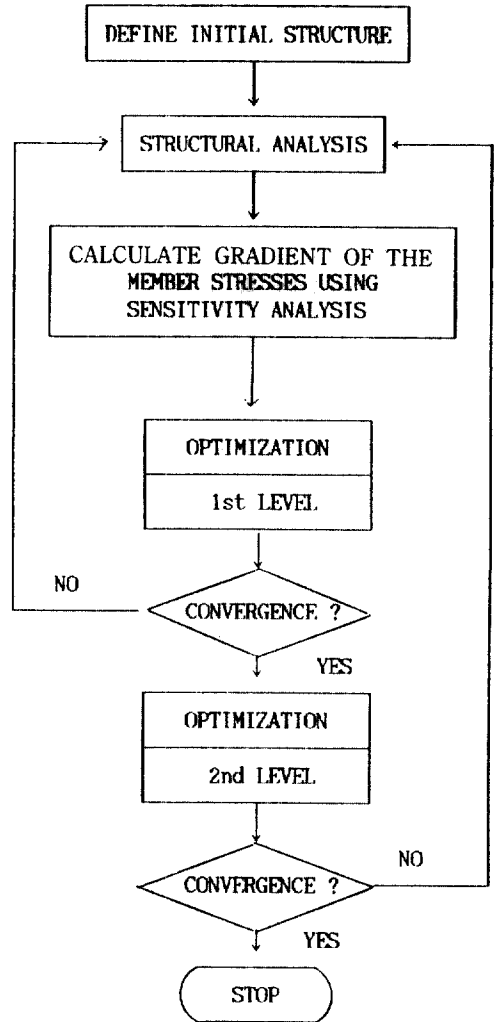


그림 3-1. 本 研究의 最適化 過程 흐름도

本 研究의 알고리즘을 分析하기 위한 適用例로는 文獻(19,26,32,33,34,35)에서 가장 많이 引用되는 2 種의 平面트러스構造物을 選定한다.

첫번째 適用例로는 文獻(32,35)에서 適用한 7部材 트러스에 대하여 多 載荷條件 및 應力制約條件을 考慮(Case 1)하여 最適解를 구하고, 다음에는 應力制約 및 變位制約을 考慮한 경우(Case 2)에 대해서 最適解를 구하여 文獻(32,35)의 研究方法로 구한 最適解와 比較한다.

두번째 適用例로는 文獻(19,33)에서 適用한 18部材 트러스에 應力制約을 고려(Case 1)하여 最適解를

表 4-1. 7部材 트러스의 設計條件

設計條件	文獻 <sup>(32,35)</sup> 및 本 研究			
	Case 1		Case 2	
	X方向	Y方向	X方向	Y方向
第1載荷條件(節點4)	0.	40.0(Kips)	0.	40.0(Kips)
第2載荷條件(節點5)	0.	40.0(Kips)	0.	40.0(Kips)
許容應力(壓縮)	- 15(Ksi)			
許容應力(引張)	+ 20(Ksi)			
變位(Y方向,節點5)			30(in)	
彈 性 係 數	1000(Ksi)			

表 4-2. 文獻<sup>(32,35)</sup>와 本 研究의 結果比較

比較內容	Case1		Case2	
	目的函數 in <sup>3</sup>	最適形狀 in	目的函數 in <sup>3</sup>	最適形狀 in
文獻 <sup>(32)</sup>	4879.23	形狀 固定	5303.96	形狀 固定
文獻 <sup>(35)</sup>	4623.06	X <sub>5</sub> = 371.210 Y <sub>5</sub> = 194.720	5074.56	X <sub>5</sub> = 389.95 Y <sub>5</sub> = 159.46
本 研究	4616.8	X <sub>5</sub> = 382.294 Y <sub>5</sub> = 186.046	5033.56	X <sub>5</sub> = 334.893 Y <sub>5</sub> = 181.373

구하고, 또한 應力制約, 挫屈應力制約(Case 2)을 考慮한 경우에 대해서 얻은 結果를 文獻<sup>(19,33)</sup>의 研究 結果와 比較하여 本 研究의 妥當性을 分析한다.

이상의 2種 트러스構造物로부터 얻은 本 研究의 結果值과 文獻<sup>(19,32,33,35)</sup>의 結果值를 比較 檢討함으로써 本 研究의 效率性 및 適用性을 檢討한다.

4-1. 7 部材 트러스

文獻<sup>(26,32,34,35)</sup> 및 本 研究에서 適用한 그림 4-2(a)와 같은 7部材 트러스의 設計條件은 表 4-1에 收錄하였다.

設計條件 Case 1과 Case 2에 대한 文獻(32,35)과 本 研究의 結果 比較는 表 4-2에 收錄하였고 圖示하면 그림 4-2(b),(c),(d),(e)와 같다.

4-2. 18部材 트러스

文獻<sup>(19,33)</sup> 및 本 研究에서 適用한 그림 4-4(a)와

目的函數(in<sup>3</sup>)

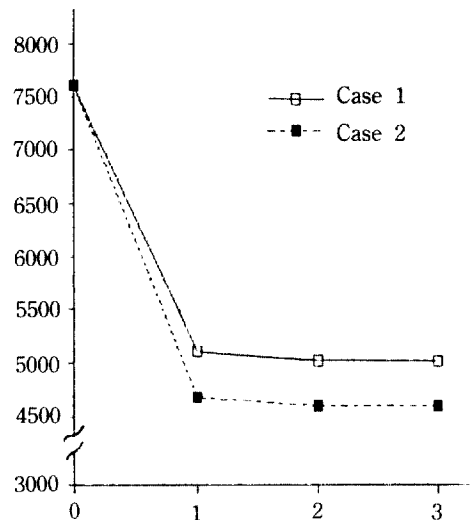
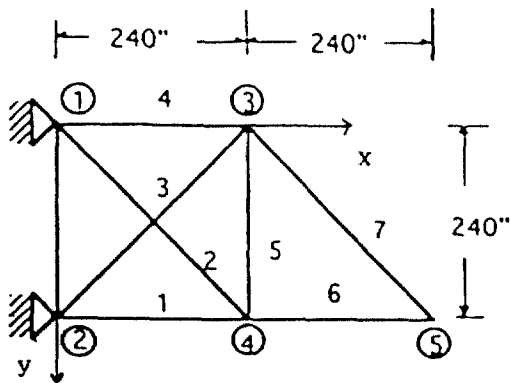
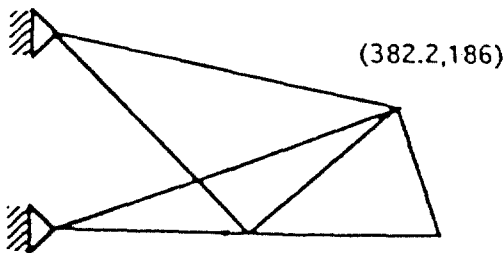


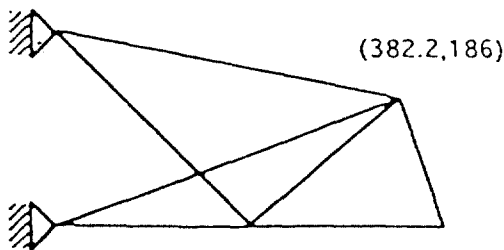
그림 4-1. 反復回數에 따른 目的函數(Case1, Case2).



(a) 適用構造 模型



(b) 本 研究의 結果(Case 1)



(c) 本 研究의 結果(Case 2)

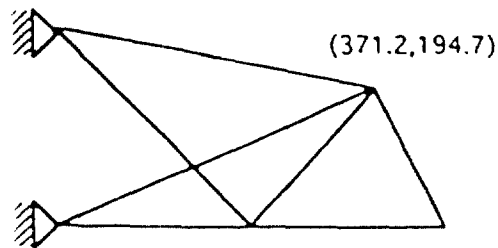
같은 18部材 트러스의 設計條件은 表 4-3에 收錄하였다.

設計條件 Case 1과 Case 2에 대한 文獻<sup>(19,33)</sup>과 本 研究의 結果 比較는 表 4-4에 收錄하였고 圖示하면 그림 4-4(b),(c),(d),(e),(f),(g)와 같다.

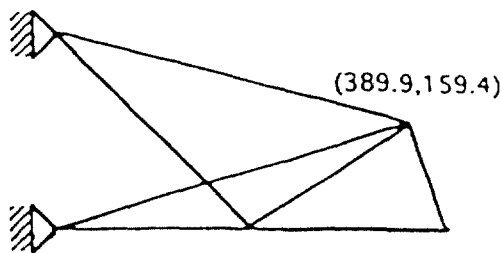
#### 4-3. 結果分析

本 研究의 分割技法을 實際構造物에 適用하여 얻어진 結果를 分析하면 다음과 같다.

1) 本 研究에서는 多載荷條件 및 여러가지의 制



(d) 文獻<sup>(32)</sup>의 結果(Case 1)



(e) 文獻<sup>(32)</sup>의 結果(Case 2)

그림 4-2. 文獻<sup>(32)</sup> 및 本 研究의 結果.

約條件을 考慮한 트러스構造物의 形狀最適化를 試圖하였다. 그 結果 그림 4-1,4-3에서 보는 바와 같이 最適形狀은 考慮한 制約條件에 따라 相異함을 알 수 있다.

2) 7部材 트러스의 Case 1, Case 2는 文獻<sup>(32,35)</sup>의 結果値와 거의 同一함을 表4-2로부터 알 수 있다. 따라서 本 研究의 알고리즘은 適用性이 있다고 判斷된다.

3) 本 研究와 文獻<sup>(35)</sup>의 研究를 比較한 結果 形狀은 다르나 目的函數는 거의 同一한 結果를 얻었다. 따라서 不靜定構造物에 대한 形狀最適化의 最適解는 局部解(Local minimum)에 收斂함을 알 수 있다.

4) 그림 4-1, 그림 4-3에서 보는 바와 같이 3회이 내의 反復施行으로 最適解에 빨리 收斂함을 알 수 있다. 따라서 應力近似解法의 最適化는 全反復回數만 考慮할 때 本 研究方法은 效率性이 있다고 判斷된다.

5) 表4-2, 表4-4에서 보는 바와 같이 文獻<sup>(19,32,33,35)</sup>의 研究와 本 研究의 結果를 分析하여 보면 最適形狀은 약간의 差異는 있지만 目的函數의 값은 크게 差異가 없다. 그러므로 最適化 基準인 目的函數값에 差異가



表 4-3. 18部材 트러스의 設計條件

設計條件	文獻 <sup>(19,33)</sup> 및 本 研究			
	Case 1		Case 2	
	X方向	Y方向	X方向	Y方向
載荷條件 (節點1)	0.	-20.00	0.	-20.00
(節點2)	0.	-20.00	0.	-20.00
(節點4)	0.	-20.00	0.	-20.00
(節點6)	0.	-20.00	0.	-20.00
(節點8)	0.	-20.00	0.	-20.00
許容應力(Psi)	+ 20000.			
挫 屈 應 力(Psi)	EULER의 挫屈應力			
彈性係數(Psi)	$1.0 \times 10^7$			
單位 重量 (lb/in <sup>3</sup> )	0.1			

表 4-4. 文獻<sup>(19,33)</sup>와 本 研究의 結果 比較

比較內容	Case1		Case2	
	目的函數 (lb)	最適形狀 (in)	目的函數 (lb)	最適形狀 (in)
文獻 <sup>(19)</sup>	3906.8	X <sub>3</sub> = 881.42 Y <sub>3</sub> = 178.76 X <sub>5</sub> = 628.90 Y <sub>5</sub> = 124.92 X <sub>7</sub> = 390.54 Y <sub>7</sub> = 66.79 X <sub>9</sub> = 313.16 Y <sub>9</sub> = 45.03	4505.0	X <sub>3</sub> = 881.42 Y <sub>3</sub> = 178.76 X <sub>5</sub> = 628.90 Y <sub>5</sub> = 124.92 X <sub>7</sub> = 390.54 Y <sub>7</sub> = 66.79 X <sub>9</sub> = 313.16 Y <sub>9</sub> = 45.03
文獻 <sup>(33)</sup>	4016.8	X <sub>3</sub> = 748.99 Y <sub>3</sub> = 110.12 X <sub>5</sub> = 539.52 Y <sub>5</sub> = 156.00 X <sub>7</sub> = 317.37 Y <sub>7</sub> = 221.56 X <sub>9</sub> = 262.86 Y <sub>9</sub> = 235.90	4053.7	X <sub>3</sub> = 801.62 Y <sub>3</sub> = 87.103 X <sub>5</sub> = 563.75 Y <sub>5</sub> = 133.90 X <sub>7</sub> = 329.75 Y <sub>7</sub> = 222.62 X <sub>9</sub> = 263.20 Y <sub>9</sub> = 250.00
本 研究	4046.0	X <sub>3</sub> = 795.50 Y <sub>3</sub> = 86.001 X <sub>5</sub> = 422.52 Y <sub>5</sub> = 177.00 X <sub>7</sub> = 336.37 Y <sub>7</sub> = 200.56 X <sub>9</sub> = 243.86 Y <sub>9</sub> = 235.90	4053.7	X <sub>3</sub> = 809.92 Y <sub>3</sub> = 69.413 X <sub>5</sub> = 551.70 Y <sub>5</sub> = 122.40 X <sub>7</sub> = 353.35 Y <sub>7</sub> = 188.42 X <sub>9</sub> = 223.80 Y <sub>9</sub> = 237.94

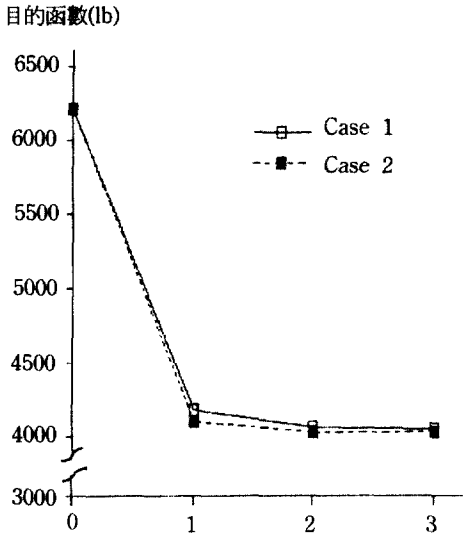
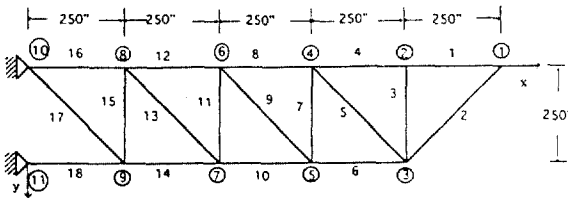
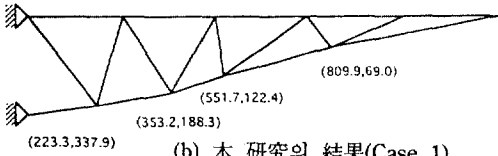


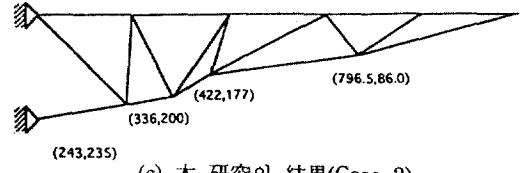
그림 4-3. 反復回數에 따른 目的函數(Case1, Case2).



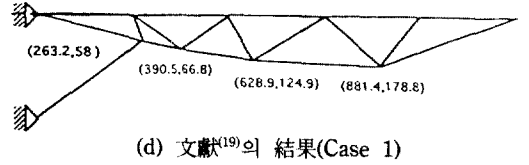
(a) 適用構造 模型



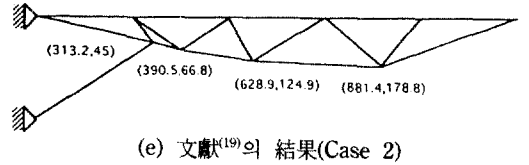
(b) 本 研究의 結果(Case 1)



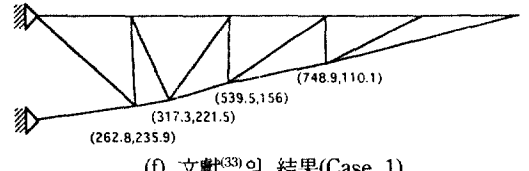
(c) 本 研究의 結果(Case 2)



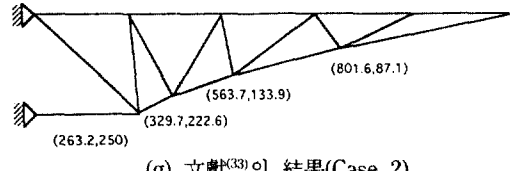
(d) 文獻<sup>(19)</sup>의 結果(Case 1)



(e) 文獻<sup>(19)</sup>의 結果(Case 2)



(f) 文獻<sup>(33)</sup>의 結果(Case 1)



(g) 文獻<sup>(33)</sup>의 結果(Case 2)

그림 4-4. 文獻<sup>(19,23)</sup> 및 本 研究의 結果.

없으므로 妥當性이 있다고 생각된다.

6) 本 研究 알고리즘은 트러스構造物의 形態, 規模, 載荷條件, 制約條件式에 구애 받지 않고 最適解에 收斂함을 알 수 있었으므로 大型構造物의 最適化에

도 도움이 될 것으로 判斷된다.

7) 數値例를 통하여 同一한 許容條件下에서 트러스의 幾何學의 形態를 固定시키고 斷面積만을 最適化 한 경우보다 트러스의 形狀까지도 最適化한 경우에는 트러스 初期의 幾何學의 形態와 設計條件에

表 4-5. 形狀이 固定된 最適化와 形狀最適化의 目的函數 比較表

構造形態	Case	形狀固定 最適化	形狀 最適化	重量 減少率(%)
7部材	1	4878.67	4616.80	5.37
	2	5407.43	5033.56	6.91
18部材	1	4780.32	4046.0	15.36
	2	4780.33	4053.7	15.2

따라 다소 차이가 있지만 본 數値例만을 基準으로 할 때 表 4-5와 같이 大略 5.37%에서 15.36% 정도로 重量이 크게 減少한다는 事實을 알 수 있으므로 본 研究 方法에 의한 形狀最適化는 트러스構造物의 經濟的인 設計에 도움을 줄 것으로 생각된다.

8) 本 研究의 알고리즘은 多段階分割最適化이므로 航空機와 같이 技能이 다른 여러 部分構造로 構成되어 最適化基準이 部分構造物마다 다른 構造物의 最適化에 適合하다고 判斷된다.

## 5. 結 論

本 研究에서는 許容應力, 挫屈應力 및 變位등의 制約條件과 多載荷條件을 考慮한 트러스構造物의 形狀을 最適化하기 위하여 第一段階에서 部材應力을 近似化하여 斷面積을 最適化하고 第二段階에서는 形狀을 最適化하는 分割技法을 適用하였다. 2種類 트러스의 構造模型에 本 研究의 最適化 알고리즘을 適用하여 얻어진 研究結果를 要約하면 다음과 같다.

1) 第1段階에서는 部材應力을 近似化하므로 非線形計劃問題가 線形計劃問題로 變換되므로 解를 얻기가 容易하고 設計空間法에 의해서 感度解析을 하였으므로 構造解析의 數를 縮小시킬수있어 最適化에 필요한 時間을 短縮할수있다.

2) 다른 研究의 結果値와 本 研究의 알고리즘으로 얻은 結果値를 比較한 結果는 目的 函數값이 거의 一致하므로 本 研究 알고리즘은 妥當性이 있다고 判斷된다.

3) 本 研究 알고리즘을 트러스構造物의 形狀最適化에 適用하여본 結果 3회 以內의 反復施行으로 最適解에 빨리 收斂한다는 事實을 알았다. 따라서 反復回數만 고려할 때 本 研究 알고리즘은 效率性이 좋다고 判斷된다.

4) 本 研究 알고리즘은 트러스構造物의 形態, 規模, 載荷條件, 制約條件式에 구애받지 않고 最適解에 收斂하였고 複雜한 構造物의 最適化 問題도 比較的 簡便한 最適化問題로 形成되므로 大形構造物의 最適化에도 도움이 될 것으로 判斷된다.

5) 同一한 設計條件下에서 트러스의 幾何學的 形態를 固定시키고 斷面積만을 最適化한 경우에는 트러스의 初期의 幾何學的 形態와 設計條件에 따라 多少 差異가 있지만 重量을 相當히 減少시킬 수

있었으므로 本 研究에 의한 트러스 構造物의 形狀最適化는 트러스構造物의 經濟的인 設計에 도움이 된다고 생각한다.

6) 本 研究의 알고리즘은 多段階分割最適化이므로 航空機와 같이 技能이 다른 여러 部分構造로 構成되어 最適化基準이 部分構造物마다 다른 構造物의 最適化에 適合하다고 判斷된다.

## 參 考 文 獻

1. J. S. Arora and E. J. Haug: "Method of Design Sensitivity Analysis in Structural Optimization", *AIAA J.*, Vol. 17, Sept., 1979, pp. 970-974.
2. Maxwell, C., *Scientific Papers*, Vol. 2, 1869, pp. 175-177.
3. Michell, A. G. M., "The Limits of Economy of Materials in Frame Structures", *Philosophical Magazine, Series 6*, Vol. 8, No. 47, November 1904, pp. 589-595.
4. Dorn, W. s., Gomory, R. E., and Greenberg, H. J., "Automatic Design of Optimal Structures", *J. de Mechanique*, Vol. 3, 1964, pp. 2105-2118.
5. Dobbs, M. W. and Felton, L. P., "Optimization of Truss Geometry", *J. of Structural Division*, ASCE, No. ST10, October 1969, pp. 2105-2118.
6. Pederson, P., "On the Minimum Mass Layout of Trusses", *AGARD Symposium on Structural Optimization*, Istanbul, Turkey, October 1969, AGARD-AG-149-71, Feb. 1971.
7. Pedersen, P., "On the Optimal Layout of Multi-Purpose Trusses," *Computers and Structures*, Vol. 2, 1972.
8. Pedersen, P., "Optimal Joint Positions for Space Trusses," *Journal of the Structural Divisions*, ASCE, Proc. Vol. 99, ST12, 1973.
9. Vanderplaats, G. N. and Moses, F., "Automated Design of Trusses for Optimum Geometry," *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 98, No. ST3, Proc. Paper 8795, Mar., 1972, pp. 671-690.
10. Zoutendijk, J., "Methods of Feasible Direction," Elsevier Ams der dam. 1960.
11. Kirsch, U., Reiss, M. and Shamir, U., "Optimum Design by Partitioning into substructures," *Journal of the Structural Division*, Proceedings of the ASCE, Jan. 1972.
12. Spillers, W. R. and George E. K., "Geometric Op-

- timization Using Simple Code Representation," *Journal of Structural Division*, ASCE, Vol. 106, No. ST5, pp. 1435-1442.
13. Schmit, L. A., and Ramanathan, R. K., "Multilevel approach to Minimum Weight Design Including Buckling Constraints," *AIAA Journal*, Vol. 16, No 2, Feb. 19.
  14. Kanji Imai, and Schmit, F., "Configuration Optimization of Trusses," *Journal of Structural Division*, ASCE, Proc. Vol. 107, No. ST 5, May, 1981, pp. 745~756.
  15. Topping, B. H. V., "Shape Optimization on Skeletal Structures : a Review" *Journal of the Structural Division*, ASCE Vol. 109 . No. 8, proc. Paper 18187 August., 1983, pp. 1933~1951.
  16. Kirsch, U. and Toledano, G. "Approximate Reanalysis for Modifications of Structural Geometry," *Journal of Computers and the Structures*, Vol. 16, No. 1 ~ 4, 1983, pp. 269~277.
  17. Kuritz, S. P., *Configuration Optimization of Trusses using Convex Linearization Techniques*, Masters Thesis, University of California, Losangeles, 1986.
  18. Vanderplaats, G. N., and Salajegheh, e., "A New Approximation Method For Stress Constraints Strustructural Synthesis", *AIAA Journal*(to appear).
  19. Hansen, S. R. and Vanderplaats, G. N., "An Approximation Method for Configuration optimization of Trusses", *AIAA/ASME/ASCE/AHS 29th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference Part 3*, 1988, No. 88-2432.
  20. Y. Murotsu and S. Shao, "Optidmum Shape Design of Truss Structures based on Reliability", *Structural Optimization*, Vol 1, 1990, pp. 65-76.
  21. G. N. Vanderplaats and S. H. Hans Arch shape optimization using force approximation method, *Structural Optimization J. Vol. 2*, 193-201, 1990.
  22. James L. K., "Optimization Techniques with Fortran," McGraw-Hill Book Company, 1973.
  23. 李奎遠, 邊根周, 黃鶴周: "SUMT法에 의한 鋼材 트러스의 最適設計에 관한 研究", *大韓土木學會 論文集* 第28卷, 第4號, 1980. 8, pp. 119~130.
  24. 李奎遠: "平面트러스構造물의 形狀最適化에 관한 研究", 延世大學校 大學院 (博士學位 論文)1980, 2.
  25. 裴主星: "確率制約을 考慮한 平面트러스構造물의 形狀最適化에 관한 研究", 全北大學校 大學院(博士學位 論文). 1983, 2.
  26. 鄭海駿, 李奎遠: "幾何的 計劃法에 의한 鋼材 트러스構造물의 形狀最適化에 관한 研究", *大韓土木學會 論文集*, 第3卷, 第2號, 1983, 6, pp31-34.
  27. 한상훈: "두 設計空間에 의한 아치 構造의 形狀最適化 研究", 延世大學校 大學院 (博士學位 論文). 1985, 6.
  28. 金成完, 李奎遠: "分割最適化 技法에 의한 트러스 構造물의 形狀最適化에 관한 研究", *大韓土木學會 論文集*, 第6卷, 第2號, 1986, 6, pp1-15.
  29. 김경승: "케이블의 最適引張力을 考慮한 斜張橋의 形狀最適化에 관한 研究", 延世大學校 大學院(博士學位 論文) 1988, 6.
  30. 李奎遠, 林秉龍: "破壞確率을 고려한 트러스構造물의 形狀最適化", *大韓土木學會 論文集*, 第7卷, 第3號, 1987, 9.
  31. 최홍식: "多段階 分割法에 의한 鐵筋콘크리트 뼈대構造물의 最適化에 관한 研究", 延世大學教 大學院(博士學位論文), 1989.
  32. Reinschmidt, Kenneth F. and Russell, M. D., "Linear Methods in Structural Optimization," The Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, *Reserch Report R70-41*, July, 1970.
  33. 李奎遠, 宋基範: "3段階 分割技法에 의한 平面트러스構造물의 形狀最適化에 관한 研究", *大韓土木學會 論文集* 第12卷 第3號, 1992, pp. 39-55.
  34. 李奎遠, 林正煥: "混合調整法에 의한 平面트러스構造물의 形狀最適化에 관한 研究" *大韓土木學會 論文集* Vol 11, 1991, 3 pp55~68.
  35. 李奎遠, 李根泰: "靜的 및 固有振動數 制約條件式을 고려한 平面트러스構造물의 形狀最適化에 관한 研究", *大韓土木學會 論文集*, 第10卷, 第2 號, 1990. 6, pp. 23-88.
  36. Edward J. Hong, Kyung K. Choi, Vadim Komkov, "Design Sensitivity Analysis of Structural Systems" *Mathematics in Science and Engineering*, Vol. 177, 1986.

(接受 : 1993. 2. 8)