

비선형구성식을 이용한 기초지반의 거동해석

Analysis on the Behaviour of Foundation
Using the Non-Linear Constitutive Laws

정 진 섭*

Jeong, Jin Seob

Abstract

This paper presents a numerical method for implementing a nonlinear constitutive material model developed by Lade, into a finite element computer program.

The techniques used are based on the displacement method for the solution of axial symmetric and plane strain nonlinear boundary value problems.

Laboratory behaviour of Baekma river sand(#40-60) is used to illustrate the determination of the parameters and verification of the model. Computer procedure is developed to determine the material parameters for the nonlinear model from the raw laboratory test data.

The model is verified by comparing its predictions with observed data used for the determination of the parameters and then with observed data not used for the determination.

Three categories of tests are carried out in the back-prediction exercise; ① A hydrostatic test including loading and unloading response, ② Conventional triaxial drained compression tests at three different confining pressure and ③ A model strip footing test not including in the evaluation of material parameters.

Pertinent observations are discussed based on the comparison of predicted response and experimental data.

요 지

본 연구는 Lade에 의해서 제안된 비선형구성모델을 이용하여 지반거동을 해석하기 위한 수치해석 방법을 제시하고자 한 것이다.

그 첫 시도로서 축대칭조건과 평면변형률조건에 비선형 경계치 문제를 해석하기 위하여 변위법을 이용한 유한요소 프로그램을 개발하였다. 모델의 매개변수를 결정하기 위한 시험과 모형기초지반의 시험재료는 백마강모래를 사용하였다. 그리고 실내시험 자료로부터 비선형구성모델의 매개변수를 결정할 때 컴퓨터프로그램을 개발하여 사용하였다.

구성모델의 정도를 검증하기 위하여 개발된 유한요소프로그램을 사용한 예측결과를 매개변수 결정에 사용된 실험결과뿐만 아니라 결정에 사용되지 아니한 실험결과와도 비교하였다. 검증에 사용된 시험은 다음과 같다 ; ① 등방압축팽창시험, ② 구속압력을 달리한 배수삼축압축시험 ③ 모형기초지반의 재하시험.

* 정회원 · 원광대학교 공과대학 토목공학과 교수

이상의 시험과 수치해석결과를 비교하여 비선형구성모델과 유한요소해석프로그램의 정도를 확인하고 평면변형율조건에 있는 2차원모형기초지반의 거동 특성을 검토하였다.

1. 서 론

성토 구조물과 같은 외력이 작용할 때 기초지반 내에 어떠한 응력이 발생하고 또 구조물등이 안전하게 유지될 수 있는가를 검토하기 위해서는 현장의 상태에 따른 경계조건 아래서 문제를 해석 하여야 한다. 이 때 현장상태에 맞는 경계조건에 대한 변형이나 응력 분포의 해석은 유한요소법을 사용하여 수행하는 것이 편리하다. 그런데 이와 같은 수치해석에 사용하고 있는 해석적 표현에서 가장 미비한 부분중의 하나가 재료 거동에 관한 구성모델이다. 따라서 기본적으로 실험실에서 관측 할 수 있는 응력-변형율 및 강도특성의 여러가지면을 충분하게 고려하여 이를 정확하게 표현 할 수 있는 흙의 거동에 대한 구성식이 요구되고 있다.

1950년대 후반에 Drucker 등⁽¹⁾에 의해 흙의 탄·소성모델화의 지침이 제시된 수년 후 Roscoe^(2,3,4)를 중심으로하는 이른바 Cambridge학파에 의해 Cam-clay모델이^(5,6,7) 제안된 이래 지금까지 수 많은 구성모델이 제안 되었다. 최근에는 흙의 이방성⁽⁸⁾ 및 시간의존성^(9,10)을 고려한 모델화도 실행중에 있고 탄·소성모델은 이미 실제문제에 적용까지 하고있다.

많은 구성법칙들 중에서 쌍곡선 응력-변형율모델은 그 개념과 구성식이 비교적 단순 하면서도 흙의 비선형거동을 잘 나타낼 수 있기 때문에 흙 구조물의 거동해석에 많이 사용되어 왔으며, 그 구성식에 관한 연구 또한 여러 단계의 발전을 거듭해왔다. Kondner⁽¹¹⁾가 개발한 탄성쌍곡선모델을 Duncan과 Chang⁽¹²⁾ 및 Clough와 Duncan⁽¹³⁾에 의해 수정되어 널리 사용되었다. 이 모델은 축대칭조건에서 축차응력은 최소주응력의 특정값에 대한 축변형율의 쌍곡선 함수로써 표현하는 것이다.

그러나 이 모델이 모든 탄성 모델에서와 마찬가지로 전단응력 아래서 체적변화가 일어나는 것을 설명하지 못하는 단점을 가지고있다. 이러한 단점을 극복하기 위한 시도로서 보다 정교한 모델이 Lade와

Duncan⁽¹⁴⁾에 의하여 제안되었다. 이 모델은 Lade Type이라고 하는 입방체형시험기를 이용한 모래의 시험결과를 기본으로 하여 조합한 것이다. 그 후 이 모델의 문제점 즉 연화과정을 설명할 수 없고, 등방응력에 대해서 소성압축이 고려되어 있지 않는 점에 대해서, 이를 보완하여 전단에 의한 항복면 이외에 소성압축에 의한 항복면과 경화, 연화과정을 통일적으로 표현한 경화칙 및 소성 Potential면을 포함한 새로운 모델이 Lade⁽¹⁵⁾에 의해 제안 되었다.

이 모델은 항복규준, 비관련유동칙 그리고 전 소성일을 응력수준의 쌍곡선 함수로 표현하는 일경화 법칙을 수용하고있다. 이 모델을 정의 하는데 요구되는 매개변수들은 일련의 통상적인 삼축압축시험 결과로부터 결정 할 수있다. 그러나 이 모델은 두 개의 항복면과 비관련유동칙이 적용되므로 해석상의 어려움이 있어 실제지반의 거동해석에 대해 실용화 하지 못한 상태에 있었다. 그러나 이 새모델은 매우 정교하고 실험결과와는 매우 좋은 일치를 보이고 있어 손쉽게 지반거동해석에 이용할 수 있도록 수치해석의 S/W를 개발한다면 매우 유용하다고 필자는 믿고 있다. 따라서 본 연구는 이모델을 사용하여 유한요소해석 알고리즘을 개발하였다. 그리고 삼축 시험을 통해 백마강모래(#40-60)에 대한 비선형구성식의 매개변수를 결정하고 결정된 매개변수를 이용하여 수치해석한 결과와 시험에서 관측한 결과를 비교하여 수치해석방법의 정도를 검증한다. 또한 모래의 삼축압축시험과 평면변형율시험을 행할 때 전단변형특성에 많은 차이가 발견되고 특히 실제 해석의 대부분이 평면변형율조건에서 행해지고 있으므로 그와 같은 조건하에 모형재시험을 시행하여 해석모델의 실용성을 검토하는 것이 큰 의미가 있다고 생각된다. 그리하여 2차원 모형토조재시험을 실시하여 평면변형율조건인 시험관측 결과를 원형삼축시험을 사용한 시험결과로부터 얻은 토질 매개변수를 사용한 유한요소해석결과와 비교하여 평면변형율상태에 있는 기초지반의 거동을 어느 정도 정확하게 예측할 수 있는 가를 검증하는 것이다.

2. 비선형구성식

2.1 개설

Lade의 Double Work-Hardening구성모델은 탄·소성이론에 의한 흙의 응력-변형을 거동을 수식화할 목적으로 전변형률중분($d\epsilon_{ij}$)를 탄성성분($d\epsilon_{ij}^e$), 소성과쇄성분($d\epsilon_{ij}^c$) 그리고 소성팽창성분($d\epsilon_{ij}^p$)으로 나누고, 이들 변형을 성분들 중 탄성변형을 성분은 Hooke의 법칙을 이용하여 계산하고 소성과쇄변형률과 소성팽창변형률은 소성이론을 적용하여 계산한다.^{15,16,17)}

2.2 탄성변형률

하중의 除荷-再載荷시에 회복 가능한 탄성변형률 중분값은 Hooke의 법칙으로 부터 계산한다. 탄성계수(Eur)는 에너지 보존법칙으로 유도되며, 응력합수와 무차원상수로 다음과 같이 표현한다.¹⁸⁾

$$E_{ur} = K_{ur} \cdot P_a \cdot \left(\frac{\sigma_c}{P_a} \right)^n \quad (1)$$

여기서 p_a 는 탄성계수(Eur)를, 구속압력(σ_c)과 같은 단위로 하기 위한 상수로서 대기압과 같고 K_{ur} , n 는 토질매개변수이다.

또한 포아송비는 배수삼축압축시험의 除荷 - 再載荷부분에서 다음 식을 사용하여 구한다.

$$\nu = 1/2(1 - \Delta\epsilon_v / \Delta\epsilon_1) \quad (2)$$

2.3 소성팽창변형률

소성팽창항복면은 일정한 소성일을 갖는 함수로 다음과 같다.

$$f_p = f_p'(\sigma) - f_p''(W_p) \quad (3)$$

여기서

$$f_p' = (I_1^3 / I_3 - 27) \cdot (I_1 / p_a)^m \quad (4a)$$

$$f_p'' = \eta_1 \text{ at failure} \quad (4b)$$

여기서

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (5)$$

$$I_3 = \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z + \tau_{xy} \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{zx} + \tau_{yx} \cdot \tau_{zy} \cdot \tau_{xz} - (\sigma_x \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{zx} + \sigma_y \cdot \tau_{zx} \cdot \tau_{xz} + \sigma_z \cdot \tau_{xy} \cdot \tau_{yx}) \quad (6)$$

그리고 η_1 과 m 은 요구된 밀도에 따라 결정된 토질매개변수이다. 소성팽창변형률을 구하는데 비관련 유동칙(non-associate flow rule)이 사용되며 이 때의 소성팽창 포텐셜함수는 다음과 같다.

$$g_p = I_1^3 - (27 + \eta_2 \cdot (P_a / I_1)^m) \cdot I_3 \quad (7)$$

여기서 η_2 는 구속압력(σ_c)과 f_p 의 주어진 값에 대하여 결정되는 매개변수이다. 일의 硬化 혹은 軟化를 표현하는 식은 소성팽창일의 함수로 다음과 같이 나타낸다.

$$f_p'' = a \cdot e^{-b \cdot W_p} (W_p / P_a)^{1/q} \quad q > 0 \quad (8)$$

여기서, a , b , q 는 토질매개변수이고 e 는 자연대수의 밑수이다.

2.4 소성과쇄변형률

소성과쇄항복면은 일정한 소성일을 갖는 함수로 다음과 같다.

$$f_c = f_c'(\sigma) - f_c''(W_c) \quad (9)$$

여기서

$$f_c' = I_1^2 + 2I_2 \quad (10)$$

여기서

$$I_2 = \tau_{xy} \cdot \tau_{yx} + \tau_{yz} \cdot \tau_{zy} + \tau_{zx} \cdot \tau_{xz} - (\sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x) \quad (11)$$

소성과쇄 potential함수는 소성과쇄항복함수와 같으며 다음과 같다.

$$g_c = I_1^2 + 2I_2 \quad (12)$$

그러므로 관련유동법칙(associate flow rule)이 성립되며, 일의 硬化를 표현하는 식은 소성과쇄 일의 함수로 다음과 같이 나타낸다.

$$f_c'' = P_a^2 \cdot \left(\frac{1}{C} \right)^{1/p} \cdot \left(\frac{W_c}{P_a} \right)^{1/p} \quad (13)$$

여기서 C 와 P 는 토질매개변수이다.

3. 비선형 응력-변형을 중분식¹⁷⁾

Lade는 전변형률중분 벡터는 다음과 같이 세 부

분으로 나누어 나타낸다.

$$\{d\epsilon_{ij}\} = \{d\epsilon_{ij}^c\} + \{d\epsilon_{ij}^s\} + \{d\epsilon_{ij}^p\} \quad (14)$$

그리고 탄성응력-변형을 증분관계는 Hooke의 법칙에 따라 다음과 같다.

$$\{d\sigma_{ij}\} = [C^e] \cdot \{d\epsilon_{ij}^c\} \quad (15)$$

(15)식에 (14)식을 대입하면 다음과 같다.

$$\{d\sigma_{ij}\} = [C^e] \cdot (\{d\epsilon_{ij}\} - \{d\epsilon_{ij}^s\} - \{d\epsilon_{ij}^p\}) \quad (16)$$

소성과외항복면함수(f_c)와 소성팽창항복면함수(f_p)의 全微分을 취하면 다음과 같다.

$$df_c = \left\{ \frac{\partial f_c'}{\partial \sigma_{ij}} \right\}^T \cdot \{d\sigma_{ij}\} + \frac{\partial f_c''}{\partial w_c} \cdot \left\{ \frac{\partial w_c}{\partial \epsilon_{ij}^c} \right\}^T \cdot \{d\epsilon_{ij}^c\} = 0 \quad (17)$$

$$df_p = \left\{ \frac{\partial f_p'}{\partial \sigma_{ij}} \right\}^T \cdot \{d\sigma_{ij}\} + \frac{\partial f_p''}{\partial w_p} \cdot \left\{ \frac{\partial w_p}{\partial \epsilon_{ij}^p} \right\}^T \cdot \{d\epsilon_{ij}^p\} = 0 \quad (18)$$

한편 소성변형을 증분은 直交條件에 따라 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{d\epsilon_{ij}^c\} = \lambda_c \cdot \left\{ \frac{\partial g_c}{\partial \sigma_{ij}} \right\} \quad (19)$$

$$\{d\epsilon_{ij}^p\} = \lambda_p \cdot \left\{ \frac{\partial g_p}{\partial \sigma_{ij}} \right\} \quad (20)$$

(16)식에 (19)식과 (20)식을 대입하면 다음과 같다.

$$\{d\sigma_{ij}\} = [C^e] \cdot (\{d\epsilon_{ij}\} - \lambda_c \cdot \left\{ \frac{\partial g_c}{\partial \sigma_{ij}} \right\} - \lambda_p \cdot \left\{ \frac{\partial g_p}{\partial \sigma_{ij}} \right\}) \quad (21)$$

여기서 λ_c , λ_p 은 비례상수이며 이 값을 구하는 과정은 다음과 같다.

(19)식과 (20)에 (21)식을 대입하여 다음 식을 얻는다.

$$\left\{ \frac{\partial f_c'}{\partial \sigma_{ij}} \right\}^T \cdot [C^e] \cdot (\{d\epsilon_{ij}\} - \lambda_c \cdot \left\{ \frac{\partial g_c}{\partial \sigma_{ij}} \right\} - \lambda_p \cdot \left\{ \frac{\partial g_p}{\partial \sigma_{ij}} \right\}) + \frac{\partial f_c''}{\partial w_c} \cdot \left\{ \frac{\partial w_c}{\partial \epsilon_{ij}^c} \right\}^T \cdot \lambda_c \cdot \left\{ \frac{\partial g_c}{\partial \sigma_{ij}} \right\} = 0 \quad (22)$$

$$\left\{ \frac{\partial f_p'}{\partial \sigma_{ij}} \right\}^T \cdot [C^e] \cdot (\{d\epsilon_{ij}\} - \lambda_c \cdot \left\{ \frac{\partial g_c}{\partial \sigma_{ij}} \right\} - \lambda_p \cdot \left\{ \frac{\partial g_p}{\partial \sigma_{ij}} \right\}) + \frac{\partial f_p''}{\partial w_p} \cdot \left\{ \frac{\partial w_p}{\partial \epsilon_{ij}^p} \right\}^T \cdot \lambda_c \cdot \left\{ \frac{\partial g_c}{\partial \sigma_{ij}} \right\} = 0 \quad (23)$$

윗 식을 정리하면 다음과 같다.

$$\lambda_c \cdot L_{11} + \lambda_p \cdot L_{12} = T_1 \quad (24)$$

$$\lambda_c \cdot L_{21} + \lambda_p \cdot L_{22} = T_2 \quad (25)$$

여기서

$$L_{11} = \left\{ \frac{\partial f_c'}{\partial \sigma_{ij}} \right\}^T \cdot [C^e] \cdot \left\{ \frac{\partial g_c}{\partial \sigma_{ij}} \right\} + \frac{\partial f_c''}{\partial w_c} \cdot \{\sigma_{ij}\}^T \cdot \left\{ \frac{\partial g_c}{\partial \sigma_{ij}} \right\} \quad (26)$$

$$L_{22} = \left\{ \frac{\partial f_p'}{\partial \sigma_{ij}} \right\}^T \cdot [C^e] \cdot \left\{ \frac{\partial g_p}{\partial \sigma_{ij}} \right\} + \frac{\partial f_p''}{\partial w_p} \cdot \{\sigma_{ij}\}^T \cdot \left\{ \frac{\partial g_p}{\partial \sigma_{ij}} \right\} \quad (27)$$

$$L_{12} = \left\{ \frac{\partial f_c'}{\partial \sigma_{ij}} \right\}^T \cdot [C^e] \cdot \left\{ \frac{\partial g_p}{\partial \sigma_{ij}} \right\} \quad (28)$$

$$L_{21} = \left\{ \frac{\partial f_p'}{\partial \sigma_{ij}} \right\}^T \cdot [C^e] \cdot \left\{ \frac{\partial g_c}{\partial \sigma_{ij}} \right\} \quad (29)$$

$$T_1 = \left\{ \frac{\partial f_c'}{\partial \sigma_{ij}} \right\}^T \cdot [C^e] \cdot \{d\epsilon_{ij}\} \quad (30)$$

$$T_2 = \left\{ \frac{\partial f_p'}{\partial \sigma_{ij}} \right\}^T \cdot [C^e] \cdot \{d\epsilon_{ij}\} \quad (31)$$

비례상수 λ_c 와 λ_p 값을 구하기 위하여 (24)식과 (25)식을 연립하여 풀면 다음과 같다.

$$\lambda_c = \frac{L_{22} \cdot T_1 - L_{12} \cdot T_2}{L_{11} \cdot L_{22} - L_{12} \cdot L_{21}} \quad (32)$$

$$\lambda_p = \frac{L_{11} \cdot T_2 - L_{21} \cdot T_1}{L_{11} \cdot L_{22} - L_{12} \cdot L_{21}} \quad (33)$$

그리고 (32)식과 (33)식을 (21)식에 대입하면 다음과 같이 탄·소성응력-변형증분식 얻어진다.

$$\{d\sigma_{ij}\} = [C^{ep}] \cdot \{d\epsilon_{ij}\} \quad (34)$$

여기서

$$[C^{cp}] = [C^c] - \frac{[C^c]}{A} \cdot \left\{ \frac{\partial g_c}{\partial \sigma_{ij}} \right\} \cdot \{b_c\}^T + \left\{ \frac{\partial g_p}{\partial \sigma_{ij}} \right\} \cdot \{b_p\}^T \cdot [C^c] \quad (35)$$

여기서

$$A = L_{11} \cdot L_{22} - L_{12} \cdot L_{21} \quad (36)$$

$$\{b_c\} = L_{22} \cdot \left\{ \frac{\partial f_c}{\partial \sigma_{ij}} \right\} - L_{12} \cdot \left\{ \frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{ij}} \right\} \quad (37)$$

$$\{b_p\} = L_{11} \cdot \left\{ \frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{ij}} \right\} - L_{21} \cdot \left\{ \frac{\partial f_c}{\partial \sigma_{ij}} \right\} \quad (38)$$

윗 방정식에 사용되는 개별적인 성분은 평면변형을 및 축대칭조건에 맞도록 표현하면 다음과 같다.

$$\left\{ \frac{\partial f_c'}{\partial \sigma_{ij}} \right\} = \left\{ \frac{\partial g_c}{\partial \sigma_{ij}} \right\} = 2 \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ 2\tau_{xy} \\ \sigma_z \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\frac{\partial f_c''}{\partial w_c} = \frac{P_a}{C \cdot P} \cdot \left[\frac{f_c}{P_a^2} \right]^{1/p} \quad (40)$$

$$\{\sigma_{ij}\}^T \cdot \left\{ \frac{\partial g_c}{\partial \sigma_{ij}} \right\} = 2 \cdot I_1^2 + 4 \cdot I_2 = 2 \cdot g_c \quad (41)$$

$$\left\{ \frac{\partial f_p'}{\partial \sigma_{ij}} \right\} = \frac{I_1^2}{I_3^2} \cdot \left(\frac{I_1}{P_c} \right)^m \cdot \begin{bmatrix} 3 \cdot I_3 - \sigma_y \cdot \sigma_z \cdot I_1 \\ 3 \cdot I_3 - \sigma_z \cdot \sigma_x \cdot I_1 \\ 2 \cdot I_1 \cdot \sigma_x \cdot \tau_{xy} \\ 3 \cdot I_3 - (\sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy}^2) \cdot I_1 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{I_3}{I_3} - 27 \right) \cdot \frac{m}{P_a} \cdot \left(\frac{I_1}{P_a} \right)^{m-1} \quad (42)$$

$$\left\{ \frac{\partial g_p}{\partial \sigma_{ij}} \right\} = - \left(27 + \eta_2 \cdot \left(\frac{P_a}{I_1} \right)^m \right) \cdot \begin{bmatrix} \sigma_y \cdot \sigma_z \\ \sigma_z \cdot \sigma_x \\ -2 \cdot (\sigma_z \cdot \tau_{xy}) \\ \sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy}^2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left(3I_1^2 + \left(\frac{I_3}{I_1} \right) \cdot m \cdot \eta_2 \cdot \left(\frac{P_a}{I_1} \right)^m \right) \quad (43)$$

$$\frac{\partial f_p''}{\partial W_p} = \frac{f_p}{P_a} \cdot \left[\frac{P_a}{q \cdot W_p} - b \cdot P_a \right] \quad (44)$$

$$\{\sigma_{ij}\}^T \cdot \left\{ \frac{\partial g_p}{\partial \sigma_{ij}} \right\} = 3 \cdot g_p + m \cdot \eta_2 \cdot \left(\frac{P_a}{I_1} \right)^m \cdot I_3 \quad (45)$$

4. 유한요소 해석

4.1 알고리즘

유한요소의 변위법을 사용하여 i번째 하중 증가 벡터 $\{dQ_i\}$ 에 대한 계산 절차는 다음과 같다. 먼저 절점 변위벡터 $\{dq_i\}$ 을 다음 식에서 구한다.

$$[K_{i-1}] \cdot \{dq_i\} = \{dQ_i\} \quad (46)$$

$$\text{여기서 } [K_{i-1}] = \int_V [B]^T \cdot [C^{cp}] \cdot [B] \cdot dV \quad (47)$$

위에서 구한 절점 변위 벡터로부터 변형을 증분 벡터는 다음과 같이 계산한다.

$$\{de_i\} = [B] \cdot \{dq_i\} \quad (48)$$

다음으로 구한 변형을 증분벡터 $\{de_i\}$ 로 부터 얻을 수 있는 가능한 응력 경로를 결정 하는 것이다 이것을 수행하기 위해서는 다음 식을 이용하여 彈性 試算應力增분벡터를 계산한다.

$$\{d\sigma^i\} = [C^{cp}] \cdot \{de_i\} \quad (49)$$

彈性 試算應力增분벡터를 하중작용전 응력벡터에 더하여 試算應力벡터를 다음과 같이 구한다.

$$\{\sigma_k\} = \{\sigma_{i-1}\} + \{d\sigma^i\} \quad (50)$$

항복 조건을 알아보기 위하여 다음과 같은 조건식을 사용한다.

$$F_{C1} = f_c(\sigma_N) = f_c' \cdot (\sigma_N) - f_c'' \cdot (W_c^{i-1}) \quad (51)$$

$$F_{P1} = f_p(\sigma_N) = f_p' \cdot (\sigma_N) - f_p'' \cdot (W_p^{i-1}) \quad (52)$$

다음 식을 이용하여 초기응력점의 위치를 구한다.

$$F_{C2} = f_c(\sigma_{i-1}) = f_c' \cdot (\sigma_{i-1}) - f_c'' \cdot (W_c^{i-1}) \quad (53)$$

$$F_{P2} = f_p(\sigma_{i-1}) = f_p' \cdot (\sigma_{i-1}) - f_p'' \cdot (W_p^{i-1}) \quad (54)$$

하중작용에 의하여 생긴 응력 경로는 다음 네가지 경우로 나눌 수 있다.

① $F_{C1} \leq 0, F_{P1} \leq 0$ 인 경우

이 때는 응력점은 두 항복면 안에 있고 재료의 거동은 순탄성거동이다. 그리고 i 번째에서 새로운 응력벡터 $\{\sigma_i\} = \{\sigma_N\}$ 이다.

② $F_{C1} \leq 0, F_{P1} > 0$ 인 경우

여기서 만약 $F_{P2} < 0$ 이면 항복할 때 응력상태를 결정하여야 한다. 이것은 $f_p(\sigma_{i+1} + R_p \cdot d\sigma_i^e) = 0$ 에서 R_p 를 구하여 항복점의 응력벡터 $\{\sigma_i\} = \{\sigma_{i-1}\} + R_p \cdot \{d\sigma_i^e\}$ 와 이에 대응되는 응력불변량을 계산한다. 나머지 변형률증분벡터, $(1 - R_p) \cdot \{d\epsilon_i\}$ 와 탄소성장성행렬, $[C^{ep}]^p$ 를 사용하여 응력증분벡터를 계산한다. 이때 $F_{P2} = 0$ 이면 $R_p = 0$ 과 같이 된다.

③ $F_{C1} \geq 0, F_{P1} \leq 0$ 인 경우

이 경우에도 만약 $F_{C2} < 0$ 이면 항복할 때 응력상태를 결정하여야 한다. 이것은 $f_c(\sigma_{i+1} + R_c \cdot d\sigma_i^e) = 0$ 에서 R_c 를 구하여 항복점의 응력벡터 $\{\sigma_i\} = \{\sigma_{i-1}\} + R_c \cdot \{d\sigma_i^e\}$ 와 이에 대응되는 응력불변량을 계산한다. 나머지 변형률증분벡터, $(1 - R_c) \cdot \{d\epsilon_i\}$ 와 탄소성장성행렬, $[C^{ep}]^c$ 를 사용하여 응력증분벡터를 계산한다. 그리고 $F_{C2} = 0$ 이면 $R_c = 0$ 과 같이 된다.

④ $F_{C1} \geq 0, F_{P1} > 0$ 인 경우

이 경우에도 만약 $F_{P2} < 0$ 이면 $f_p(\sigma_{i+1} + R_p \cdot d\sigma_i^e) = 0$ 에서 R_p 를 구하고, 이 때 $F_{P2} = 0$ 이면 $R_p = 0$ 과 같이 된다. 그리고 $F_{C2} < 0$ 이면 $f_c(\sigma_{i+1} + R_c \cdot d\sigma_i^e) = 0$ 에서 R_c 를 구하고, $F_{C2} = 0$ 이면 $R_c = 0$ 과 같이 된다. 그리고 만약 $R_p > R_c$ 이면 좌항복면이 항복할 때 응력상태, 즉 응력벡터 $\{\sigma_i\} = \{\sigma_{i-1}\} + R_p \cdot \{d\sigma_i^e\}$ 와 이에 대응되는 응력불변량이 계산된다. 두번째 변형률증분벡터, $(1 - (R_p - R_c)) \cdot \{d\epsilon_i\}$ 와 탄소성장성행렬, $[C^{ep}]^c$ 를 사용하여 응력증분벡터를 계산하고 나머지 변형률증분벡터 $(1 - R_p) \cdot \{d\epsilon_i\}$ 와 탄소성장성행렬, $[C^{ep}]^p$ 를 사용하여 응력증분벡터를 계산한다. 그리고 $R_c > R_p$ 이면 우항복면이 항복할 때 응력상태, 즉 응력벡터 $\{\sigma_i\} = \{\sigma_{i-1}\} + R_p \cdot \{d\sigma_i^e\}$ 와 이에 대응되는 응력불변량이 계산된다. 두번째 변형률증분벡터, $(1 - (R_c - R_p)) \cdot \{d\epsilon_i\}$ 와 탄소성장성행렬, $[C^{ep}]^p$ 를 사용하여 응력증분벡터를 계산하고 나머지 변형률증분벡터 $(1 - R_c) \cdot \{d\epsilon_i\}$ 와 탄소성장성행렬, $[C^{ep}]^c$ 를 사

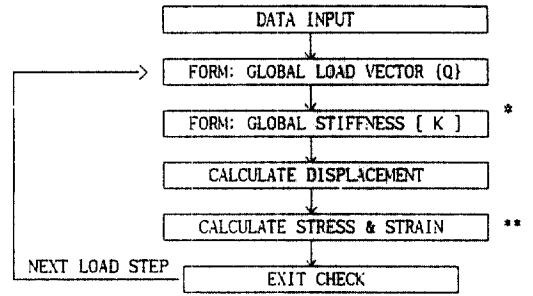
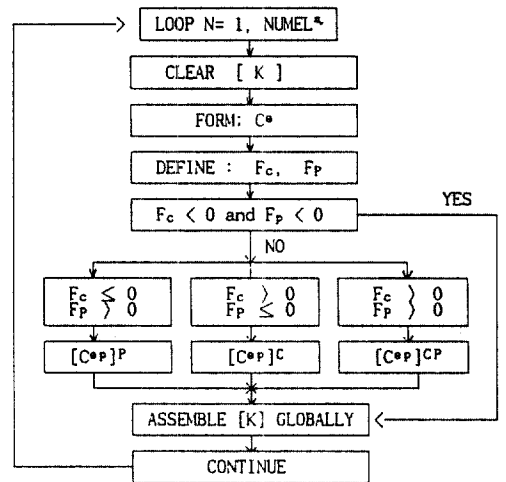


그림 1. Flow chart of finite element main program.



* NUMEL: NUMBER OF ELEMENT

그림 2. Flow chart of global stiffness assembly.

용하여 응력증분벡터를 계산한다.

4.2 흐름도

본 프로그램에서 사용된 주 알고리즘의 흐름도는 그림 1에 나타내었으며 강성매트릭스([K])를 만드는 알고리즘은 그림 2에 나타내고, 응력을 구하는 과정은 그림 3에 상세히 나타냈다.

5. 시험 및 수치해석

5.1 삼축시험

5.1.1 시료준비

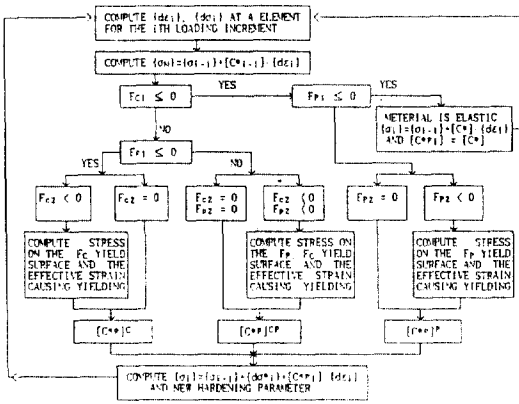


그림 3. Flow Chart of Calculation Stress.

표 1. Physical properties of Baekma river sand (#40-60)

비 중	e_{max}	e_{min}	e_{spc}	Dr
2.664	1.238	0.932	0.978	0.85

모래기초지반의 거동을 해석하기 위하여 백마강 유역에서 채취한 모래를 자연건조시킨 후 #40체를 전부 통과하고 #60체에 잔류 하도록 시료를 채가 립하고 이 시료의 최대간극비(e_{max}), 최소간극비(e_{min})를 측정하고 시료의 초기간극비(e_{spc})를 모형토조시료의 밀도와 함께 상대밀도(Dr)를 85%로 하였다. 이 시료의 물리적 특성은 표 1과 같다. 그리고 토질매개변수를 결정하기 위한 삼축시험 공시체는 직경 50mm, 높이 100mm이다.

5.1.2 삼축시험 방법

준비된 시료를 3축시험기에 설치하기 전에 공시체와 상,하판 사이의 마찰에 의한 전단응력이 발생하는 것을 방지하고 공시체 내부의 변형이 균일하게 되도록 하기 위하여 상, 하판(직경 6cm의 아크릴(acryl)판)에 실리콘 그리스(silicon grease)를 바르고 0.3mm두께의 고무 멤브레인(membrane)을 부착한다. 배수는 특수 제작한 상하의 아크릴(acryl)판의 중앙에 직경 5mm정도의 구멍을 뚫고 다공질판을 넣어 이 판을 통해 양면배수가 되도록 하였다. 시료는 저판 위에서 직접 설치한다. 그리고 포화도를 높이기 위하여 이산화 탄소를 주입하여 건조시료 속의 공기를 배출시킨 후 증류수를 가하여 포화 시킨다. 이때 공시체 내부에 남아있는 이산화탄소는 증류수와

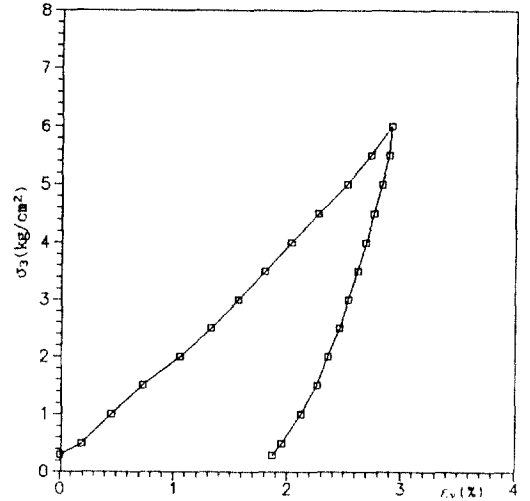


그림 4. Stress-strain response of hydrostatic compression test for Baekma river sand(#40-60).

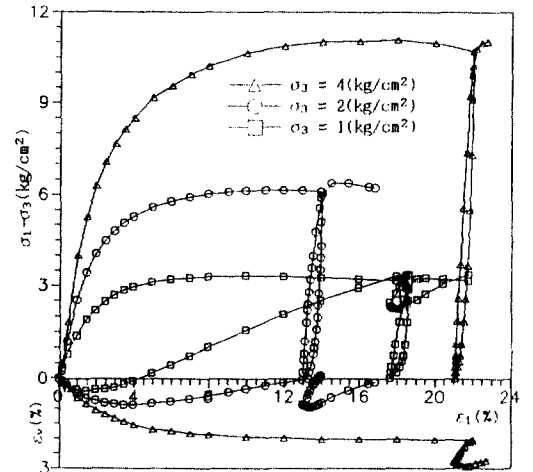


그림 5. Stress-strain responses of drained triaxial compression tests for Baekma river sand (#40-60).

거의 같은 체적으로 용해된다.

이와 같이 준비된 시료를 이용하여 등방압축팽창 시험과 구속압력을 1, 2, 4(kg/cm²)로 각각 달리한 배수삼축압축시험을 실시 하였다. 이 때 탄성계수(Eur)를 결정하기 위하여 최대하중에 이르렀을 때 연속적으로 載荷 - 除荷 - 再載荷를 수행하였으며 전단속도는 0.2mm/min로 하였다. 이들 시험결과를

표 2. Parameter values of Baekma river sand (#40-60)

Kur	n	v	C	P	η_1	m
369.	0.622	0.274	0.00062	0.999	45.	0.198
R	S	t	α	β	γ	δ
-2.528	0.453	2.899	2.158	0.205	0.208	1.367

그림 4와 그림 5에 나타낸다.

5.1.3 토질매개변수 결정

실내 시험결과로부터 구성모델에 필요한 토질매개변수를 얻는 과정은 매우 복잡하며, 手作業으로 수행할 때는 많은 시간이 소요되며 다소 오차가 유발될 우려가 있다. 따라서 보다 신속하고 더 신뢰할 수 있도록 회귀분석(regression analysis)에 의한 토질매개변수결정 프로그램을 개발하였다. 이 프로그램을 이용하여 백마강 모래에 대한 토질매개변수를 계산한 결과는 표 2와 같다.

5.2 2차원 모형재하시험

5.2.1 모형재하시험장치(19,20)

본 연구에서 개발한 유한요소법에 의한 수치해석 방법이 2차원 평면변형율조건인 기초지반의 거동을 어느정도나 정확하게 예측하는가를 검증하기 위하여 앞에서 준비된 시료를 사용하여 입상토의 모형기초지반을 만들어 재하시험을 실시하였다. 본 재하시험 장치는 기초지반의 2차원적인 변형 거동을 측정할 수 있도록 제작된 모형토조로서 성형틀, 모형토조, 계측장치로 구분된다.

1) 성형틀

본 장치는 모형 토조에 기초지반을 성형할 때 성형된 시료가 균일한 상대밀도($D_r=85\%$)를 유지하게 하기 위하여 그림 6과 같이 모래를 낙하시킬수 있는 성형틀을 제작하였다. 이 장치는 높이 1.20m, 길이 1.80m, 폭 0.45m 이고 시료를 일정높이(30cm)에서 자유낙하시킬 수 있도록 하기 위하여 고저를 조정할 수 있는 장치와 시료상자 밑에 바퀴를 설치하여 좌우 이동이 원활하게 하였다.

2) 모형토조

높이 35cm, 길이 120cm, 내폭 15cm,의 강재 및 강채널로 구성되어 있고 전면은 20mm 두께의 아크릴 투명판과 횡방향의 변형을 막기 위한 보조강재로 되어 있다. 전면의 투명판에는 변형측정의 기

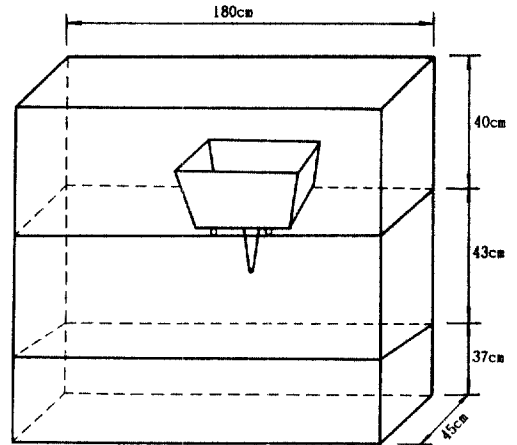


그림 6. Model foundation forming frame.

준이 되는 기준 격자망이 음각되어 있으며 상,하측면에 배수변(drain cock)을 두어 배수 또는 거꾸로 배압을 가할 수 있는 구조로 되어 있다.

3) 계측장치

모형토조의 외측면에 기준격자망을 설치하고 내측면에도 같은 격자망을 설치하여 재하시 발생하는 변형을 외측에서 상대적으로 측정 할 수 있도록 하였으며 이 때 분할 격자망의 간격은 3cm로서 수치해석에 이용된 유한요소 격자망과 같다.

5.2.2 시험방법

1) 격자 요소망 설치

재하중에 일어나는 지반의 변형을 관측하기 위하여 모형토조 내측 전면에 실리콘그리스를 바른 후 그 위에 외측면의 기준격자망과 수치해석에 대응하는 격자망으로 요소분할한 얇은 종이를 부착하여 아크릴판(관측창)에 음각한 기준 격자요소망과의 상대변위를 측정할 수 있도록 한다.

2) 휨성기초설치

휨성기초의 재현은 철재환봉($\phi=6\text{mm}$, $L=14.8\text{cm}$)을 그림 7과 같이 3단으로 쌓은 후 위에 재하판을 놓고 가압하여 휨성기초의 역할을 하도록 한다. 철재환봉을 쌓을 때 재하시 휨 방향으로 무너져 하중이 편심 또는 분산 되는것을 방지하기 위하여 그림과 같이 가는철선(p.p band)을 이용하여 결속한다. 그러나 연직방향의 변형은 구속 되지 아니한다.

3) 2차원 모형토조재하시험

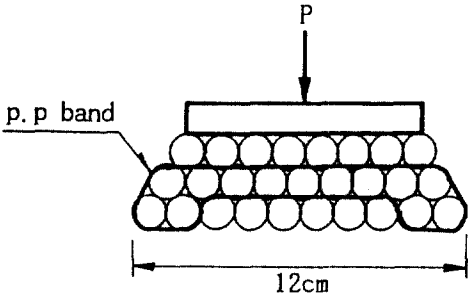


그림 7. Flexible foundation of the model strip footing.

하중 재하는 모형시험 재하물에 모형기초지반을 성형할 때 성형된 시료가 균일한 상대밀도($Dr=85\%$)를 유지시키기 위하여 그림 6과 같이 제작한 틀을 이용하여 시료를 일정높이(30cm)에서 자유낙하시키는 방법으로 입상도 모형기초지반을 만든 후, 이 지반 위에 하중을 가하여 기초지반에 가한 하중과 하중에 대응하는 측방변위와 연직변위를 측정하였다. 이들 변위의 측정을 쉽게하기 위하여 모형틀의 외벽면에 정방형의 눈금을 표시하였으며 내벽에 실리콘그리스를 바른 후, 이 눈금과 동일하게 착색된 얇은 종이를 부착한다. 이와 같은 장치는 하중 증가와 더불어 연직 및 측방변위가 발생할 때 모형지반과 재하물 벽면과의 마찰을 감소하여 2차원 기초지반의 거동을 근접하게 재현 할 수 있도록 하였다. 이와 같이 준비된 모형기초지반에 휩성기초를 설치하고 재하관을 설치한 후 하중을 기초지반의 파괴가 일어날 때 까지 매 단계 100kg씩 하중을 증가하고 그 때마다 측방 및 연직 변위를 측정하였다.

5.3 수치해석과 실험결과와의 비교

5.3.1 등방 및 배수삼축시험

모형재하시험에 사용한 백마강모래(#40-60)의 토질매개변수 결정에는 하나의 등방압축-팽창시험과 구속압력을 각각 달리한 세개의 일반삼축압축시험 결과를 이용하였다. 여기서 결정된 토질매개변수를 이용하여 수치해석을 시행하여 축변형율에 대한 축차응력과 체적변형율 관계를 계산하였다. 그림 8은 등방압축·팽창시험 결과와 수치해석 결과의 응력-변형율관계를 비교하여 나타낸 것이다. 그림과 같이

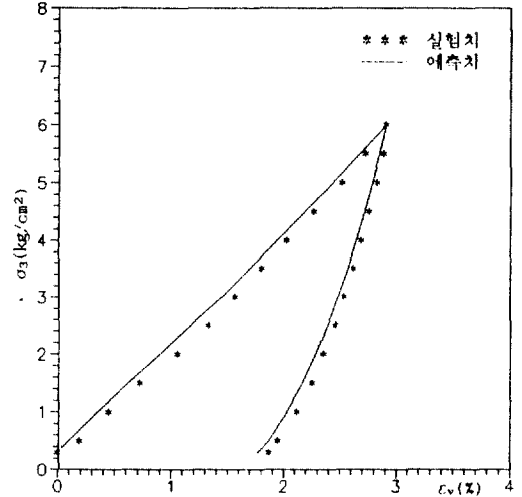


그림 8. Comparison of stress-strain responses of hydrostatic compression test for Baekma river sand(#40-60).

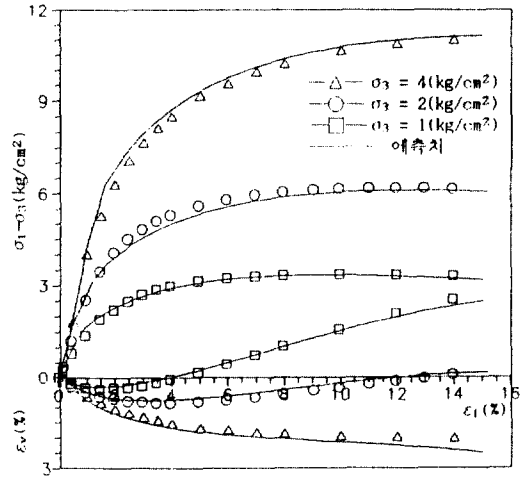


그림 9. Comparison of stress-strain responses of drained triaxial compression tests for Baekma river sand(#40-60).

체적 변형율과 구속 압력의 관계는 탄성성분에서는 수치해석 결과가 시험치보다 약간 큰 쪽으로 편기되어 있고, 전체적 변형율과 구속압력과의 관계에서는 수치해석 결과가 시험치 보다 약간 작은 쪽으로 편기되어 있는 등 양자간에 다소의 차이는 있으나 대체적으로 좋은 일치성을 보이고 있다. 또한, 구속 압력을 각각 1,2,4kg/cm²로 다르게하여 배수삼축압

측시험결과와 수치해석결과를, 축변형율에 대한 축차응력과 체적변형율과의 관계를 비교하여 나타낸 것이 그림 9이다. 구속압력 $2\text{kg}/\text{cm}^2$ 에서는 축차응력과 체적변형율은 시험치가 수치해석 결과에 비하여 약간 큰 값을 보이고 있으나, 구속압력 $4\text{kg}/\text{cm}^2$ 에서는 그와 반대의 경향을 보이고 있다. 이러한 사실로 보아, 이 비선형 구성모델을 이용한 유한요소 수치해석방법은 응력-변형율관계를 정도 높게 예측할 수 있다고 할 수 있다.

5.3.2 2차원 모형기초지반해석^(21,22)

1) 개요

기초지반 거동을 해석하기 위하여 비선형구성모델을 이용, 유한요소해석 정도를 확인하고 실용성을 검증하기 위하여 앞에서 준비된 시료를 사용하여 2차원 모형기초지반에 재하시험결과와 수치해석결과와의 응력-변형율관계를 비교한다. 수치해석에 사용한 유한요소망은 2차원 모형기초지반의 1/2부분만을 채택하여 그림 10에 나타내었다.

2) 변위벡터

그림 11은 2차원 모형기초지반에 하중을 작용시켜 변위를 측정한 결과와 수치해석한 결과의 변위벡터를 실제 크기의 2배로 확대하여 측정치는 실선으로, 예측치는 파선으로 나타낸 것이다. 또한 사진 1에는 2차원 기초모형지반에 하중을 작용하였을 때 변위 형태를 나타내고 있다. 그림에서 나타난 바와 같이 관측치와 예측치 모두 변위벡터의 방향이 기초 깊은 곳에서는 아래를 향하고 있으며 크기 또한 대단히 작은 값을 나타내고 있다.

즉 재하폭 이상의 깊이에서는 작은 크기의 방향을 갖는 벡터를 나타내고 있으며 깊이가 $1.0B$ 이상이면 상재하중의 영향권에서 거의 멀어짐을 알 수 있다.

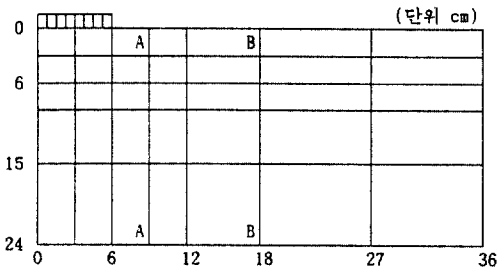


그림 10. Finite element mesh for model strip footing.

지반의 용기를 살펴보면, 지표에서 얇은 부분에서는 수평방향에서 상향으로 용기가 일어나고 최대 용기가 발생하는 지점은 관측치와 예측치가 다소 차이는 있으나 재하폭의 중심에서 재하폭의 약 $0.75B$ 정도 떨어진 거리에서 발생함을 알 수 있다. 관측치와 예측치간에 다소 차이는 있으나 전체적으로 양호한 대응성을 보이고 있다.

3) 하중-침하량 관계

그림 12는 2차원 모형기초지반의 지표면 중앙에서 관측치는 ●로 하고 유한요소해석결과는 ○로 하여 하중-침하량 관계를 나타내었다. 그림에서 보는 바와 같이 관측치가 예측치보다 약간 작게 나타나고 있으나 대체로 양호한 대응성을 보이고 있다.

4) 연직변위

그림 13은 2차원 재하시험에 의한 연직방향 변위를 모형기초지반의 중앙에서 우측으로 측정한 결과와 수치해석치를 비교하여 나타낸 것이다. 그림 (a),(b)는 지표면의 연직변위를 나타낸 것으로 (a)는

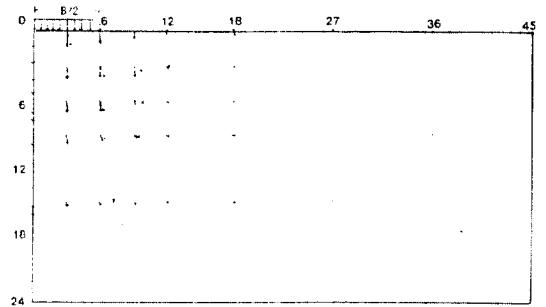


그림 11. Displacement vector of the model strip footing.



사진 1. Displacement of the model strip footing.

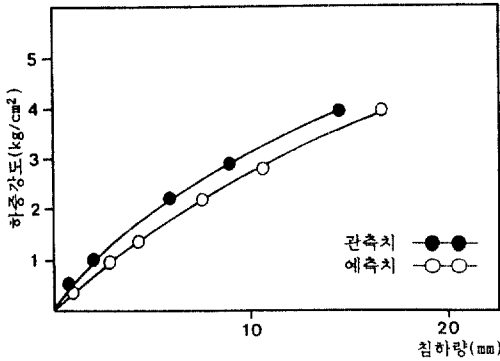


그림 12. Load-displacement for the model strip footing.

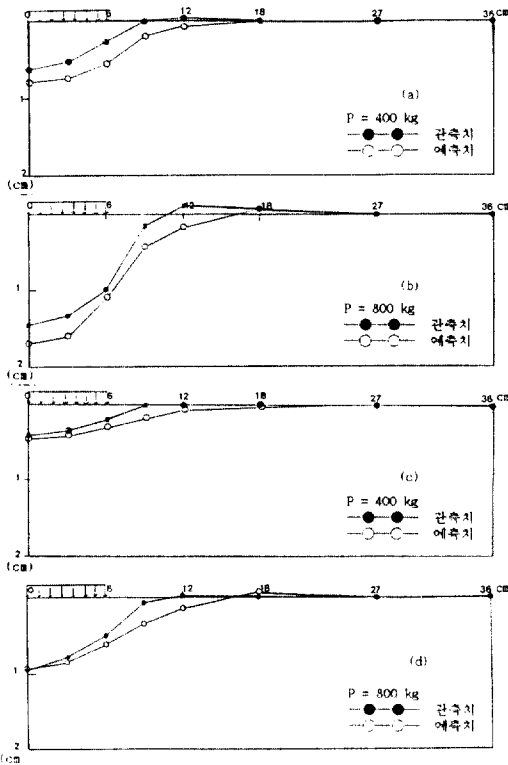


그림 13. Vertical displacement of horizontal surface for the model strip footing.

하중을 400kg(2.2kg/cm²)재하 하였을 때 이고 (b)는 하중을 800kg(4.4kg/cm²)재하 하였을 때의 것이다. 그리고 그림(c)와 (d)는 지표면에서 9cm아래 수평면의 연직변위를 나타낸 것으로, (c)는 하중을 400kg(2.2kg/cm²)재하 하였을 때 이고, (d)는 하중을 800kg

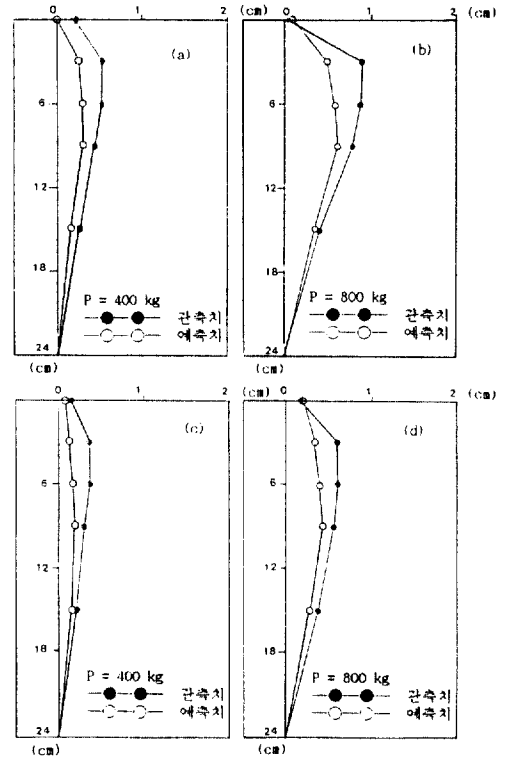


그림 14. Lateral displacement of vertical surface for the model strip footing.

(4.4kg/cm²)재하 하였을 때의 것이다. 그림에서 보는 바와 같이 전체적으로 재하판 부근의 연직변위는 관측치보다 예측치가 다소 크게 나타나는 경향을 보이고 있으며 그 대응성은 매우 양호하다.

5) 수평변위

그림 14는 2차원 모형기초지반의 수평방향변위를 관측치와 예측치를 비교하여 나타낸 것이다. 그림 (a), (b)는 재하판 중앙에서 0.75B떨어진 면의 수평변위를 나타낸 것으로 (a)는 하중을 400kg(2.2kg/cm²)재하 하였을 때 이고 (b)는 하중을 800kg(4.4kg/cm²)재하 하였을 때의 수평변위를 나타낸 것이다. 그림 (c), (d)는 재하판 중앙에서 1.50B 떨어진 면의 수평변위를 나타낸 것으로 (c)는 하중을 400kg(2.2kg/cm²)재하 하였을 때 이고 (d)는 하중을 800kg(4.4kg/cm²)재하 하였을 때의 수평변위를 나타낸 것이다. 그림에서 보는 바와 같이 중앙에서 0.75B, 1.50B 떨어진 연직면은 모두 예측치가 관측치보다 과소 평가되고 있음을 알 수 있으나 그 변위 양상은 일

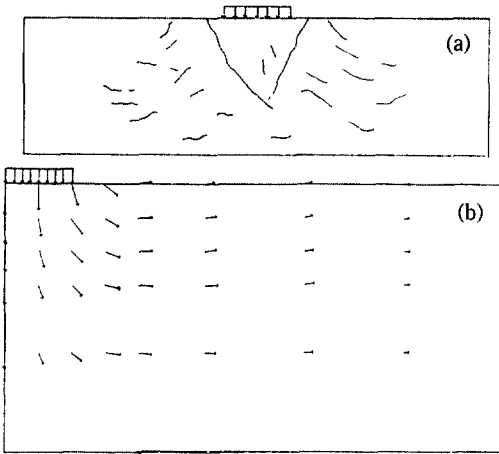


그림 15. Crack zone of shear failure on the model strip footing.

치하고 있다.

6) 파괴형태

모형재하시험과정에서 하중의 증가와 더불어 변형이 진행되면 기초판의 침하와 측방용기 그리고 지반내에서 미리 표시한 표적과 기준선과의 변형에 의한 차이가 계속하여 나타나고 시험 중반에는 무수한 균열이 발생한다.

완전 파괴된 상태에서 시험을 중단하여 균열 형태와 변형 형태를 나타낸 것이 그림 15이다. 그림 (a)는 모형지반에 하중이 작용하여 파괴시 균열 발생의 형태를 관측하여 나타낸 것이고 그림(b)는 수치계산결과를 변위벡터로 나타낸 것으로 그림 (a)의 파괴형태가 서로 유사함을 알 수 있다.

6. 결 론

현재까지 제안된 탄소성모델 가운데서 그 정도가 높다고 평가되고 있는 Lade의 비선형구성모델을 사용하여 기초지반의 거동을 해석하기 위해 유한요소해석 방법을 개발하고 백마강 모래에 대한 모형 기초지반의 평면변형을 조건에서 재하시험을 하여 관측치와 예측치를 비교하고 다음과 같은 주요 결과를 얻을 수 있었다.

1) 토질매개변수 결정 프로그램을 개발하여 백마강모래에 대한 토질매개변수를 결정하고 이 결정된 토질매개변수를 사용하여 수치해석을 하고 이 결과

를 실험결과와 비교한 바 매우 좋은 일치율을 보이고 있다.

2) 축대칭 조건에서 얻은 토질 매개변수를 사용하여 평면 변형을 조건인 모형기초지반의 거동을 해석한 결과는 근소한 차이는 있으나 전체적으로 양호한 대응성을 보인다.

3) 지금까지 이론 위주로 연구되어진 Lade구성 모델에 대하여 유한요소해석을 위한 알고리즘을 개발하므로써 이 모델을 실제에 적용 할 수 있음을 확인하였다.

감사의 글

이 논문은 1991년도 교육부지원 한국학술진흥재단의 자유공모(지방대학육성)과제 학술연구조성비에 의하여 연구되었음. 이에 대하여 동재단에 깊은 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

1. Druker, D. C., Gibson, R. E. & Henkel, D. J., "Soil mechanics and work-hardening theories of plasticity", *Trans. Vol. 122*, 1957, PP. 333-345.
2. Roscoe, K. H., Schofield, A. N., and Worth, C. P., "On the Yielding of soil", *Geotechnique, London, England, Vol. 8, No. 1*, 1958, pp. 22-52.
3. Roscoe, K. H. and Poorooshasb, H. B., "A theoretical and experimental study of strain in triaxial tests on normally consolidated clays," *Geotechnique, London, England, Vol. 13*, 1963, pp. 12 - 38.
4. Roscoe, K. H. & Schofield, A. N., "Mechanical behaviour of an idealized 'wet' clay," *Proc. 2nd European Conf. soil mech., Wiebaden, Vol. 1*, 1963, pp47 - 54.
5. Roscoe, K. H., Schofield, A. N. and Thrairajah, A., "Yielding of clays in states wetter than critical," *Geotechnique, Vol. 13*, 1963, pp. 210 - 240.
6. Roscoe, K. H. & Burland, J. B., "On the generalized stress strain behaviour of 'wet' clay", *Engineering Plasticity, Cambridge University Press., 1968*, pp. 535-609.
7. Schofield, A. N. and Wroth, C. P., "Critical state soil mechanics", McGraw-Hill Book Co. Ltd. London, England. 1986.
8. Ohta, H. & Hata, S., "On the state surface of

- anisotropically consolidated clays," *Proc. of JSCE, No. 196, DEC., 1971*, pp. 117-124.
9. Sekiguchi, H., "Rheological characteristics of clays", *Proc. 9th ICSMFE, Tokyo, 1977*, pp. 289-292.
 10. Sekiguchi, H., and Ohta, H. C., "Induced anisotropy and time dependency in clays", *Proc. Speciality session 9, 9th, ICSMFE, Tokyo, 1977*, pp. 229-238.
 11. Kondner, R. L., "Hyperbolic Stress-Strain Response :Cohesive Soils", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 89, No. SM 1, 1963*, pp. 115-143.
 12. Duncan, M. J., & Chang, C. Y., "Nonlinear analysis of stress and strain in soil", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 96 No. SM5, 1970*, pp. 1629-1653.
 13. Duncan, J. M., & Clough, R. W., "Finite element analysis of retaining wall behaviour", *Journal of the soil mechanics and foundations Division, ASCE, Vol. 97, No. SM12, 1971*, pp. 1657-1673.
 14. Lade, P. V. & Duncan, J. M., "Elastoplastic stress-strain theory for cohesionless soil". *Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 101, No. GT10, 1975*, pp. 1037-1053.
 15. Lade, P. V., "Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces", *Int. J. Solids and Structs, Pergamon press Inc. New York, Vol. 13, 1977*, pp. 1019-1035.
 16. Lade, P. V., "Prediction of undrained behavior of sand", *Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 104, No. GT6, 1978*, pp. 721-735.
 17. Lade, P. V. & Nelson, R. B., "Incrementalization Procedure for elasto-plastic constitutive model with multiple, intersecting yield surfaces". *International Journal for numerical and analytical Methods in Geomechanics. Vol. 8, 1984*, pp. 311-323.
 18. Lade, P. V., "Three-Dimensional behaviour and parameter evaluation of an elastoplastic soil model", *Geomechanical Modeling in Engineering practice, 1986*, pp. 297-311.
 19. Faruque, M. O., & Deasi, C. S., "Implementation of a general constitutive model for geological materials", *International Journal for numerical and analytical Methods in Geomechanics. Vol. 9, 1985*, pp. 415-436.
 20. 남진희, "연약지반의 변형에 대한 2차원모형 재하 실험연구", 전남대학교, 석사학위논문, 1991.
 21. 이영생, 김명모, " 기초아래 지반의 거동에 대한 유한요소 해석" **대한토목학회논문집** 제11권 1호 1991, pp. 167-176.
 22. 박병기, 장용채, 박종천, 박선배, "강성이 다른 다층토 지반의 변형 및 응력전달" **대한토목학회 논문집**, 제12권 제2호. 1992, pp. 205-215.

(接受 : 1993. 3. 10)