

# Reissner-Mindlin 평판의 hp-Version 유한요소해석

## hp-Version of the Finite Element Analysis for Reissner-Mindlin Plates

우광성\* · 이기덕\*\* · 고만기\*\*\*

Woo, Kwang Sung · Lee, Gee Doug · Ko, Man Gi

### Abstract

This paper is concerned with formulations of the hierarchical  $C^0$ -plate element on the basis of Reissner-Mindlin plate theory. On reason for the development of the aforementioned element based on Integrals of Legendre shape functions is that it is still difficult to construct elements based on h-version concepts which are accurate and stable against the shear locking effects. An adaptive mesh refinement and selective p-distribution of the polynomial degree using hp-version of the finite element method are proposed to verify the superior convergence and algorithmic efficiency with the help of the simply supported L-shaped plate problems.

### 요 지

본 논문에서는 Reissner-Mindlin 평판이론에 근거한 계층적  $C^0$ -평판요소가 제안되었다. 적분형 르장드르 형상함수에 근거한 계층요소를 제안하는 이유는 종래의 h-version 유한요소법의 개념을 사용하여 전단구속 효과등에 대한 해의 정확도 및 수치안정성을 확보할 수 있는 요소를 만드는 데 여전히 어려움이 수반되기 때문이다. 적응적 체는 p-세분화와 선택적 형상함수 차수 p의 분포를 사용하는 hp-version 유한요소법을 사용하여 내부주변은 자유단의 개구부를 갖고, 외부주변이 단순지지된 L-형 평판해석을 수행하였는데 종래의 h-version 유한요소법에 비해 우월한 수렴성과 전단구속을 피할 수 있는 등의 알고리즘 효율성을 보여 주고 있다.

### 1. 서 론

유한요소해석을 위한 평판요소는 현재 까지도 많은 연구자들에 의해 개발되고 있는데 그 근본이유는 평판이론으로 부터 유한요소정식화(finite element formulation)를 하는 과정에서 유발되는 본질적인 어려움일 것이다. 평판요소는 두께가 얇은 평면 연

속체가 수직하중이나 휨 모멘트를 재하받으며 대개 평판의 최소변장의 길이가 두께에 비하여 적어도 10 배 이상 커야 되며, 수직 최대처짐이 두께보다 1/5~1/10 정도 작은 경우의 소변형 이론(small deflection theory)에 근거한다. 한편, 평판이론은 크게 2가지로 나누어 볼 수 있는데 1850년에 제안된 Kirchhoff-Love 이론<sup>(1,2)</sup>과 1944년과 1950년초에 제안된 Reissner-Mindlin 이론<sup>(3,4)</sup>으로 대별할 수 있다. 각각의 이론은 뒤에서 상세히 설명되겠지만 전자는 평판의 지배방정식이 4계 편미분방정식으로 유한요소 정식

\* 정회원 · 전남대학교 공과대학 토목공학과 조교수  
 \*\* 정회원 · 전남대학교 공과대학 토목공학과 석사과정  
 \*\*\* 정회원 · 삼환엔지니어링

화를 위해 변분(variation)을 취하게 되면 범함수(functional)는 최고 2계 미분항이 되므로 해석영역 내에서는  $C^2$ -연속조건을 만족해야 하며 경계에서는  $C^1$ -연속조건을 만족해야 수렴성이 보장된다. 요소경계에서  $C^1$ -연속조건을 만족하기 위해서는 변위, 접선방향과 법선방향의 1차 미분값이 연속성을 가져야 하는데, 그렇기 위해서는 절점자유도가 증가하며, 따라서 보간함수의 차수도 증가해야 한다. 보통, 제안된  $C^1$ -요소는 24자유도에 5차의 보간함수를 갖는다. 그러나, 이 방법은 자유도의 증가뿐만 아니라 요소경계에서의 경계조건을 정확하게 고려하는 것이 쉽지 않으며 강성도행렬이 복잡하고 수렴성 또한 크게 개선되지 않다고 보고되어 있다. 또한, 전단변형의 효과를 고려할 수 없으므로 두께가 얇은 평판해석에 적합한 모델이라는 제한성을 갖고 있다. 후자의 평판이론은 지배방정식이 3개의 2계 편미분방정식으로 표현되어 범함수에 1계 미분항이 최고 차수가 되므로 요소경계에서는  $C^0$ -연속조건만을 만족시켜 주면 그 수렴성이 보장된다.

한편, 유한요소해석을 크게 3가지 방법으로 분류해 볼 수 있는데, 첫번째 방법은 표준해석방법으로 현재까지 널리 사용되고 있는 h-version 유한요소법으로 h는 요소의 최대직경의 크기를 의미하며, 형상함수의 차수는 1차 혹은 2차로 고정시키고 h가 0에 접근하면서 정해에 수렴되는 방식이다. 두번째 방법은 p-version 유한요소법으로 p는 형상함수의 차수를 의미하며, 기하학적 형상을 표현할 수 있는 최소 갯수의 체눈(minimal mesh)으로 고정시키는 대신에 p가 무한대에 접근하면서 정해에 수렴하는 방식을 말한다. 세번째 방법은 본 연구에서 제안하는 hp-version 유한요소법으로 앞의 두 가지 방법의 개념이 동시에 사용되어 수렴속도를 가장 빠르게 하는 방식이다. 특히, 심한 응력특이점이 발생하는 균열문제의 경우 본 연구를 위해 개발된 연구용 p-version 프로그램으로 해석할 때, 하나는 4개의 체눈을 고정시키고 p-level의 차수를 1차에서부터 점차적으로 증가시켜 나가는 p-version 방식을 취하고, 다른 하나는 p-level을 1차로 고정시키고 4개의 체눈에서부터 점차적으로 균등체눈분할(uniform mesh refinement)을 해 나가는 h-version 방식을 취할 때, p-version은 h-version에 비해 2배 가량

빠름을 알 수 있었다.<sup>(5,6,7)</sup> 한편, Szabo<sup>(8)</sup>에 의하면 hp-version 해석은 p-version 해석보다도 일반문제 해석에서 훨씬 빠른 수렴성을 보여줌을 그림 1로 부터 알 수 있다.

본 연구에서는  $C^0$ -연속 조건을 만족시키는 평판요소를 적분형 르장드르함수에 기초한 계층적  $C^0$ -평판요소(hierarchic  $C^0$ -plate element)를 사용하여 수렴속도를 최대로 보장할 수 있는 hp-version 유한요소법을 이용하여 평판해석을 수행하였다. 아울러 사각형 평판의 두께감소에 따른 전단구속(shear locking)현상의 영향과 요소분할시 요소의 형상에 대한 민감도를 알아보기 위해 왜곡도(skewness)를 갖는 찌그러진 요소(distorted element)를 사용하여 해에 미치는 영향을 동시에 검토하였다. 한편, 개구부를 갖는 사각형 평판해석에서 에너지 Norm을 사용하여 수렴성을 연구하였고, 개구부의 꼭지점에서 발생되는 모멘트특이성(moment singularity)이 검토되었으며 응력구배가 심한 부근에서는 높은 차수의 형상함수를, 응력구배가 완만한 부근에서는 낮은 차수의 형상함수를 사용하는 적응적 체눈 p-세분화의 연구가 수행되었는데 고차와 저차의 형상함수가 만나는 공통경계에서는 저차의 형상함수로 연속성을 유지하였다. 또한, 체눈의 갯수와 형상함수 차수를 고정시켰을 때 응력특이점 부근으로 절점의 위치를 이동(relocation)시키는 p-r Method에 대한 연구도 동시에 수행되었다.

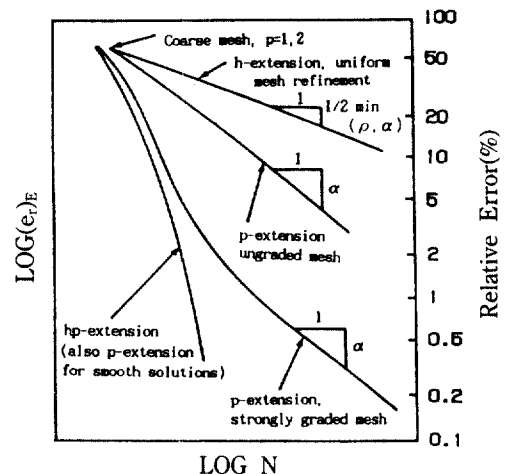


그림 1. Performance of the h-, p- and hp-version Processes.

## 2. 모서리 특이성(Corner Singularity)

평판의 모서리 특이성에 관한 수학적 특성에 관한 연구는 처음으로 Williams<sup>(9)</sup>에 의해 수행되었다. 그림 2에는 90° 凹形모서리(reentrant corner)를 갖는 평판조각(plate segment)이 나타나 있다. Williams에 의하면 모멘트 특이성은 원주방향(circumferential edge)의 경계조건과 재하된 하중에 무관하며 반경방향(radial edge)의 경계조건과 그림 2에서 정의된 모서리 각  $\theta$ 의 함수임을 보여 주고 있다. 그러므로, 응력특이는 하중에 무관함으로 부터 평판의 지배방정식을 다음과 같은 체차 미분방정식으로 고려할 수 있다.

$$\nabla^4 w = 0 \quad (1)$$

방정식 (1)의 해는 극좌표계를 사용하여 다음과 같이 정의된다.

$$w = \beta r^{(\lambda+1)} F(\theta, \lambda) \quad (2)$$

여기서  $F(\theta, \lambda)$ 는 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.<sup>(9)</sup>

$$F = C_1 \cdot \sin(\lambda+1)\theta + C_2 \cdot \cos(\lambda+1)\theta + C_3 \cdot \sin(\lambda-1)\theta + C_4 \cdot \cos(\lambda-1)\theta \quad (3)$$

한편,  $\beta$ 는 양의 상수를 의미하며 상수  $C_1, C_2, C_3, C_4$ 는 평판을 둘러싸고 있는 반경방향에서 2개씩의 경계조건을 적용함으로써 결정된다. 4개의 경계조

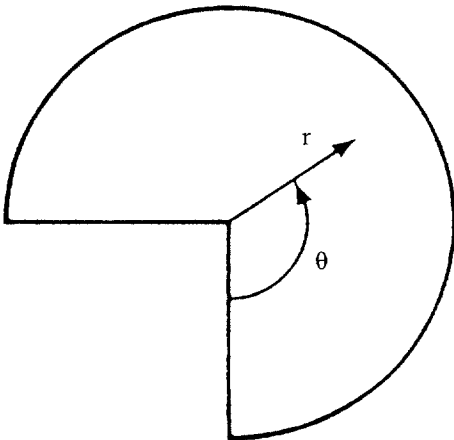


그림 2. Plate segment with a 90° reentrant corner.

건을 적용할 때 4개의 상수가 자명하지 않는 해(non-trivial solution)를 갖기 위한 조건은 계수행렬(coefficient matrix)의 행렬식(determinant)값이 0이 되어야 한다. 한편, 이 조건으로 부터 구해진 특성방정식(characteristic equation)은  $\lambda$ 의 함수가 되며 이로 부터 고유치  $\lambda$ 를 구하게 된다. 또한 식 (2)로부터 모멘트는  $r^{(\lambda-1)}$ 에 비례하고 전단력은  $r^{(\lambda-2)}$ 에 비례함을 알 수 있다. 그러므로,  $\lambda$ 가 1보다 작을 경우 모멘트특이(singular moment)가 발생하며  $\lambda$ 가 2보다 작을 경우에는 전단력특이(singular shear force)가 발생하게 된다. Williams는 반경방향의 경계조건을  $\theta$ 가 0과 임의의 각  $\alpha$ 로 정의된 평판조각의 모멘트특이를 연구하였는데, 반경방향의 경계조건을 자유단, 단순지지 및 고정단의 3가지 경계조건을 갖게 하였다. 여기서,  $\theta$ 가 0과  $\alpha$ 일 때의 2가지 경계조건을 선택하여 만들 수 있는 조합(combination)의 총 수는 6가지 경계조건으로 각각의 경우 모서리 꼭지각의 변화에 따른 고유치  $\lambda$ 를 계산하였다. 그 결과에 따르면 단순지지-단순지지, 고정단-자유단, 단순지지-자유단의 경우  $\theta$ 가  $\pi/2$ 보다 큰 경우  $\lambda$ 가 1.0보다 작아지므로 모서리 꼭지점에서 모멘트특이가 발생함을 보였으며, 고정단-단순지지의 경우는  $\theta$ 가  $2\pi/3$ 일 때 역시 고유치  $\lambda$ 가 1.0보다 작음을 보이고 자유단-자유단, 고정단-고정단의 경우는  $\theta$ 가  $3\pi/2$ 보다 커짐에 따라 고유치  $\lambda$ 가 1.0보다 작음을 보여준다. 본 연구에서는 모서리 꼭지각이  $\theta$ 가  $3\pi/2$ 인 L-형 평판(L-shaped Plates)을 해석하고자 하므로 앞에서 설명된 바와 같이 凹形모서리에서 모멘트특이가 발생함을 알 수 있다.

## 3. 평판의 고전적 이론

### 3.1 Kirchhoff - Love 이론

변위장이 3개의 변위벡터로 표시되며, 그림 3에서 보듯이  $x, y$ 방향으로의 면내변위벡터(in-plane displacement vector)  $u_{x0}(x, y), u_{y0}(x, y)$ 와 수직변위벡터  $u_{z0}(x, y)$ 로 표현할 수 있다.

$$u_x = u_{x0}(x, y) - z \frac{\partial u_{z0}}{\partial x} \quad (4-a)$$

$$u_y = u_{y0}(x, y) - z \frac{\partial u_{z0}}{\partial y} \quad (4-b)$$

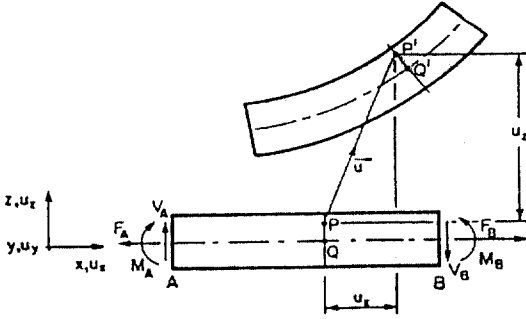


그림 3. Components of the displacement vector.

$$u_z = u_{z0}(x, y) \quad (4-c)$$

평판의 두께에 따라 변위가 일정하므로 두께방향의 변형도는 0이 된다.

$$\epsilon_z = \partial u_z / \partial z = 0$$

한편, 전단변형도  $\gamma_{xz}$ 와  $\gamma_{yz}$ 는 식 (5)에서 보는 바와 같이 0이 된다.

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = -\frac{\partial u_{z0}}{\partial y} + \frac{\partial u_{z0}}{\partial y} = 0 \quad (5-a)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = -\frac{\partial u_{z0}}{\partial x} + \frac{\partial u_{z0}}{\partial x} = 0 \quad (5-b)$$

변분법을 취해 유한요소 정식화를 하게 되면 수직 변위  $u_{z0}$ 와 1차 미분항이 연속이 되어야 수렴이 되므로 일반적인 경우 처짐각의 연속을 고려하는 어려움이 따르게 된다.

### 3.2 Reissner - Mindlin 이론

새로운 2개의 변위벡터  $u_{x1}(x, y)$ ,  $u_{y1}(x, y)$ 가 도입되며, 이들은 변형전과 변형후 중립면에 대한 수직인 단면의 회전각을 의미한다.

$$u_x = u_{x0}(x, y) - z u_{x1}(x, y) \quad (6-a)$$

$$u_y = u_{y0}(x, y) - z u_{y1}(x, y) \quad (6-b)$$

$$u_z = u_{z0}(x, y) \quad (6-c)$$

Kirchhoff 가정의 경우와 같이  $\epsilon_z = 0$ 이 되며 두께 방향의 응력은 무시하므로  $\sigma_z = 0$ 이 된다. 그러나, 전단변형도  $\gamma_{xz}$ 와  $\gamma_{yz}$ 는 식 (7)과 같이 정의된다.

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = -u_{x1}(x, y) + \frac{\partial u_{z0}}{\partial x} \quad (7-a)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = -u_{y1}(x, y) + \frac{\partial u_{z0}}{\partial y} \quad (7-b)$$

이와 같이 Reissner 이론을 사용하게 되면 전단변형 효과를 고려할 수 있으며  $C^0$ -연속조건만을 만족시켜 주면 수렴성이 보장된다.

### 4. 계층적 $C^0$ -평판요소

본 연구에서 사용한 평판요소는 Reissner-Mindlin 평판이론에 근거하고, 적분형 르장드르 다항식을 형상함수로한 사변형의 계층적  $C^0$ -평판요소이다. 본 연구에서는 요소의 크기와 형상함수 차수를 동시에 조절하여 정해에 좀 더 빨리 수렴할 수 있는 hp-version 유한요소 방식을 취하고 있으며 다음과 같은 특성을 보인다.

- 1) 계층적 성질(hierarchical nature) 과 직교성(orthogonality)에 기인한 알고리즘의 효율성
- 2) 요소와 요소간에서 형상함수 차수의 선택적 사용
- 3)  $C^0$ -연속을 만족하면 해의 수렴이 보장
- 4) 응력 특이점에서의 요소 세분화(h-refinement) 평판의 수직변위를 w, y축 방향과 x축 방향으로의 처짐각을 각각  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ 라 할 때 일반적인 변형도  $\epsilon = (\epsilon_b^T, \epsilon_s^T)^T$ 이고  $\epsilon_b$ 는 곡률을 나타내며 아래 식과 같다.

$$\epsilon_b = \left[ -\frac{\partial \theta_1}{\partial x}, -\frac{\partial \theta_2}{\partial y}, -\left(\frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x}\right) \right]^T \quad (8)$$

또한, 전단변형을 나타내는  $\epsilon_s$ 는 다음과 같다.

$$\epsilon_s = \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_1, \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_2 \right)^T \quad (9)$$

일반화된 합응력(stress resultants)은 식 (10)과 같이 표현할 수 있다.

$$\sigma = (m_x, m_y, m_{xy}, q_x, q_y)^T \quad (10)$$

이것은 휨 모멘트  $M = (m_x, m_y, m_{xy})^T$ 와 전단력  $Q = (q_x, q_y)^T$ 의 2개 그룹으로 나뉠 수 있다. 즉,

$$M = D_B \cdot \epsilon_b \quad (11-a)$$

$$Q = D_S \cdot \epsilon_s \quad (11-b)$$

여기서, 매개변수 D와 S를 도입하면 아래와 같다.

$$D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \quad S = \frac{E t}{2(1+\nu)\alpha}$$

한편,  $\alpha$ 는 전단계수(shear factor)를 나타내며 재료에 관한 매트릭스  $D_B$ 와  $D_S$ 는 다음과 같다.

$$D_B = D \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad D_S = S \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

그러므로, 평판의 총 포텐셜에너지는 식 (12)와 같이 정의되며  $t$ 는 평판의 두께,  $q$ 는 평판에 재하된 분포하중세기를 나타내며  $w$ 는 수직처짐을 나타낸다.

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\epsilon_b^T \cdot D_B \cdot \epsilon_b + \epsilon_s^T \cdot D_S \cdot \epsilon_s - 2q \cdot w] d\Omega \quad (12)$$

적분형 르장드르다항식에 근거한 계층적 형상함수는  $[-1,1] \times [-1,1]$ 로 정의되는 정규영역(standard domain)에서 정의되며 3개의 그룹으로 나누어 진다. 첫번째 그룹은 기본모우드(basic mode)로  $P=1$ 일 때의 선형 형상함수를 의미하고 두번째 그룹은  $P=2$ 부터 저매개변수요소(subparametric element)를 사용하기 때문에 절점의 좌표값을 갖지 않는 절점(nodeless node)이 꼭지점을 제외한 4개의 변에 추가되는 모우드로 주변모우드(edge mode)라 하며 식 (13)과 같이 정의된다. 이와 같이 기본모우드에 주변모우드를 더해 줌으로써 평판에서 발생될 수 있는 임의의 변위함수를 표현할 수 있게 한다.

$$\{P_i(\xi) | i \geq 2, \xi \in [-1,1], P_i(-1) = P_i(1) = 0\} \quad (13)$$

여기서,  $P_i(\xi)$ 는 적분형 르장드르함수로 식 (14)와 같다.

$$P_i(\xi) = \int_{-1}^{\xi} L_{i-1}(t) dt \quad (14)$$

여기서,  $L_{i-1}(t)$ 는 Rodrigues에 의해 식 (15)와 같이 정의된다.

$$L_n(t) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \quad (15)$$

한편,  $\eta=1$ 일 때의 형상함수는 식 (16)과 같으며 같은 방법으로 사각형 계층요소의 4개변에 대한 형상함수를 정의할 수 있다.

$$N_i(\xi, \eta) = P_i(\xi) \frac{(\eta+1)}{2} \quad (16)$$

세번째 그룹은 거품모우드(bubble mode) 또는 내부모우드(internal mode)라 하는 것인데, 이것은 유한요소해의 수렴조건중 하나인 완전성을 만족시켜주기 위한 모우드로  $i+j=P$ 라고 했을 때  $P$ 가 4차 이상부터 발생하게 되며 식 (17)과 같이 정의된다. 한편, 내부모우드의 형상함수값은 네 변에서 모두 0이 된다.

$$N_i(\xi, \eta) = P_i(\xi) \cdot P_j(\eta), \quad i, j \geq 2 \quad (17)$$

## 5. 전단구속 현상(Shear Locking Phenomenon)

Reissner-Mindlin 이론에 근거한 평판요소는 평판의 두께가 두꺼워지는 경우에 전단변형효과를 고려할 수 있는 이점이 있는 반면, 평판의 두께가 얇아짐에 따라 전단구속현상이라는 문제가 발생된다. 그 이유를 식 (12)에서 정의된 평판의 총 포텐셜에너지를 가지고 설명하여 보겠다. 먼저, 문제를 단순화시키기 위해 평판의 크기가  $L$ 인 정방형 평판의 총 포텐셜에너지를 무차원 변수(non-dimensional variables)로 표현해 보았으며, 이를 위한 변수의 정규화(normalization)는 아래와 같이 할 수 있다.

$$x' = x/L \quad y' = y/L \quad w' = w/L \\ t' = t/L \quad D_b' = D_b/Et^3 \quad q' = qL^2/Et^2$$

그러므로, 평판의 해석영역  $(0,1) \times (0,1)$ 에서 발생되는 정규화된 총 포텐셜에너지는 다음과 같이 정의된다.<sup>(10,11)</sup>

$$\Pi = \frac{1}{2} Et^3 \iint \left\{ \epsilon_b'^T \cdot D_b' \cdot \epsilon_b' + \frac{\alpha GL^2}{Et^2} \right.$$

$$\left[ \left( \frac{\partial w'}{\partial x'} - \theta_1 \right)^2 + \left( \frac{\partial w'}{\partial y'} - \theta_2 \right)^2 \right] - 2 \frac{q' w'}{t'} \} dx' dy' \quad (18)$$

여기서,  $G$ 는 전단탄성계수를 나타내고 식 (18)에서  $(\alpha GL^2)/(Et^2)$ 은 Lagrange Multiplier의 역할을 하게 되며 두께  $t$ 가 매우 얇을 경우 이 값은 무한대에 접근하게 된다. 평형방정식을 구하기 위해 총 포텐셜에너지  $\Pi$ 가 정류치(stationary value)를 가져야 하는데 이 조건은  $\delta\Pi=0$  이 된다. 매우 얇은 판에서  $(\alpha GL^2)/(Et^2)$ 값은 매우 커지고 총 포텐셜에너지  $\Pi$ 가 정류치를 갖기 위해서는 전단변형도를 0으로 강제 구속을 두어야 한다. 이는 곧 전단변형이 무시되는 Kirchhoff 가정과 일치하게 된다. 이 때 강제구속에 대한 방정식 수가 경계조건을 부여하고 남은 자유도의 수보다 작을 경우 미지수의 갯수보다 방정식 수가 많은 경우가 되므로 강성도매트릭스가 랭크부족(rank deficiency)을 보이게 되어 수치적 계산에 오류를 범하게 된다. 이러한 현상을 전단구속(shear locking)이라 한다.<sup>(10,11)</sup>

일반적으로 구속현상(locking phenomenon)이란 두께에 따른 형상비 및 기하학적 또는 재료적성질을 나타내는 매개변수가 어떤 한계값에 접근하면서 강성도가 과대추정되는 현상을 의미한다. 현재까지 제안된 많은 유한요소는 이러한 구속문제(locking problem)를 극복하기 위하여 감차적분(reduced integration)적분을 사용하였는데 이 방법을 적용하면 疑似 零에너지모우드(spurious zero energy mode)를 보여 주기 때문에 최근에는 선택적감차적분(selective reduced integration)이 제안되거나 또는 '가상응력(assumed-stress)' 요소를 제안하고 있다.

그러나 p-version 유한요소법의 경우는 해석문제에 따라 다소 달라지겠지만 통상  $p=5$ 차를 넘게 되면 이와 같은 구속현상을 피할 수 있음을 보여주는데 그 이유는  $p=4$ 차 부터 경계조건이 없는 내부모우드가 발생하므로 경계조건을 부여하고 남은 자유도 수가 전단변형을 강제구속하는 방정식 수보다 크음을 보여 주어 랭크부족이 발생하지 않게 된다. Tsach<sup>(10)</sup>는 종래의 등매개변수요소를 사용할 때 매우 얇은 평판문제의 경우( $L/t=500$ ), 적어도 16절점 요소를 사용하여야만 Mindlin 이론을 그대로 사용하고도 전단구속현상이 발생하지 않음을 보여주었다.

한편, 전단구속현상을 살펴보기 위하여 고정단으로 지지된 정방형 평판이 등분포하중을 받고 있을 때 평판중앙에서의 최대처짐의 정규변위(normalized displacement)는 다음과 같이 정의하였다.

$$w_{norm} = w_{max} \frac{Et^3}{qL^4} \quad (19)$$

여기서,  $w_{max}$ 는 최대처짐,  $E$ 는 탄성계수,  $q$ 는 등분포하중의 세기 그리고  $L$ 는 평판의 변의 길이이다. 그림 4에서 보듯이 Mesh1과 Mesh2는 p-version 모델을 나타내며, Mesh2는 요소의 찌그러짐(distortion) 정도에 따른 영향을 두께의 감소에 따른 전단구속현상의 영향을 분석하였다. Mesh3은 Hughes<sup>(12)</sup>가 제안한 Heterosis 요소를  $8 \times 8$ 개 사용하여 두께가 얇아짐에 따른 전단구속현상을 살펴 보았다. p-version 모델의 경우  $p=7$ 차를 사용한 Mesh1과 Mesh2는  $\text{Log}(L/t)=3.5$ 까지 변화하여도 전단구속이 발생하지 않은 반면, Heterosis 요소를 사용한 Mesh3는  $\text{Log}(L/t)=2.0$ 에서 부터 전단구속이 발생함을 Kirchhoff 값과 비교하여 알 수 있었다. 한편,  $\text{Log}(L/t)$ 가 1.0에서 1.5사이의 정규변위  $w_{norm}$ 은 3가지 모델 전부 Kirchhoff 값과 비교하여 다소 큰 값을 보이고 있는데, 그 이유는 두께가 두꺼워짐에 따른 전단변형효과를 고려하기 때문이다. 그림 5와 그림 6은 p-version 모델을 사용한 Mesh1과 Mesh2의 p-level의 증가에 따른 수렴성을 보여 주고 있다. 즉 Mesh1의 경우  $L/t$ 가 각각 100, 1000일 경우  $p=6$ 차 이상을 사용하여야 전단구속을 피할 수 있으며 Mesh2의 경우도 Mesh1의 경우와 거의 같은 경향을 보여

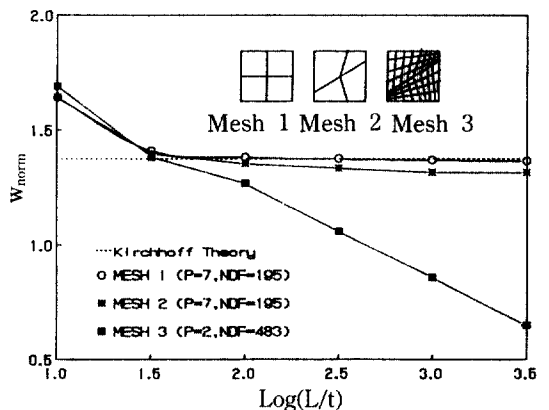


그림 4. Results of shear locking analysis.

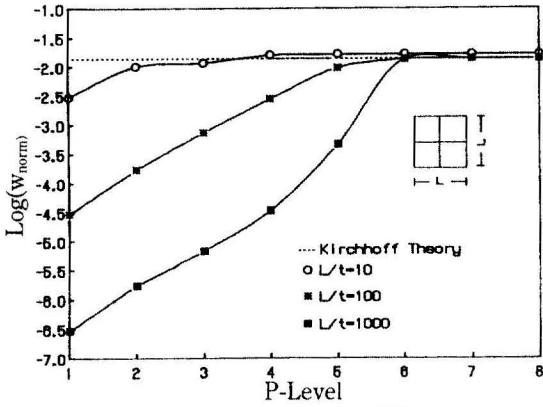


그림 5. Shear locking effect for different p-levels When L/t=10, 100 and 1000(Mesh 1 Case).

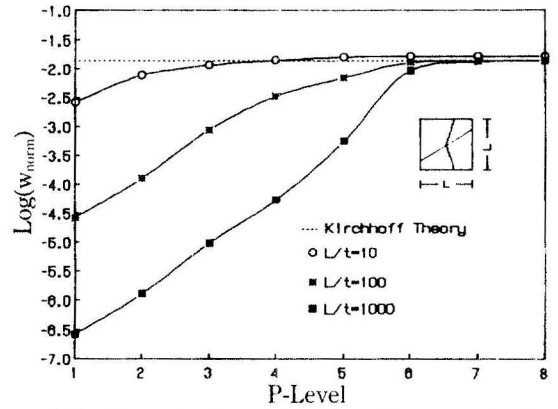


그림 6. Shear locking effect for different p-levels When L/t=10, 100 and 1000(Mesh 2 Case).

주고 있다. 그림 4에서 정의된 Mesh1과 Mesh2의 p-version 모델을 사용한 정규변위와 변형에너지에 대한 상대오차의 수렴성이 p-level의 증가에 따라 표 1에 나타나 있다. 표 1에서 보듯이 L/t=100인 매우 얇은 두께를 갖는 평판문제가 해석되었는데, Mesh1의 요소를 사용하였을 경우는 p=6차에서 상대오차 4.23%의 정확도를 보여주고 있으며, Mesh 2의 찌그러진 요소(distorted element)의 경우는 수렴이 Mesh1에 비해 다소 느림을 보여 주는데 p=7 차에서 비로소 수렴구간에 들며 이 때의 변형에너지에 대한 상대오차가 2.53%임을 보여주고 있다.

## 6. L-형 평판(L-shaped plates)

개구부(opening)를 갖는 정방형 평판이 내부주변(inner edge)은 자유단으로 되어 있고 외부주변(outer edge)는 단순지지로 등분포하중을 재하받고 있을 때, 모서리 각  $\theta$ 가  $\frac{3\pi}{2}$ 이므로 앞에서 설명한 바와 같이 개구부의 꼭지점에서는 모멘트특이 발생하게 된다. p=8차인 3개요소로 모델링한 p-version 유한요소 결과가 그림 7에 나타나 있다. 한편, 그림 8에서는 3개의 서로 다른 모델 Mesh A, Mesh B와 Mesh C를 설정하여 p-level을 1차에서 5차까지

표 1. Convergence of Normalized Displacements and Relative errors of Strain energy ( $E=0.1092 \times 10^8$ ,  $L=1.0$ ,  $q=1.0$ ,  $\nu=0.3$ ,  $L/t=100$ )

P-level	NDF	Mesh 1		Mesh 2	
		$W_{norm}$	$\frac{U_{ex} - U_p}{U_{ex}} \times 100(\%)$	$W_{norm}$	$\frac{U_{ex} - U_p}{U_{ex}} \times 100(\%)$
P=1	3	$2.925 \times 10^{-05}$	99.53	$2.612 \times 10^{-05}$	99.85
P=2	15	$1.660 \times 10^{-04}$	98.90	$1.265 \times 10^{-04}$	99.11
P=3	27	$2.277 \times 10^{-03}$	85.48	$8.683 \times 10^{-04}$	94.37
P=4	51	$2.728 \times 10^{-03}$	80.45	$3.286 \times 10^{-03}$	76.62
P=5	87	$9.510 \times 10^{-03}$	36.18	$6.932 \times 10^{-03}$	50.58
P=6	135	$1.324 \times 10^{-02}$	4.23	$1.285 \times 10^{-02}$	13.59
P=7	195	$1.371 \times 10^{-02}$	0.18	$1.353 \times 10^{-02}$	2.53
P=8	267	$1.376 \times 10^{-02}$	0.02	$1.377 \times 10^{-02}$	0.38
Kirchhoff	$\infty$	$1.376 \times 10^{-02}$		$1.376 \times 10^{-02}$	

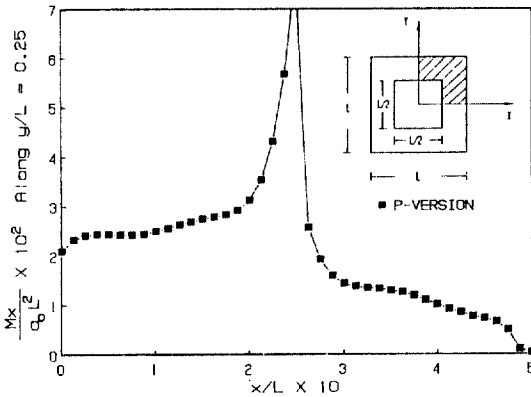


그림 7. Bending Moment  $M_x$ ; Free Inner Edge, Simply Supported Outer Edge.

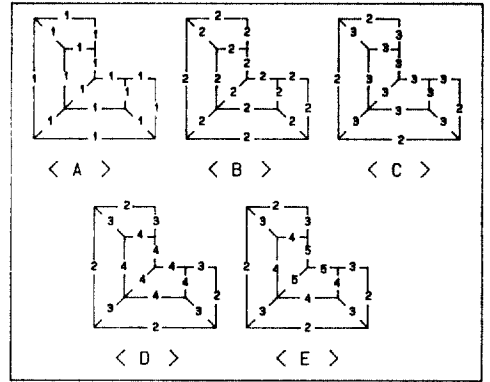


그림 9. Iteration scheme for p-adaptive meshes.

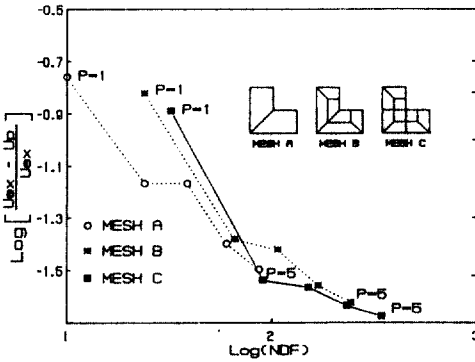


그림 8. Convergence of of hp-version of FEM with respect to LOG(NDF).

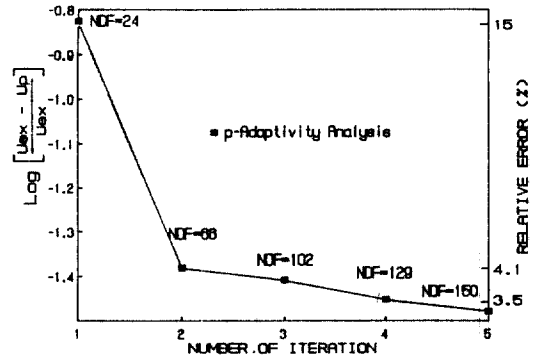
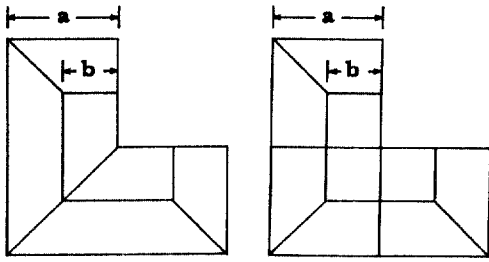


그림 10. Convergence characteristics of the p-adaptive analysis.

증가시킴에 따른 hp-version 유한요소법의 수렴성을 분석하여 보았다. 그림에서 보듯이 hp-version 유한요소법을 사용한 Mesh C가 가장 좋은 수렴성을 보여 주고 있다. 이 결과는 Holzer<sup>(13)</sup>의 연구에서도 같은 경향을 보여 주고 있다. 한편, Mesh C를 응력특이점이 발생하는 점에는 고차형상함수를 사용하고 응력구배가 비교적 낮은 영역에서는 저차의 형상함수를 사용하는 적응적 체는 p-세분화(p-adaptive mesh refinement)를 검토해 보았다. 그림 9에서 보는 바와 같이 첫번째 체는 전 요소에  $p=1$  차를 사용하였고 두번째 체는  $p=2$  차를 전 요소에 사용한 후 응력구배가 높은 점에는 점차  $p$ 의 차수를 높여 변형에너지에 대한 상대오차가 3%를 만족하는 다섯번째 체까지 반복을 통하였을 때의 수렴성이 그림 10에 나타나 있다.

한편, 그림 11에 나타난 바와 같이 6개의 요소로 모델링된 Mesh A와 9개의 요소로 모델링된 Mesh B를 사용하여 응력특이점이 발생하는 개구부 꼭지점에서의 응력구배를 좀 더 효율적으로 표현하기 위해 형상함수의 차수를 임의로 4차로 고정시킨 후 절점의 위치를 응력특이점 부근으로 좀 더 가까이 이동시키면서 수렴속도를 높여보고자 하였다. 즉, 형상함수의 차수를 고차로 사용함과 동시에 요소는 6개와 9개로 분할한 후 절점의 위치를 이동시키는 해석법으로 이를 p-r method라 하며, 여기서 r은 절점이동(relocation)을 의미한다. 표 2에는 Mesh A와 Mesh B를 사용하여  $b/a$ 의 비를 0.5에서 0.01까지 변화시켰을 때의 변형에너지 값의 상대오차와 정규변위가 나타나 있다. 즉, 응력특이점으로 절점의 위치를 이동시킴에 따라 예측한 바와 같이 근사해의

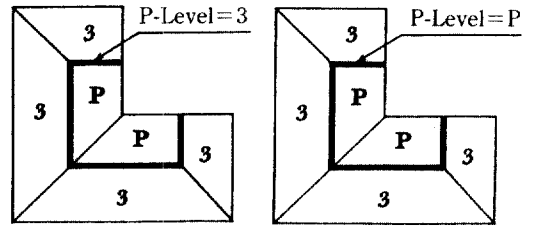




Mesh A

Mesh B

그림 11. Configuration of 6-element and 9-element model for p-r method.



Mesh A

Mesh B

그림 12. Continuity between high order element and low order element.

표 2. Results of p-r method  
(p-level=4, E=10.92, t=1.0, v=0.3)

b/a	Mesh A		Mesh B	
	$w_{norm}$	$\frac{U_{ex}-U_p}{U_{ex}} \times 100(\%)$	$w_{norm}$	$\frac{U_{ex}-U_p}{U_{ex}} \times 100(\%)$
0.5	0.001316	2.77	0.001325	2.32
0.25	0.001323	2.27	0.001331	1.91
0.1	0.001331	1.91	0.001338	1.56
0.05	0.001334	1.82	0.001342	1.42
0.01	0.001342	1.71	0.001346	1.30

표 3. Convergence characteristics of Mesh A and Mesh B  
(E=10.92, t=1.0, v=0.3)

P-level	Mesh A			Mesh B		
	NDF	$w_{norm}$	$\frac{U_{ex}-U_p}{U_{ex}} \times 100(\%)$	NDF	$w_{norm}$	$\frac{U_{ex}-U_p}{U_{ex}} \times 100(\%)$
P=3	108	0.001325	3.78	108	0.001325	3.78
P=4	123	0.001332	3.42	135	0.001332	3.40
P=5	144	0.001336	3.19	168	0.001336	3.16
P=6	171	0.001339	3.02	207	0.001339	3.00
P=7	204	0.001341	2.92	252	0.001341	2.89
P=8	243	0.001342	2.85	303	0.001343	2.82

값이 향상됨을 알 수 있다. 그러나, b/a를 0.5에서 부터 구하고자 하는 최적의 비를 빠르게 찾는 알고리즘은 본 논문에서 다루지 않았다.

마지막으로 요소와 요소간의 서로 다른 형상함수를 사용함에 따른 공통경계에서의 연속조건을 맞추기 위해서 p-version 유한요소법에서는 그림 12에서

보는 것과 같이 응력특이 발생되는 영역에서는 p차를, 응력구배가 낮은 영역에서는 3차를 사용한 Mesh A와 Mesh B가 있다. 이 때 공통경계에서의 연속성(continuity)은 p차 또는 3차로 유지할 수 있는데 통상 저차로 그 연속성을 유지하는 것이 보다 효율적인 것을 표 3으로 부터 알 수 있다. 즉, Mesh

A인 경우 NDF=243일 때의 변형에너지의 상대오차가 2.85%인데 비하여 Mesh B인 경우 NDF=252일 때의 상대오차는 2.89%로 Mesh A가 낮은 자유도에서 보다 높은 정확도를 보여 주고 있음을 알 수 있다. 한편, p차와 3차가 만나는 공통경계의 연속성은 (p-3)차에 해당되는 잉여 고차항에 대한 절점을 경계조건으로 구속시킴으로써 이를 수 있었다.

## 7. 결 론

이상에서 살펴 본 바와 같이 적분형 르장드르함수에 기초를 둔 hp-version 유한요소법을 사용하여 사변이 고정단인 정방형 평판에서 두께를 얇게 감소시킴에 따른 전단구속의 영향을 살펴보고 L형 평판의 경우 모서리 특이점에서의 모멘트 특이를 살펴보았다. 또한, hp-version 유한요소법을 시도하여 빠른 수렴성을 얻으려 했으며 p-r method가 연구되었다. 한편, 고차 형상함수와 저차형상함수가 인접요소에서 사용될 때 공통경계에서의 연속성문제가 검토되어 아래와 같은 결론을 얻게 되었다.

1) L/t가 1000을 넘는 매우 얇은 평판문제에서 p=6차 이상을 사용하면 그림 4에서 보듯이 찌그러진 요소(distorted element)를 사용하여도 전단구속현상을 피할 수 있었다.

2) 그림 8에서 보듯이 2개의 요소를 사용한 Mesh A와 9개의 요소를 사용한 Mesh C를 비교할 때 동일한 자유도에서 수렴성을 비교하면 Mesh C(p=2차)가 Mesh A(p=5차) 보다 빠른 수렴성을 보여줌으로 종래의 p-version 유한요소법에 비하여 수렴성이 더 빠르다고 말할 수 있다.

3) 그림 9와 같이 적응적 체눈 p-세분화를 통하게 되면 몇 번의 반복을 통해 최소 자유도에서 최대 수렴성을 찾고자 하는 최적 요소설계(optimal mesh design)를 가능하게 한다.

4) 그림 11과 같이 동일한 요소 모델을 사용할 때 특이점 부근으로 요소의 크기를 점차 작게 해 줌으로 해의 수렴성이 빨라짐을 보여 주었는데 이를 p-r method라 한다. 그러나, 요소의 크기를 얼마만큼 작게하는 것이 좋는가에 대한 알고리즘은 본 논문에서 검토되지 않았다.

## 참 고 문 헌

1. G. Kirchhoff, "Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe", *Crelles J.*, 40, 51-88 (1850).
2. A. E. H. Love, "The small free vibration and deformation of thin elastic shells", *Phil. Trans. Royal Soc., London, Ser. A*, 181, 491-546 (1886).
3. E. Reissner, "On the theory of bending of plates", *J. Math. Phys.*, 23, 184-191 (1944).
4. R. D. Mindlin, "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates", *J. Appl. Mech. ASME*, 73, 31-38 (1951).
5. I. Babuska, O. C. Zienkiewicz, J. Gago and E. R. de A. Oliveira(eds.), "Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations", Wiley, New York (1986).
6. O. C. Zienkiewicz, J. Z. Zhu and N. G. Gong, "Effective and practical h-p version adaptive analysis procedures for the finite element method", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 28, pp. 879-891 (1989).
7. A. K. Noor and I. Babuska, "Quality assessment and control of finite element solution", *Finite Element Anal. Des.*, Vol. 3, pp. 1-26 (1987).
8. B. A. Szabo, "Mesh design for the p-version of the finite element method", *Comp. Methods Appl. Math. Eng.*, Vol. 55, pp. 181-197 (1986).
9. M. L. Williams, "Surface Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates Under Bending", *Proceedings of the First National Congress of Applied Mechanics*, Chicago (1951).
10. U. Tsach, "Short Communication : Locking of Thin Plate/Shell Elements", *Int. J. Numer. Engng.*, Vol. 17, pp. 633-644 (1981).
11. D. Briassoulis, "The C<sup>0</sup> Shell Plate and Beam Elements Freed From Their Deficiencies", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol 72, pp. 243-266 (1989).
12. T. J. R. Hughes and M. Cohen, "The 'heterosis' finite element for plate bending", *Comp. Struc.*, Vol. 9, pp. 445-450 (1978).
13. S. Holzer, E. Rank and H. Werner, "An implementation of the hp-version of the finite element method for Reissner-Mindlin plate problems", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 30, pp. 459-471 (1990).

(接受 : 1992. 12. 23)